MEMORIE

DELLA

ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

SERIE QUARTA

TOMO I.

BOLOGNA
TIPI GAMBERINI E PARMEGGIANI
1880

STUDI

ISTO-FISIO-ANATOMO-PATOLOGICI E CLINICI

SULL' ANO PRETERNATURALE ACCIDENTALE

MEMORIA

DEL PROFESSORE FRANCESCO RIZZOLI

(Letta nella Sessione del 6 Novembre 1879)

Sebbene studi sperimentali, osservazioni isto-fisio-anatomo-patologiche e cliniche abbiano già di molto contribuito non solo a chiarire i procedimenti organici che valere ponno a procurare la guarigione di varie accidentali aperture anali deturpanti l' addome, ma abbiano altresì potentemente concorso a meglio stabilire i mezzi di cui il chirurgo può disporre per favorirne la stabile chiusura, tuttavia molto intorno a ciò rimane ancora a sapersi ed a farsi, ed è per questo che, come già m' adoperai altra volta, (1) così anco di presente cercherò d' addentrarmi in sì importante argomento.

Diverse sono le cagioni che ponno originare l' ano preternaturale accidentale. Può il medesimo essere conseguenza di ulcerazione avvenuta in qualche ansa intestinale e nell' addominale parete per infiammazioni suppurative intra-addominali, per ileotifo, o determinate da oclusioni intestinali dipendenti da intasamento di materie fecali, da corpi estranei arrestatisi od introdotti nel canale digerente, da ingrossamento delle intestinali pareti, da briglie, da cercini e da tumori sovrastanti e comprimenti le intestina, o da torsione degli intestini istessi, può derivare da tubercoli fusi o da cancri invadenti pure l' intestino in un coll' addominale parete, può effettuarsi per lavori di eliminazione indotti da gravidanze estrauterine o da mostruosità per inclusione, può originarsi per prolasso di intestino attraverso una ferita dell' addome susseguito da strozzamento e da cancrena.

(1) Rendiconto dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna 22 Gennaio 1846. Memorie della stessa Accademia 1849, e Rizzoli collezione di Memorie chirurgiche ed ostetriche. Relazione di varii casi d' interruzione di continuità degli intestini.

Fra le cagioni però per le quali più di frequente l' ano preternaturale accidentale trae la sua origine denno annoverarsi le ernie intestinali prese da strozzamento ed ulceratesi o cancrenatesi, non che le ferite degli intestini, le quali sventuratamente talvolta ponno effettuarsi anco nel compiere la cheletomia, o nell' aprire un tumore erniario ritenuto di altra natura.

È d' uopo però avere sempre presente che in quest' ultimo caso di errata diagnosi, non bisogna poi essere molto corrivi nell' attribuire all' operatore simile infortunio. E ciò è a dirsi specialmente di quei casi nei quali alla incisione del tumore erniario eseguita dal chirurgo precedettero varie esterne violenze riportate sull' ernia o sulla parete addominale in corrispondenza al punto in cui di poi l' ernia rapidamente si svolse.

Bello esempio di questo rispetto e di questa indulgenza pei Colleghi lo diede il Tacconi in un caso che a lui occorse giudicare (1) e che vuol essere ricordato per le sue particolarità.

Un feroce toro vagante in un campo s' avventa ad un povero viandante, e d' un corno lo percuote nella destra anguinaglia, ove poscia manifestasi un tumore del volume di un uovo d' oca. Vedutolo da un chirurgo, dal colore rosso livido e dalla fluttuazione che presentava quell' enfiatura giudicatala un ascesso, l' aprì veggendone escire materia scura e fetentissima con un lungo lombrico, e dopo alcun tempo altri 27, e poscia altri rigettati per vomito. Così malconcio si trascinò l' infermo verso Bologna e traendo stentati e pieni di tormenti i passi, dopo l' escita di umore sanguigno dalla ferita, cadde tramortito a terra, e soccorso implorando ed aita, venne sollevato e posto sopra un giumento, e percorsa lunga via in sì misero stato, arrivò finalmente in questa città. Lo accolse allora l' ospizio dei pellegrini, donde passò allo Spedale ove poi, dopo essere stato visitato dal professore Tacconi, ben presto depose la vita.

Fecesi la sezione del cadavere alla presenza d' anatomici egregi, da Pietro Tabarroni, cui il Tacconi stesso avea conceduto di praticarla.

Mostrò l' autopsia che in corrispondenza alla regione inguino-crurale destra, ove quel povero viandante avea ricevuto il cozzo dal toro, i tessuti sottostanti al tegumento, ivi rimasto illeso, aveano sofferta sì grave offesa da esserne derivata una ampia apertura attraverso la quale essendosi insinuato un lungo tratto d' intestino ileo, per tal modo erasi poi in quella istessa regione formata un' ernia. L' intestino ernioso era aperto infiammato ed aveva apparenze necrotiche.

E siccome in esso intestino si trovò pure rinchiuso un altro lombrico, così il Tacconi ne trasse partito per promuovere la questione se i lombrici che dall' ernia erano esciti nell' atto e dopo che fu aperto dal chirurgo l' ernioso tumore, avessero potuto essi medesimi, piuttosto che il coltello, avere cagionata la perforazione delle membrane intestinali, e recò in mezzo esempi di cotali lesioni osservate

(1) Tacconi. De quibusdam haepatis aliorumque viscerum affectibus observationes 1740. De morbis duobus. V. De Bonon. Scient. et Art. Inst. atque Accad. Comment. T. 2. P. 1. p. 212.

dal Boneto, dal Boherave e da altri, e notonne uno veduto nello spedale di Santa Maria della Vita e comunicato a lui, nel quale un ileo era stato da lombrici ridotto alla foggia di un cribro, con forami sì larghi da ricevere una penna di gallina.

In simile guisa il Tacconi mostrandosi indulgente e benevolo verso quell' inconsulto chirurgo, potè di qualche guisa allontanare da lui quelle severe taccie da cui era stato colpito. Anzi a bello esempio di animo cortese verso i Colleghi, non contento di ciò, per rendersi il Tacconi a lui maggiormente benigno, non omise di rammentare le grandi difficoltà che in alcune circostanze si ponno incontrare a distinguere un' ernia da altri tumori delle anguinaglie, come già aveano sentenziato l' Astruc, l' Heister, il Mery ed altri illustri chirurghi.

Se per altro il Tacconi esercitando il suo ingegno e mosso dalla bontà dell' animo suo credè ben fatto il trarre partito dalla presenza di quei vermi nell' intestino per dare di qualche guisa ragione della grave offesa nel medesimo rinvenuta e per discolparne il chirurgo, nulladimeno non volendo io entrare qui nella questione tuttavia agitata, se ed in qual modo la presenza o l' agglomeramento di lombrici nell' intestino possa cagionarne anche ampia perforazione, essendo essi vermi sprovvisti di organi a ciò adatti, io ritengo però che se quei vermi fossero mancati, non avrebbe in allora omesso il Tacconi di ricercare qualche altra più probabile cagione per dare spiegazione del guasto rinvenuto in quello stesso ernioso intestino senza che in pari tempo esistesse qualche altra rilevante lesione nel sovrastante tegumento, e forse sovvenendosi di altre analoghe offese ne avrebbe molto meglio trovata la causa vera nello stesso violento cozzo con cui il toro colpì il ventre di quel misero viandante (1).

(1) Sebbene il Monteggia affermi che qualora i lombrici abbiano perforato l' intestino, la formatasi apertura si stringa in modo da non permettere l' escita di materie fecciose, e che quando le medesime vengono emesse ciò deriva dall' essersi tale perforazione ampiamente formata in precedenza dell' escita dei vermi ed indipendentemente dal loro concorso (1), tuttavia per posteriori accurate osservazioni dei professori Amabile e Virnicchi rimarrebbe dimostrato, contrariamente pure all' opinione di altri Autori, che anche in seguito della sola spillo-puntura può qualche volta aver luogo l' emissione delle materie fluide che percorrono l' intestino, nella cavità peritoneale (2), fatto che io stesso ad intestino disteso ho potuto confermare.

Sono poi ben degne, intorno tale argomento, di essere conosciute le osservazioni microscopiche fatte dal dottor Vicentini sui residui della digestione e sulle uova degli elminti che egli rinvenne nei materiali di dubbia natura emessi da una fistola susseguita ad un ascesso formatosi nell' ombellico, ed ivi apertosi spontaneamente in una giovinetta quindicenne appositamente alimentata il giorno innanzi con verdura e carne affine di riscontrare nel materiale stesso i cambiamenti di tessitura in esso avvenuto per fatto della digestione. A questo proposito egli così si esprime.

« L' utilità dell' esame microscopico delle sostanze vomitate e delle feccie venne già riconosciuta in questi ultimi anni, e non istaremo qui a ripetere quello che ciascuno può trovare nei trattati speciali. Ci parve nondimeno che l' esame microscopico del materiale delle fistole intestinali e delle fistole gastriche, fosse argomento, non diremo nuovo, ma assai poco studiato e ci piacque di fer-

(1) Monteggia. Istituzioni Chirurgiche. Volume 6, pag. 321. Milano 1830.

(2) Amabile e Virnicchi. Sulle soluzioni di continuo dell' intestino e sul loro governo. Napoli 1859.

Rimanga però incautamente o disgraziatamente inciso o troncato un intestino formante ernia, o la intestinale discontinuità avvenga per ulcerazione o per cancrena del medesimo in seguito di strozzamento erniario, se l' ansa intestinale ulcerata cancrenata o disgraziatamente ferita resta ripiegata ed impegnata nell' apertura erniaria i due corrispondenti capi intestinali rimarranno perciò per un certo tratto addossati o paralelli nella loro faccia mesenterica, oppure in qualche altro punto della loro circonferenza, e da ciò ne risulterà quel setto intermedio più o meno esteso che è denominato promontorio valvola o sperone.

Qualora in causa della presenza di questo tramezzo ed anco della più o meno rilevante intestinale stenosi, che come insegnò l' illustre professore Palasciano ed io ebbi campo di confermare, si mostra talvolta in uno od in ambedue i capi dell' intestino in corrispondenza del cingolo strozzante, non sia permesso che in parte alle materie che scendono dal capo gastrico dell' ansa aperta o troncata di penetrare nell' altro capo od anale, ed il restante di esse materie prenda per questo la via dell' apertura addominale, in allora ancorchè si giunga di poi ad ottenere la chiusura di quest' ultima apertura, in causa della presenza dello sperone, od anco della inte-

marvi l' attenzione. Chè se nel caso nostro la diagnosi era chiarita abbastanza da altri dati, non si negherà che la sua determinazione potrebbe dipendere altre volte solo dall' esame microscopico.

« L' esame microscopico non permetterà mai che si confonda un semplice ascesso della parete addominale, o un ascesso circoscritto del peritoneo, con un ascesso o un seno comunicante col canale digerente.

« Quanto alle uova degli elminti segnatamente, che la loro presenza non debba essere infrequente in casi di fistola o anche di ferita, ve lo mostrano esempi di lombricoidi rimasti per lungo tempo appiattati nelle anfrattuosità delle ferite, de' seni, o tra i piani musculari della parete addominale. È nota la disposizione anatomica e la direzione varia delle fibre de' muscoli larghi addominali, per effetto della quale può accadere la formazione e per fino lo strozzamento di un' ernia cieca tra l' un piano muscolare e l' altro, in seguito a ferite penetranti, parallele al corso di questo o di quell' altro muscolo. Il ch. prof. Bruni, nostro maestro, narrava di una lunga disputa agitata sulla natura di una ferita addominale, affermandola taluni penetrante, altri superficiale, finchè, dopo un paio di mesi, un lombricoide venne ad affacciarsi all' apertura esterna.

« Ora, se in casi di questa fatta i dubbi non si dileguarono se non se per l' uscita spontanea dell' elminto, ognuno vede di che vantaggio sarebbe stato l' esame microscopico dello scolo; chè il riscontro delle uova del parasito, immancabile, se questo era femmina, avrebbe tosto fatta la luce.

« Taceremo degli ascessi o delle fistole che tengono dietro ad una perforazione causata o provocata da elminti: chi sa che il caso della nostra inferma non ne sia anch' esso un esempio?

« La ricerca microscopica non tornerà meno proficua per valutare approssimativamente il livello interno della fistola. Nel nostro caso è probabile che essa partisse dalle prime circonvoluzioni dell' ileo. Le traccie più o meno o niente affatto visibili delle fibre musculari striate, la scarsezza o abbondanza dei vasi tracheali e delle fibre legnose, la presenza o l' assenza delle parti più digeribili dei vegetali, la presenza, il numero e la specie delle uova dei parasiti: ecco i principali criteri diagnostici.

« Le uova degli elminti si trovano di rado, non si rinvengono almeno in gran copia più allo in su della sede ordinaria di ciascun parasito, sebbene possono trovarsi nella stessa abbondanza nei tratti inferiori. Le uova dell' ossiuro non s' incontreranno al di sopra del setto, e quelle del tricocefalo al disopra del cieco. Le uova degli altri elminti, eccetto quelle del *distoma hepaticum*, accennano con maggiore probabilità all' ileo, di rado, almeno, e non in copia, si troveranno al di sopra dell' intestino digiuno ». Il Morgagni. Giugno 1879.

stinale stenosi, avverrà tale ristagno di materie fecciose da poterne temere più o meno gravi conseguenze o il riaprimento della formatasi cicatrice addominale.

Se poi i due capi intestinali rimasti fra loro paralelli, siansi o no resi di qualche guisa stenotici, continuando a restare impegnati nell' apertura erniaria finiranno per farsi colle loro circonferenze alla medesima fortemente aderenti e nel tempo stesso le materie fecciose continueranno a sfuggire in molta parte o del tutto dal capo superiore, potrà allora formarsi una fistola od un ano preternaturale accidentale permanente.

Per buona sorte però collo scorrere del tempo accade non di rado che non solo in causa della tendenza che hanno gli intestini per la propria gravità a rientrare nell' addome, massime quando l' infermo giace in posizione supina, ma ben anco in virtù dei movimenti di peristalsi e di antiperistalsi di cui sono forniti, i due monconi stessi nel medesimo penetrano e vi si approfondano e nell' interno di esso addome trovando modo di svolgersi e di meglio acconciarsi, a motivo specialmente della stessa peristalsi (che come io stesso ho potuto accorgermi, in alcuni casi è molto energica) riescono perciò a scostarsi e distendersi in guisa da permettere che si vada accorciando quello sperone che opponevasi al passaggio delle materie dall' estremo gastrico nell' anale, entro il quale perciò esse materie cominciano a penetrare. Nel retrarsi poi che fanno i due capi intestinali stessi e nell' insinuarsi e nascondersi nel ventre, gli orli di essi monconi, resisi aderenti in corrispondenza all' apertura erniaria col sacco o col suo collo, trascinano seco tutto all' intorno il collo od il sacco erniario stesso, e con ciò si forma un imbuto membranoso avente il contorno della sua base aderente all' orlo dei due monconi intestinali, l' apice rivolto all' infuori, ossia verso l' apertura erniaria.

Costituito che sia simile imbuto in allora quelle materie che scendendo dal capo gastrico dell' intestino escivano dalla stessa erniaria apertura, entrando invece nella cavità dall' imbuto formata, nel sormontare che fanno la porzione superstite di sperone la deprimono e la respingono vieppiù o del tutto all' indietro, e così viene ad esse materie concesso d' insinuarsi più agevolmente ed in maggior copia nel capo inferiore od anale dell' intestino, il quale capo d' ordinario essendosi reso più angusto comincia così grado grado a debitamente allargarsi. Quando poi l' infondibolo si è completamente formato, ed è della desiderabile ampiezza, allora per lo più il suo apice in un colla esterna apertura cutanea cicatrizzando effettuasi la totale chiusura e scomparsa dell' ano anormale, e per tal modo le materie fecciose hanno campo di scorrere del tutto lungo il canale alimentare, spesso anche senza difficoltà.

Talvolta però la continuità del canale intestinale non si ristabilisce in questa precisa maniera, od avviene in modi da questo ben diverso, non vi concorre cioè che parzialmente o in guisa alcuna il sacco erniario, o non vi prendono parte i tessuti adiacenti alla intestinale lesione. E siccome ciò può interessare grandemente la Scienza e la pratica chirurgica, così indicherò le osservazioni più importanti che intorno a ciò vennero da me fatte.

Nell' Agosto dell' anno 1841 fu mandato dal signor Dottore Quinto Macchiavelli allo Spedale un giovane e robusto contadino acciocchè vi fosse operato di un' ernia scrotale sinistra, la quale erasi da tre giorni strozzata. Tali erano diffatti le condizioni dell' infermo da obbligare a ricorrere senza indugio alla cheletomia, mediante la quale scoperto che fu l' intestino ernioso si trovò minacciato da cancrena. Nella speranza però di poterla evitare, come talvolta in altri consimili casi io era riescito, sbrigliai il cingolo strozzante e tosto esso intestino riposi entro l' addome. Ma dopo otto giorni di cura si vide escire attraverso l' apertura erniaria abbondante copia di materie fecali, il che fece conoscere non essersi potuta evitare la necrosi dell' ansa strozzata, la quale staccatasi, potè essere tratta fuori dall' addome dopo alcuni altri giorni, essendosi impegnata nell' esterno foro inguinale. Questa ansa misurando centimetri 15 in lunghezza non lasciava perciò fondata lusinga di potere riescire ad evitare un permanente ano contro natura. Per altro collo scorrere dei giorni vidi la piaga all' inguine ed allo scroto grado grado rimpiccolire e nel tempo stesso le feccie riprendere in parte il cammino normale.

Così procedendo le cose, scorsi che furono appena due mesi, la piaga mostrossi quasi del tutto cicatrizzata, e null' altro rimase se non se un piccolissimo pertugio da cui uscivano di quando in quando alcune goccie di sciolte materie giallastre. Cauterizzato quel forellino col nitrato d' argento e compresso con opportuna fasciatura, del tutto in breve tempo si obliterò. Dopo di che l' operato niun incomodo soffrendo nella digestione, evacuando ogni giorno normalmente le feccie, venne licenziato dallo Spedale.

Erano già trascorsi due mesi dall' eseguita operazione allorchè quest' uomo disprezzando il suo bene stare fece abuso di cibi e di vino per cui venne assalito da gravissima enterite che in breve ora a morte lo trasse (1).

La sezione cadaverica fu molto interessante. Colla medesima mi venne dato scuoprire che i due capi corrispondenti all' ansa intestinale cancrenatasi ed eliminata, non rimanevano già molto discosti fra loro, come poteva supporsi, ma invece trovavansi vicinissimi e appena distanti un centimetro l' uno dall' altro. Il superiore o gastrico diretto dall' alto in basso guardava colla sua bocca quella dell' inferiore od anale in modo da permettere alle materie intestinali scorrenti nel tratto superiore di penetrare nell' apertura del capo intestinale inferiore. Ma per evitare del tutto lo spandimento delle feccie nella cavità peritoneale formavano barriera posteriormente e superiormente alle materie fecciose gli adiacenti intestini, i quali per mezzo della loro esterna superficie sierosa aveano prese strette aderenze colla superficie del pari sierosa dell' ansa troncata, inferiormente a ciò serviva il peritoneo pelvico, anteriormente il collo del sacco erniario che mostravasi obliterato, non che la cutanea addominale cicatrice. Ed era pure assai bello il vedere che quella specie

(1) Rendiconto e Memorie dell' Accademia dell' Istituto di Bologna 1846. Collezione delle mie Memorie.

di capsula o di ghiera che serviva a ristabilire la continuità degli intestinali monconi avea nel suo interno acquistato tali caratteri da *rassomigliare ad un tessuto mucoso,* che neppure in quel tratto restringendo il lume del canale intestinale lasciava così libero campo alle materie fecciose di percorrere tutto quanto l' intestino (1).

E dissi che la superficie interna di quella specie di ghiera avea acquistato tali caratteri da *rassomigliare ad un tessuto mucoso,* avendo ciò desunto soltanto dall' esame macroscopico, il che quindi non potea essere sufficiente per istabilire che un vero tessuto mucoso erasi rigenerato, tanto più che intorno a questa rigenerazione regna anche oggidì grande discrepanza di pareri.

Ed infatti i chiarissimi professori Amabile e Virnicchi nell' interessantissimo loro lavoro *sulle soluzioni di continuo dell' intestino e sul loro governo. Napoli 1859* a pagina 79 così si esprimono:

« Quanto alla mucosa, avea detto il Travers, ed ha ripetuto Reybard, che essa non riunisce le sue labbra, ma si ritira: il medesimo Reybard ha aggiunto che vedesi nel mezzo delle sue labbra una prominenza di tessuto inodulare: al contrario Malgaigne ha detto, che i bordi della mucosa si saldano insieme « senza » lasciare nemmeno vedere alcun tessuto inodulare intermedio (2). D' altra parte Jobert professa l' esistenza della mucosa *senza interruzione,* e Petrequin (3) dichiara aver « distinto coll' occhio e colla lente la continuità della mucosa *rigenerata* » e dice non vedere il perchè la mucosa non si comporterebbe in questi casi come nell' operazione del labbro leporino e della blefarorafia: soggiunge aver potuto convertire Reybard alla sua opinione. Per verità una *rigenerazione* di mucosa sembra qualche cosa di troppo importante e da destare vivamente l' attenzione: e la desta anche un poco di più il sentire da Petrequin convertito Reybard a questo principio. Ma un completo disinganno si palesa a colpo d' occhio, quando si riscontrano i tre Esperimenti su cui si appoggia Petrequin, in due dei quali l' osservazione cadde su di animali uccisi due mesi dopo l' operazione, in un terzo poi han bastato soli *cinque giorni:* ci pare che difficilmente possa intendersi cosa significhi *rigenerazione* in questi casi. Dobbiamo soggiugnere che non sapremmo accettare alla lettera un saldamento della mucosa *senza lasciare ve-*

(1) Simile canale accidentale formato a spese delle parti adiacenti è ben difficile il poterlo ottenere, come lo hanno dimostrato gli esperimenti fatti sugli animali. Il Velpeau ne descrisse uno avvenuto in seguito di ernia ombellicale strozzata e passata a cancrena in cui però tale nuovo canale non si formò completamente. Il capo superiore o gastrico si era reso in parte aderente col suo contorno al di dietro dell' anello ombellicale, ed era distante più di due centimetri dal capo inferiore od anale. Cionullameno veniva impedito lo spandimento delle materie fecali entro l' addome da una porzione di epiploon da un' ansa intestinale e da una falsa membrana, le quali parti assieme agglomerate ed agglutinate all' intorno dei due capi del troncato intestino lasciavano poi superstite un' apertura all' ombellico, dalla quale porzione di materie fecciose continuavano ad escire, mentre le restanti percorrendo il sottoposto tratto di canale alimentare venivano normalmente evacuate. Velpeau, Leçon orales de clinique chirurgicale. Bruxelles 1841, pag. 174.

(2) Malgaigne. Médicine Operatoire. 6 Edit. Paris 1853, pag. 541.

(3) Petrequin. Anatomia Topografica.

dere tessuto inodulare intermedio come dice Malgaigne: nè sapremo intendere alla lettera che la mucosa si ritiri e si arresti, come dice Reybard: non ha certo questa forza la mucosa, che deve essere ben poco retrattile quando estubera e si getta all' esterno fino dal primo tempo della ferita. Ben si vede che troppe differenze vi sono, e che bisogna rifare completamente le osservazioni. »

I professori Amabile e Virnicchi poi nel dare conto delle osservazioni da essi loro a tale uopo intraprese, dichiarono che nelle loro ricerche si sono serviti del mezzo più facile più pronto e di più belli risultamenti cioè del microscopio.

In simile guisa hanno potuto rinvenire sempre tessuto inodulare fra i bordi della discontinuità intestinale riunitisi, ed hanno ritenuto potere dichiarare, che loro sembrava una pretensione enorme la rigenerazione della mucosa, potere essa comparire continua ad occhio nudo per la pochezza del tessuto inodulare intermedio e per l' inclinazione dei villi: ma questo indica sempre più la necessità del microscopio, non la rigenerazione.

Per tutto questo, come bene immaginare si può, io non mi sono lasciato sfuggire le occasioni propizie per cercare di meglio chiarire un sì importante argomento, ed i risultati delle osservazioni fatte a tale uopo verranno or ora da me debitamente esposte.

Intanto dirò che se la storia del caso di ernia superiormente ricordato conferma che a ripristinare l' interrotta continuità del canale intestinale vi contribuisce in parte soltanto il collo del sacco o il sacco erniario istesso, ed il restante si deve alle adiacenti parti, talvolta invece, come già dissi, a ristabilire la continuità del canale intestinale istesso non concorrono affatto nè il sacco erniario nè le parti adiacenti alla soluzione di continuo dell' intestino. E diffatti in simili casi mentre si osserva che l' intestino rimane da esse parti del tutto disgiunto in pari tempo si scorge svolgersi un lavoro di riparazione che può valere da solo o coll' aiuto della sutura ad obliterare stabilmente la morbosa intestinale discontinuità.

Nell' Agosto dell' anno 1845 operando io nello Spedale Provinciale e Ricovero di chelotomia un uomo affetto da ernia inguino-scrotale sinistra da alcuni giorni strozzata, riscontrato avendo nell' ansa intestinale protrusa un' apertura ulcerosa elittica il cui diametro maggiore era di circa 5 linee, stimai conveniente di tentarne l' obliterazione mercè l' enterorafia. A tale uopo dopo avere arrovesciati all' indentro i bordi dell' apertura ulcerosa in modo da formare una plica che sporgesse nell' intestino come fanno le valvole conniventi, e posta così a contatto la superficie sierosa peritoneale dell' intestino istesso nel punto ulcerato, mediante un ago da cucire munito di un filo di seta eseguii una sutura a cavalletto, nella quale però cercai di comprendere soltanto la membrana peritoneale esterna di esso intestino, avendo l' avvertenza in pari tempo di lasciare uno dei capi del filo pendente per un piccolo tratto entro l' intestino, e fermando con un nodo l' altro capo al di fuori. Riposta che fu l' ansa nel ventre era a sperarsi che se il filo si fosse staccato quando l' intestino avesse già prese aderenze colle attigue parti, avrebbe

potuto con facilità esso filo cadere entro l' intestino ed essere così dal corpo eliminato. Nel corso della cura però ad onta di attenti esami non potemmo accorgerci che quel filo fosse di guisa alcuna espulso. Giunti che fummo alla 30 giornata dall' operazione, essendosi già ottenuta la cicatrizzazione della piaga che risultò dalla eseguita cheletomia, e quando l' infermo era in procinto di escire dallo Spedale, per colmo di sventura venne assalito da acutissima pleuro-pneumonite, che ribelle al più energico trattamento in pochi dì a morte lo trasse.

Non omisi per certo di farne l' autopsia bramando di conoscere in quale modo si era effettuata la stabile obliterazione dell' ansa ulceratasi. L' autopsia adunque mi mostrò che nella porzione d' intestino ulcerata e sottoposta alla sutura erasi già intieramente ristabilita la continuità organica, che la piega artificialmente fatta mediante l' arrovesciamento all' interno dei bordi dall' ulcerosa apertura era rimpiccolita in modo da sporgere appena dal livello della mucosa intestinale a guisa di una plica connivente, che il capo del filo di seta usato per la sutura ancora integro era fermo al suo posto. All' esterno di esso poi in corrispondenza della praticata sutura non rinvenni più traccia alcuna della preesitente interruzione intestinale, ma in quel tratto tutto era continuo, tutto era ricoperto da uno strato novello di sodo tessuto connettivo di un colore bianco carneo, frutto dell' orditosi processo adesivo. Mostrò poi l' autopsia stessa che l' ansa intestinale al di fuori era *affatto libera* nè lasciò scorgere indizio alcuna da cui potesse arguirsi aver preceduta qualsiasi precaria o forte aderenza fra l' intestino e le adiacenti parti (1).

Ma non solo ho veduta obliterarsi isolatamente, senza cioè che vi partecipassero in modo alcuno le adiacenti parti, nell' ernioso ora indicato l' ulcerazione avvenuta nel protruso intestino e trattato colla sutura, ma l' obliterazione isolata fu di poi da me riscontrata altresì in alcuni rari casi di ferite intestinali in cui la sutura non venne praticata e ben anco in un caso di colecistite, in cui come più estesamente indicherò in appresso alla ulcerazione della cistifellea congiungevasi una ampia ulcerazione del colon trasverso. In questo caso l' ulcerazione nel colon formatasi rimase in modo meraviglioso chiusa mediante processo di riparazione graduale da un tessuto connettivo neoformatosi sorto dai bordi della intestinale apertura trasformatosi poscia in una semplice lamina fibrosa la quale, come osservò anche l' illustre prof. Ercolani e come tutti ponno vedere manifestamente esaminando il pezzo patologico conservato nell' alcool nel Museo Anatomico-patologico di questa Università, da sola ed isolatamente servì ad organicamente obliterarla in modo da permettere che le materie fecali riprendessero la loro via normale. E di recente ho potuto esaminare un altro intestino appartenente al cadavere di una donna operata sette anni prima di ernia intestinale cancrenata, in cui la soluzione di continuo di esso intestino che ne derivò, potè del pari in un modo ben degno di

(1) Pistocchi, Bollettino delle Scienze Mediche di Bologna. Serie 3, vol. 18, pag. 263. Collezione delle mie Memorie.

essere conosciuto non solo rimarginarsi isolatamente e senza l' aiuto di qualsiasi sutura, ma dare lumi altresì intorno la ammessa o constatata possibilità della rigenerazione della membrana mucosa.

Ora esporrò questa sì importante osservazione.

Belli Geltrude d' anni 50 lavandaia, nel Gennaio 1873 salendo una scala mentre portava su di una spalla un pesante fardello di biancherie sentì un forte dolore alla piegatura della coscia sinistra e portatavi la mano si accorse ivi essersi formata una piccola tumidezza. Ella per altro non se ne preoccupò vedendola sparire premendola o adagiandosi in posizione supina. Scorsi che furono otto giorni ossia il 23 dello stesso mese di Gennaio, esposta essendosi a nuove fatiche, la tumidezza si rese dolorosa e tale da obbligarla a coricarsi in letto. Poscia si destarono dolori addominali accompagnati da vomito e si aggiunse costipazione di ventre, a togliere la quale a nulla giovarono ripetuti purganti. Il dottore Medini, che in allora era mio Assistente nello Spedale Maggiore, essendo stato chiamato a visitarla, e cioè dopo due giorni dacchè questi fenomeni erano insorti, conobbe tosto trattarsi di un' ernia crurale intestinale strozzata e per questo fece trasportare subito l' inferma allo spedale ove fu posta nella mia Sezione. Poco dopo avendo io visitata l' inferma la trovai molto abbattuta, i suoi polsi erano celeri ed assai piccoli, la fisionomia era contrafatta, la temperatura della superficie del corpo molto bassa, continuava il vomito, il ventre era gonfio e dolente e vi si era raccolto del liquido. Alla base della coscia sinistra subito sotto il legamento del Paupart in corrispondenza al punto di escita dei vasi femorali appariva il tumore erniario che era duro dolente del volume di un piccolo ovo di gallina.

Fatta considerazione alla gravezza dei fenomeni morbosi ritenni indispensabile il ricorrere tosto alla chelotomia e la feci eseguire, essendo io presente, allo stesso mio Assistente.

Aperto che fu il sacco erniario lo trovammo nel suo interno privo affatto di sierosità, l' ansa strozzata apparteneva all' intestino tenue, era di colore livido e la membrana peritoneale che ne formava l' esterna parete si staccava in varii punti con facilità dalla sottoposta muscolare nerastra. Inciso l' anello strozzante potè allora escire buona copia di siero sanguigno commisto a fiocchi di fibrina che era raccolto entro la cavità peritoneale.

Anche in questo caso ad onta delle cattive condizioni in cui versava quell' intestino lo feci riporre nel ventre, giacchè, sebbene potesse dirsi che l' ansa intestinale strozzata era per lo meno in preda al primo stadio della cancrena e che di questa partecipasse non solo la membrana peritoneale specialmente in un' area avente un diametro di quasi due centimetri, ma ben anco la sottoposta musculare, tuttavia non potendo essere certi che anche la mucosa ne fosse invasa, era quindi a sperare, ridotto che fosse nel ventre l' ernioso intestino, d' evitare in esso il cancrenoso disfacimento.

Ma le nostre speranze rimasero deluse, giacchè giunti che fummo alla sesta giornata dall' operazione, cominciarono ad escire ed in copia delle feccie dall'aper-

tura erniaria, e fra le materie che giornalmente sottoponevansi ad esame, vedemmo un branello di tessuto intestinale necrotico della dimensione pressochè indicata. Nullameno però la obliterazione dell' apertura formatasi nell' intestino si ottenne, sebbene assai tardi, e cioè dopo 4 mesi, nel quale lasso di tempo si sviluppò una risipola ed ebbero luogo infiltrazioni marciose nel tessuto sottocutaneo adiacente alla parte operata per cui convenne praticare diverse esterne incisioni, acciocchè avesse libera escita il pus. Riacquistate avendo l' operata le forze e soda mostrandosi la cicatrice vi si sovrappose un conveniente cinto e così fu rinviata alla propria casa.

Continuò ella per non breve tempo in buona salute ed attese senza incomodo alle domestiche faccende, ma poscia non applicando a dovere il cinto riapparve l' ernia, la quale poi cominciò a farsi sporgente anche sotto di esso e finì per ingrandire enormemente. Rottosi il cinto, dopo averlo ella stessa accomodato, continuò a sovrapporlo all' ernia, che non rimaneva ridotta, mentre poi si escoriò ed esulcerò la cute e si riaprì la cicatrice. E per di più essendo stata la donna colta da bronchite, dopo violenti sforzi di tosse s' avvide che al di sotto del cinto facevano a nudo sporgenza degli intestini. Non si sgomentò ella per questo ed al momento li cuoprì con una lurida pezza bagnata nell' acqua. Insistendo gli sforzi di tosse altre anse intestinali protrusero. Ciò ebbe luogo il 22 marzo dell' andante anno (1879) nel qual giorno ridotta essendo in sì misero stato, richiese ed ottenne di essere immediatamente ricevuta nello Spedale Maggiore, e fu collocata nella Sezione di cui attualmente è Chirurgo Primario quello stesso valentissimo signor dottor Medini, al quale, come dissi, mentre fu mio Assistente, io l' avea sei anni prima fatta operare di chelotomia.

Visitata tosto dal suo egregio Assistente signor dottor Caramitti trovolla di aspetto macilento, angustiata da una tosse che la coglieva ad accessi della durata di circa mezzo minuto e che ripetevansi a pochi minuti d' intervallo l' uno dall' altro. In corrispondenza alla piegatura della coscia sinistra si osservava una grossa tumefazione dalla cui sovrapposta pelle ulcerata vedevansi esciti un 50 centimetri di tenue intestino col corrispondente mesenterio. L' intestino fuori escito offriva le proprie pareti in gran parte opache, rosee, tumide, qua e là leggermente sanguinanti. Sulle anse intestinali vi erano dei peli e dei branelli di fili staccatisi dalla pezza con cui le avea ricoperte.

Il dottor Caramitti dopo avere bene ripulite le parti, per meglio respingere le anse entro l' addome, fu costretto di allargare l' apertasi cicatrice dalla quale erano protruse, ed allora l' apertura erniaria, che si rinvenne ampiissima, permise di internarle nell' addome.

Ma i violenti e continui sforzi di tosse impedirono di poterle esattamente contenere ad onta dei migliori apparecchi di medicatura, applicati anche dal Primario Chirurgo dott. Medini, e perciò in parte rientrarono nell' ampio sacco erniario in cui antecedentemente aveano giaciuto senza fare però sporgenza dall' esterna cutanea apertura.

Lo stesso egregio dottor Medini poi figurandosi che a me pure potesse interes-

sare di conoscere ciò che era accaduto in questa inferma, ebbe il gentile pensiero di farmela visitare. Quando la vidi, e cioè cinque giorni dopo il suo ingresso nello Spedale, trovavasi in discreta calma, la riapertasi ed allargata cicatrice scorgevasi oblonga ed in direzione trasversale, la corrispondente tumidezza era della grossezza di quasi due pugni, ed al disotto della esterna apertura vedevasi un' ansa intestinale, le altre che riempivano il sacco erniario potevano con facilità respingersi entro l' addome mantenendosi libere, ma tornavano ben presto a rientrare nel sacco sotto i colpi di tosse, la donna aveva avute copiose evacuazioni alvine, il vomito era cessato, mentre nei giorni innanzi l' avea travagliata con una certa frequenza. Per tutto ciò non poteasi del tutto disperare di salvarla.

Ma nel giorno appresso ella fu presa da acuto dolore al costato destro, si resero molto più gravi i fenomeni di bronchite che da tempo la travagliavano, poi si svolse manifestamente una destra pleurite susseguita rapidamente da essudato siero fibrinoso. Peggiorando ognor più mancò di vita la sera del 30 maggio istesso (1).

Interessandomi grandemente venisse fatta l' autopsia del cadavere per conoscere in quali condizioni si trovava l' ansa intestinale, che, come già dissi, rinvenimmo in un tratto della sua parete cancrenata quando la Belli fu sottoposta alla chelotomia, ed in cui pel distacco completo dell' escara ebbe luogo la formazione di un ano preternaturale che poscia spontaneamente erasi obliterato, non si omise di fare quell' autopsia, e ciò ebbe luogo il giorno appresso alla morte dell' inferma istessa.

Così rinvenimmo una pleurite destra con essudato prevalentemente fibrinoso e catarro nei grossi bronchi. Nella cavità addominale poi si riscontrò poca quantità di umore giallo opaco e si trovarono nel peritoneo a destra chiazze di fibrina coagulata. Il tumore erniario misurava allora 15 centimetri in lunghezza, 9 centimetri in larghezza, 5 centimetri in profondità. Il diametro maggiore dell' apertura esistente nel sacco erniario e nella cute era di 5 centimetri. Osservate le intestina da questa

(1) Un caso singolare di escita d' enorme quantità d' intestino ernioso attraverso un' apertura formatasi nel sacco e nella sovrastante cute che terminò con esito felice venne narrato dal Tacconi. Una monaca di nobile stirpe d' anni 42, da 16 anni pativa d' ernia crurale sinistra che a poco a poco era venuta crescendo ed acquistando la figura di una testa di pecora. E come che andasse ella difesa da un cinto, pure, accorgendosi di certo movimento entro il tumore ernioso, quel cinto vieppiù e forse troppo stringea. Per le quali violenze divenuto invece il tumore più voluminoso, infra certo spazio i tegumenti di esso maggiormente infiammaronsi e ne trapelò un umore dapprima bianco, poscia del colore di vino inacquato, quando un giorno, sorgendo la vergine dalla mensa, sentì alla sinistra anguinaglia come uno scoppio ed allora si avvide che apertosi l' erniario tumore ne era escito e disceso giù fino al ginocchio l' intestino insieme col mesenterio e coll' omento. Chiamato certo Nosolini chirurgo, veggendo questi sommamente disteso e quasi strozzato l' intestino sbucato dal tumore, la preternaturale esterna apertura dilatò e tanto adoprò da riescire a poco a poco ad introdurre l' intestino fuori escito nel basso ventre, dopo di che legò circa la base la gran borsa formante il sacco. Soprachiamaronsi di poi il Tacconi ed il Galeazzi. Giudicossi necessario recidere la borsa, massime perchè in alcuni punti di essa cominciava a minacciare cancrena. Fece l' operazione il Tacconi. Dopo 40 giorni l' inferma ottenne la tanta desiata guarigione.

Tacconi de variis quibusdam herneis. Medici della vita e degli scritti degli anatomici e medici fioriti in Bologna dal cominciare del secolo 18.° fino al presente. Bologna 1853.

apertura apparivano di un colore nero verdastro, parecchie anse erano incollate al sacco erniario da fibrina di recente evasata. Aperto il sacco e distaccate queste giovani aderenze, che cedevano al più lieve tocco, e scoperto così l' ampîssimo anello attraverso il quale le anse intestinali facevano sporgenza, si potè confermare che col medesimo non aveano contratte aderenze di sorta alcuna. Misurata la porzione di intestino che rimaneva ancora protrusa si rinvenne della lunghezza di 68 centimetri. Ricercando attentamente l' ansa in cui sei anni innanzi si era effettuata la perforazione la si rinvenne *affatto libera,* e la si riconobbe pel trovarsi essa in un piccolo tratto della sua circonferenza un po' più angusta e perchè ivi si avvertì una porzione della sua parete alquanto più consistente, che si riconobbe poi essere la cicatrice superstite. Tanto nel peritoneo quanto in esso intestino non si riscontrò *qualsiasi traccia di pregressa aderenza.* Staccato che fu dalle vicine anse venne posto in un vaso contenente dell' alcool coll' intendimento di poterlo con agio esaminare.

E siccome era a mia cognizione che il mio illustre Collega prof. Giambattista Ercolani si era occupato con quella maestrìa che gli è propria dell' esame anatomico ed istologico di alcune altre cicatrici intestinali ed avea fatti particolari studi per indagare se era o no a sperarsi la rigenerazione della membrana mucosa, così non volendo fidarmi delle mie sole osservazioni, lo pregai di prendere in esame anche questo intestino, cui egli cortesemente accudì (1).

I risultati poi delle sue interessantissime indagini ebbe egli la cortesia di comunicarmi mediante la lettera che qui trascrivo.

« Bologna, 18 Ottobre 1879.

« Adempio ora, forse un poco troppo in ritardo, all' impegno che avevo assunto, di renderle conto delle ricerche microscopiche fatte sulle cicatrici intestinali, raccolte dal cadavere di una donna curata da Lei sette anni or sono di un' ernia crurale sinistra incarcerata, e le quali amò mandarmi perchè ne facessi l' esame.

« Io non so se le osservazioni e le deduzioni che si possono ricavare dalle indagini fatte, le sembreranno accettabili e se potranno in qualche parte chiarire il fatto clinico da Lei osservato, ma se a nulla gioveranno e le giudicherà troppo povera cosa, questo dovrà attribuirlo ad altro e non alla mancanza di buon volere per mia parte e di questo ne avrà la prova spero, dall' abusare come faccio della di Lei ben nota bontà, inviandole i disegni dei preparati fatti ed eseguiti con molta diligenza e bravura dal mio assistente il dott. G. P. Piana, e dilungandomi in cose che forse sono ben note e per questo soverchie.

(1) Importantissimi studi esperimentali istologici ed anatomo-patologici furono pure eseguiti dai professori Amabile e Virnicchi intorno ai processi di riparazione intestinale, che potranno con gran profitto essere conosciuti leggendo la loro classica opera « *Sulle soluzioni di continuo dell' intestino e sul loro governo* ». Napoli 1839.

« Mi permetta adunque che io cominci dall' esporre i nudi fatti anatomici che furono rilevati dall' esame delle cicatrici formatesi nell' intestino che m' inviò, e mi valga per questo delle figure nelle quali i detti fatti sono rappresentati come apparivano.

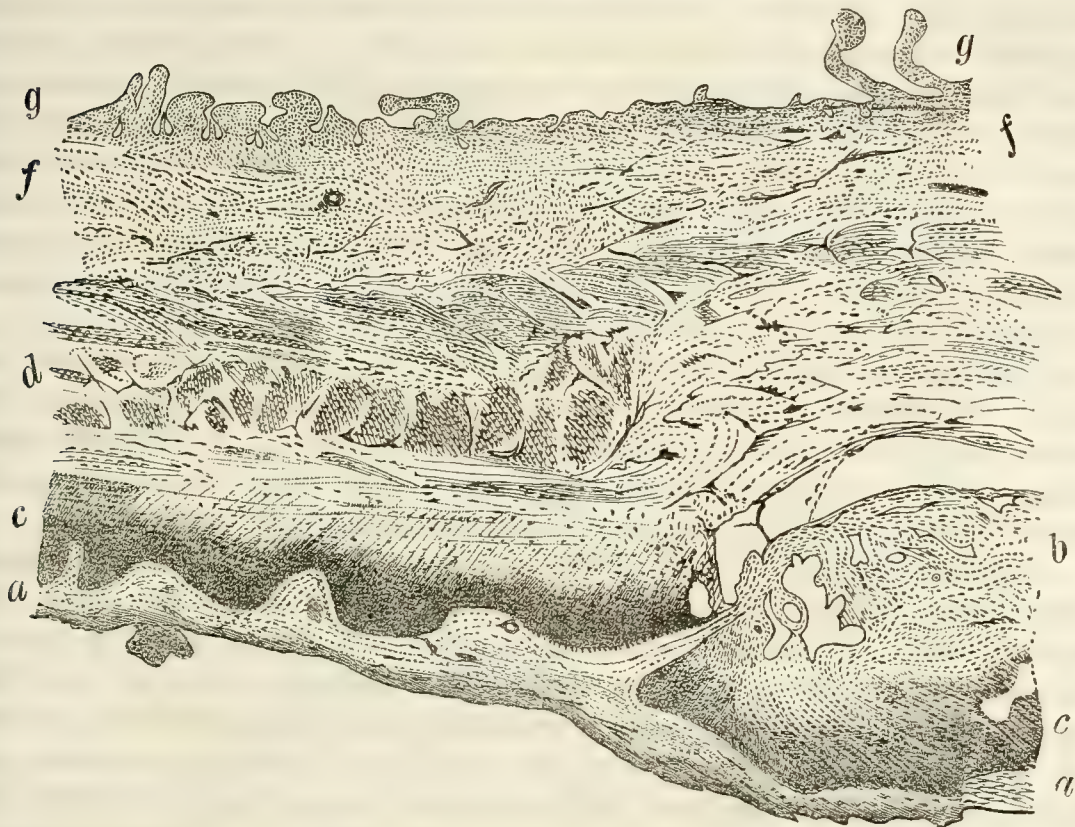
« La Fig. 1ª rappresenta ingrandita 30 diametri, una sezione trasversale di una

Figura 1ª

parte del detto intestino, in un punto ove per l' ingrossamento maggiore delle tonache intestinali, il luogo dell' antica cicatrice appariva più nettamente.

« La Fig. 2ª rappresenta allo stesso ingrandimento, una sezione longitudinale dello stesso intestino, in luogo alquanto discosto dal precedente e nel quale l' esistenza della cicatrice si poteva invece desumere, da un lieve assottigliamento delle tonache dell' intestino in parte circoscritto dal predetto ingrossamento e dal quale fu ricavata la Fig. 1ª.

« Colle stesse lettere indico le stesse parti dell' intestino nell' una e nell' altra figura e cioè colla
lett. *a.* la lamina peritoneale esterna.

Figura 2ª

lett. *b.* Tessuto connettivo della cicatrice con vasi piuttosto grossi.
lett. *c.* Strato di grossezza irregolare nei due preparati, composti nell' uno e nell' altro da elementi cellulari giovani, colorantisi intensamente col carmino e per la forma non distinguibili da elementi di tessuto connettivo giovane in via di formazione.
lett. *d.* Fasci della tonaca musculare dell' intestino nel luogo ove non avvenne alcuna lesione e si conservarono nello stato normale.
lett. *e.* Idem nel luogo ove si formò la cicatrice.
lett. *f.* Tessuto connettivo sotto-mucoso.
lett. *g.* Superficie interna della mucosa intestinale con villi.

« Confrontando fra di loro le due figure e fatta la dovuta avvertenza alla diversa direzione colla quale l' intestino fu tagliato, quello che richiama maggiormente l' attenzione di chi guarda, sono le differenze che si mostrano di subito nella tonaca musculare e specialmente nel luogo ove essa resta compresa fra il tessuto cicatrizio

esterno e la mucosa, abbondante cioè con inversione nell' andamento e nella distribuzione dei fasci musculari Fig. 1ª lett. *e* che sono invece scarsi e quasi mancanti nella regione corrispondente, nel taglio longitudinale dell' intestino lett. *e* Fig. 2ª.

« Fatto questo primo grossolano esame dei due preparati, sorgono subito e solo per questo delle domande, che per me non riuscirono di facile interpretazione. Come può essere, mi chiesi, che nel luogo dove si formò la cicatrice dell' intestino con perdita abbastanza estesa della sostanza tutta delle sue diverse tonache, esistano in un luogo non solo tutte le tonache, ma siano anche ingrossate, ed esista nel l' interno dell' intestino la mucosa completa co' suoi villi, ed anche la tonaca musculare, i di cui elementi perdutisi colla perdita di sostanza, non avrebbero dovuto riprodursi come non avrebbe dovuto riprodursi una mucosa così completa. Come e perchè in tanta copia e abnormemente disposti, si sarebbero riprodotti in un luogo gli elementi musculari Fig. 1ª lett. *e* mentre poco lungi Fig. 2ª lett. *e* non si sarebbero riprodotti come realmente si afferma non avvenire?

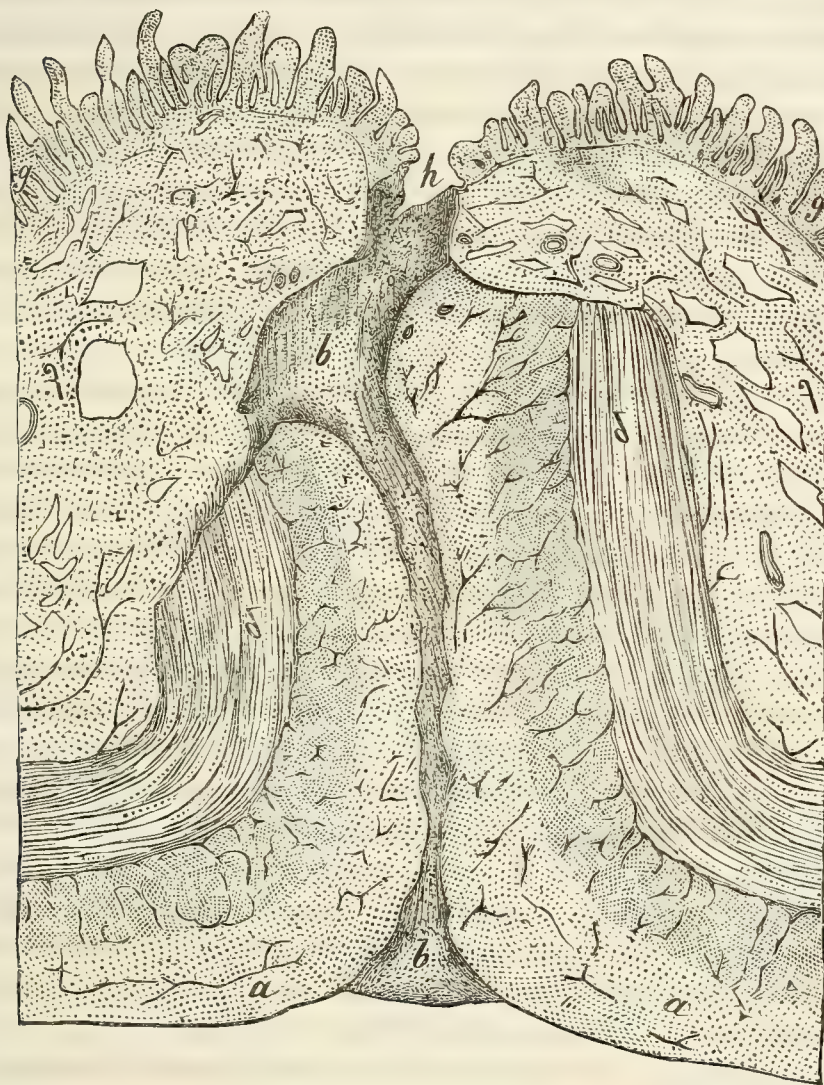
« Non trovando nella mia pochezza argomenti, che mi dassero ragione, non dico chiara e convincente, ma sufficiente per intenderli ed appagarmi, pensai che un qualche aiuto avrei potuto trovarlo, esaminando un fatto se non identico molto analogo per vero, che avevo raccolto nel 1877 e che avevo deposto nel nostro Museo d' Anatomia Patologica Comparata sotto il N. 3075 di Catalogo.

« Negli esercizi chirurgici per l' istruzione dei giovani, fatti dal mio Egregio Collega il Prof. Alfredo Gotti, fu praticata ad arte in un cavallo una ferita intestinale. Praticata l' enterorafia colle migliori regole dell' arte, cercando di porre e mantenere con una cucitura, a contatto la peritoneale circostante ai bordi dell' intestino ferito, si tenne l' animale in cura per studiarne le successioni morbose. Dopo 15 giorni da che l' esperimento era stato fatto, l' animale non dando più alcun segno di disturbi intestinali, ed eseguendosi regolarmente le funzioni dell' intestino, si ritenne come avvenuta la sua cicatrizzazione e l' animale fu ucciso per le ulteriori ricerche, sul modo col quale cioè la cicatrice dell' intestino ferito si era effettuata.

« Anche per queste fatte osservazioni, mi permetto di mandarle una terza figura che rappresenta allo stesso ingrandimento i fatti anatomici come furono rilevati. Anche questo disegno fu eseguito dal Dott. G. P. Piana.

« Questa terza figura rappresenta una sezione trasversale dell' intestino del detto cavallo nel luogo ove si effettuò la cicatrizzazione e corrisponde per questo al modo col quale fu tagliata la cicatrice dell' intestino della donna rappresentata nella Fig. 1ª. Le lettere di questa Fig. 3ª indicano le stesse parti rappresentate nella Fig. 1ª e 2ª si corrispondono pienamente: e se io non m' inganno, e lascio a Lei il giudicare, ad onta che la forma e la qualità della lesione fosse grandemente diversa nell' uno e nell' altro caso, ferita semplice cioè e lineare nel cavallo, mentre nella donna ebbe luogo per la gangrena la perdita completa di una porzione di tutte le tonache intestinali per uno spazio di forma tondeggiante e avente il diametro di circa due

centimetri e ad onta ancora che il processo mercè del quale si effettuò la cicatrizzazione fosse grandemente diverso, aiutato dall' arte nel cavallo e compiutosi senza aiuto dalla

Figura 3ª

natura nella donna, ad onta di tutto questo dicevo, parmi che dal modo più semplice col quale si compì la cicatrizzazione della ferita semplice dell' intestino del cavallo, si possa arguire ed indurre il processo assai più complicato mercè del quale, per la qualità più grave della lesione, si potè pure compiere la cicatrizzazione spontanea nell' intestino della donna. Parmi in breve che dalla figura riportata appartenente al cavallo si osservino in modo più semplice avvenuti col-

l' aiuto dell' arte quegli stessi fatti, che in modo più complicato ma di identica natura si osservano nella Fig. 1ª nell' intestino della donna e diano per così dire la chiave per potere arguire con molta probabilità, il processo mercè del quale naturalmente si cicatrizzò l' ulcera intestinale della donna, giudicando così i fatti che rimasero, per me almeno, di difficile interpretazione.

« È per vero quando si ponga mente al fatto della abnorme disposizione nella direzione dei fasci musculari, che primo colpisce l' animo di chi guarda alla Fig. 1ª lett. *e* ne trova subito la ragione portando l' esame sulla stessa tonaca nel preparato dell' intestino di cavallo, Fig. 3ª lett. *d*. Anche in questo la direzione nei detti fasci formanti la tonaca musculare nel luogo ove si formò la cicatrice è mutata, non formando più un anello paralello interposto fra la mucosa e la peritoneale, poichè le estremità dell' anello, nel luogo ove cadde la ferita, sono portate in alto contro la mucosa, perchè fra le due estremità si sono interposte le pareti esterne dell' intestino che furono messe in contatto e che si riunirono fra di loro a mezzo del nuovo tessuto cicatrizio, Fig. 3ª lett. *b*.

« In questo caso, e per la qualità della ferita e per la specie del processo che fu adoperato per ottenere la cicatrizzazione i fatti che si osservano nella mutata disposizione ed andamento dei fasci della tonaca musculare riescono di facilissimo intendimento, giacchè i fatti che si osservano, non si potevano stabilire altrimenti.

« Noto ora di volo, giacchè avrò occasione di ricordarlo più avanti, che sulla superficie interna dell' intestino del cavallo e precisamente nel luogo che corrisponde al tessuto cicatrizio, lett. *h*, di nuova formazione, esiste già dopo soli 15 giorni da che fu tagliato l' intestino, uno strato epiteliale cilindrico che si continua con quello che riveste la mucosa intestinale che gli è vicina e che non restò in alcun modo offesa.

« Ora quale è il rapporto che può esistere fra i fatti che si rilevano da questo preparato, confrontati con quelli che sono rappresentati nella Fig. 1ª e come le cose osservate nell' intestino del cavallo possono giovare per ricostituire il processo cicatrizio come avvenne nell' intestino della donna ? Sarò molto breve.

« Che l' intestino della donna avesse perduto completamente della sostanza delle proprie tonache per un diametro circa di due centimetri non può porsi in dubbio, perchè l' estensione e la qualità della lesione potè essere veduta cogli occhi e toccata colla di Lei mano sette anni or sono e poscia, quando avvenne la morte fu pure riconosciuto che la cicatrizzazione era avvenuta dirò così *in loco* e senza aiuto di aderenze contratte colle parti vicine. L' esame anatomico dimostra che il processo riparatore non si era limitato ad una semplice neoformazione di tessuto connettivo, trasformatosi poscia in una semplice lamina fibrosa occludente la pregressa apertura intestinale, come si vide in un altro caso di cui ebbe la bontà di farmi vedere il preparato. Nel caso attuale, sia la forma dell' intestino, sia la qualità della lesione che fu prima riscontrata, non permettono di credere, che i bordi dell' ulcerazione potessero portarsi fra di loro a semplice contatto e si stabilisse in questo

modo un irregolare bensì, ma reale rapporto diretto di continuità, fra i bordi della porzione dell' intestino mancante. Che cosa resta adunque per intendere come il fatto avvenne, se intorno ai precedenti non può essere mosso alcun dubbio? A me pare che non ve ne sia che uno soltanto, il ripiegamento e rovesciamento cioè delle tonache dell' intestino ai bordi del luogo ulcerato, determinato dalla contrazione dei fasci longitudinali e circolari della musculare, e dall' esterno all' interno a modo da formare come una specie di imbuto o turacciolo occludente l' apertura intestinale, per questo rovesciamento la tonaca peritoneale dei bordi si trovò a contatto nel centro dell' imbuto e la cicatrice si formò con qualche facilità. Se così fu, egli è a questo rovesciamento dei bordi all' interno che si deve la posizione abnorme e mutata della direzione nei fasci musculari nel luogo ove si formò la cicatrice come i preparati dimostrano, Tav. 1ª lett. *e*, ed è a questo stesso fatto dovuto l' ingrossamento di tutta la parete intestinale che si rileva in questo stesso preparato, dopo che erano trascorsi sette anni il che attesta, a parer mio, la formazione di quel turacciolo interno che favorì l' occlusione dell' ulcera e che si andò poi mano mano perdendo per l' azione meccanica distendente operata dal diuturno passaggio delle materie fecali. Dato che questo fosse il processo seguito dalla natura per la cicatrizzazione dell' ulcera intestinale in discorso, si comprende pure come la superficie interna dell' intestino si osservi ancora tutta ricoperta da una membrana mucosa completa e perfetta e coi suoi villi anche nel luogo ove si formò la cicatrice. E come non è a credersi che una mucosa così completa e perfetta fosse di nuova formazione, così si potrebbe da alcuno osservare, la riproduzione delle mucose essendo negata, che ad ogni modo nel fatto osservato, manca nella mucosa la traccia della cicatrice che pure vi si dovrebbe osservare. Per risolvere codesta obbiezione parmi che grandemente giovi l' osservazione fatta sulla cicatrice intestinale del cavallo, sulla esistenza cioè, di un epitelio cilindrico sul tessuto connettivo cicatrizio già avvenuta dopo soli 15 giorni da che l' enterorafia era stata praticata, Fig. 3ª lett. *h*. Per questa osservazione si ha piena ragione, come nel caso nostro ogni traccia di cicatrice sulla mucosa andasse interamente perduta.

« Un fatto rimane ad intendersi ed è lo scarso numero dei fasci della tonaca musculare che ho fatto rilevare nella sezione longitudinale della cicatrice intestinale della donna, Fig. 2ª lett. *e*, fatta in luogo alquanto discosto da quello dal quale fu tolto il preparato che servì per la Fig. 1ª.

« Notai già che in questo luogo le tonache intestinali apparivano più sottili e guardando al preparato si scorge, che quello strato singolare di cellule che conservano ancora i caratteri del tessuto connettivo giovane in via di formazione, è in corrispondenza di questo luogo della cicatrice molto grosso, Fig. 2ª lett. *c*. Può chiedersi come mai, dopo avere durato a vivere per sette anni, questi elementi conservano ancora i caratteri di elementi cellulari nel loro primo periodo formativo, ma a questo credo inutile cercare una risposta che non saprei trovare, quando l' osservazione attesta che il fatto esiste ancora. La delicatezza e l' incompleto svi-

luppo di questo tessuto dovettero necessariamente favorire in questo luogo la maggiore distensione parziale cagionata dal trapasso delle materie fecali e parmi che a questa distensione si debba attribuire come necessaria conseguenza, l' allontanamento dei fasci musculari fra di loro e l' apparenza che hanno di essere come smagliati e molto radi e scarsi. Altre ragioni potrebbero pure avere contribuito alla produzione di questo fatto come l' alterazione e distruzione in alcuni punti degli elementi musculari, ma non credo di dovere insistere su questo.

« Non mi nascondo però che Ella potrà dirmi che tutto questo processo che ho indicato come avvenuto, potrà essere vero, ma che non per questo cessa di essere una semplice induzione per la quale mancano le prove di una qualsiasi dimostrazione ed io non posso negarlo; solo dirò che nel caso come mi fu presentato la sola induzione è possibile. Vedrà Ella nella sua saviezza se i giudizi che io ricavai dai fatti anatomici come furono osservati, siano o no, o solo in qualche parte accettabili. A me preme di mostrarle che credetti e credo di essere stato almeno assai vicino alla verità, che altrimenti non lo avrei disturbato con questa lettera troppo lunga e vinco per questo la ritrosia che provo ad abusare realmente della di Lei bontà, accennandole un altro fatto osservato e che a me pare abbia un non lieve valore per dimostrare in modo chiaro ed indubbio, che il processo da me indicato come seguìto dalla natura per cicatrizzare l' ulcera intestinale nella donna, è pure realmente seguito dalla natura, o può da essa essere seguìto anche in casi più gravi e complessi di lesioni intestinali.

« Per la grossezza che hanno le tonache dell' intestino nel cane, avviene che nelle ferite di quello, la tonaca musculare e la mucosa si rovesciano all' esterno formando un grosso labbro al di fuori dei bordi dell' intestino ferito. Lo stesso fatto avviene, quando l' intestino nel detto animale è completamente reciso per traverso, nel quale caso la muscolare coperta dalla mucosa forma come un cercine attorno al bordo dell' intestino reciso. Gli Assistenti della scuola dott.[i] Piana e Bosi vollero tentare un metodo di enterorafia già adoperato dal prof. L. Vella per alcuni suoi esperimenti, ma da essi adoperato al solo fine di vedere se a mezzo del detto metodo si poteva ristabilire la continuazione del canale intestinale asportandone un' ansa più o meno lunga. Il metodo è molto semplice: asportata una porzione di intestino, si abrade la mucosa rovesciata sui bordi dell' intestino che si vogliono riunire, e si pongono e si mantengono a contatto le superficie abrase mercè di una cucitura a cavalletto. Sulla superficie esterna dell' intestino, nel luogo ove si praticò la cucitura, rimane così un cercine, che vale nel maggior numero dei casi a ristabilire la continuità del tubo intestinale, e questo buon risultato ottenuto dal prof. Vella, ottennero pure i sullodati dottori Piana e Bosi in meno di 15 giorni. Schematicamente rappresento nella Fig. 4ª una porzione di intestino così operato e la posizione nella quale furono lasciate le tonache dell' intestino e come esse si trovano quando questo si rimette nella cavità addominale dopo praticata l' enterorafia col metodo indicato. Nella Fig. 5ª schematicamente pure rappresento la posizione che acquistarono le

dette tonache dopo che la cicatrizzazione si fu stabilita. L' uno e l' altro schema indicano una sezione longitudinale dell' intestino e le lettere si corrispondono.

le lettere *a* segnano la cavità dell' intestino ai bordi ove esso venne reciso.

lett. *b* la tonaca peritoneale Idem.

lett. *c* la tonaca musculare Idem.

lett. *d* la mucosa Idem.

lett. *s* luogo ove l' intestino fu reciso.

« Nella Fig. 4ª la lett. *m* indica il cercine esterno dell' intestino, formato dalla peritoneale e dalla musculare, e il luogo dove fu abrasa la mucosa e completamente rovesciato e mantenuto all' esterno dai punti di cucitura.

Figura 4ª

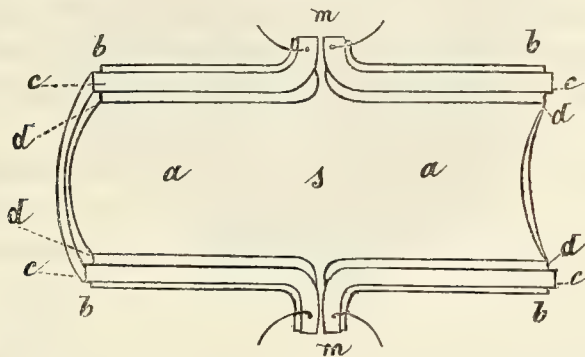
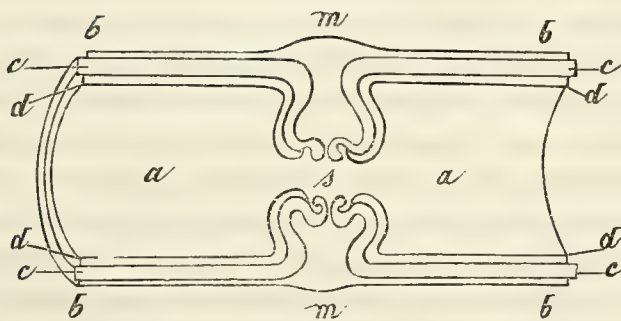



Figura 5ª

« Colla Fig. 5ª ho indicato i fatti che si osservarono dopo che la cicatrizzazione ebbe luogo, il cercine prominente all' esterno è scomparso ed in posto di questo si osserva un tessuto cicatrizio che si continua colla peritoneale esterna lett. *m*, la mucosa e la musculare rovesciatesi all' interno hanno invertito la posizione del cercine stesso come si vede nella precedente figura che da esterno cioè è diventato in questa interno, e l' inversione è stata così notevole, che i punti della sutura ed

il refe col quale essa fu fatta in più luoghi si scorge sul bordo del cercine interno che determinava una non lieve stenosi intestinale, della quale però, pel modo col quale si eseguivano le funzioni nel tempo in cui fu tenuto in vita l' animale, non si ebbe ragione di sospettarne l' esistenza.

« Nessun dubbio adunque che in questo caso avvenne un completo rovesciamento dell' intero bordo dell' intestino reciso, ed anche in condizioni peggiori di quelle che dovettero occorrere nell' intestino della donna, giacchè la cucitura a cavaletto dei bordi dell' intestino rovesciato, senza alcun dubbio costituisce un ostacolo meccanico per lo stabilirsi del rovesciamento all' interno, per cui anche in queste condizioni specialissime, l' unione dell' intestino reciso con asportazione di una porzione di mucosa intestinale si effettuò pel contatto della peritoneale, precisamente come si effettuò nel caso che ho tolto dal cavallo e che ho creduto avvenisse nella donna.

« Io non mi estendo a quelle considerazioni che potrebbero sorgere dalle osservazioni dei fatti che ho esposto, forse non del tutto inutili per l' umana chirurgia, e mi starò assai lieto se Ella crederà che io non l' abbia importunato così a lungo inutilmente.

« Coi sensi del più alto ossequio ho l' onore di sottoscrivermi

« *Firmato* -- Giambattista Ercolani ».

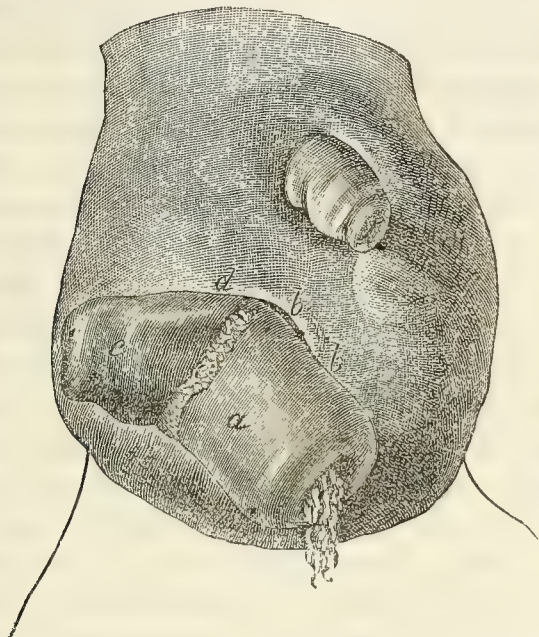
Per mala ventura però i poteri fisio-patologici che come abbiamo notato osservammo riescire mirabilmente in varie circostanze a produrre la guarigione dell' ano preternaturale accidentale, in alcune altre in causa di praticolari disposizioni anatomiche assunte dalle parti protruse si rendono invece a tale uopo del tutto impotenti.

Ne ebbi di ciò un bello esempio in un bambino lattante di pochi mesi nato con un' ernia inguinale destra, la quale non essendo stata conosciuta, fu abbandonata a sè stessa, e perciò si fece assai voluminosa e scrotale. Rimasta di poi l' ernia presa da strozzamento, non essendo state neppure allora apprestate le dovute e comuni cure al bambino, che le tante volte ed in particolare modo negl' individui di tenera età, come io pure ho in essi osservato, da sole si rendono sufficienti a produrre il rientramento dell' ernia, si formò per questo un' estesa escara al fondo dello scroto, che staccatasi in un colla sottoposta ampia porzione di sacco erniario trasse seco pure un tratto lungo di ansa intestinale del pari sfacelata, lasciando così a nudo e pendente fuori della piaga le due estremità dei superstiti monconi intestinali.

Anche dopo ciò niuna particolare cura si prodigò a quel misero bambino, e del tutto limitossi a tenerlo alla meglio pulito, e non fu se non se quando trovossi ridotto in sì tristi condizioni da non potersi più avere lusinga di salvarlo che mi venne presentato.

In allora lo scroto di esso bambino scorgevasi in modo assai notevole rigonfio

dal lato destro, fig. 6ª, anteriormente in basso vedevasi un' apertura ovoide il cui diametro maggiore e trasversale era di centimetri 3 e 5 millimetri, il minore verticale di centim. 2. Sporgevano attraverso quest' apertura i due denudati monconi intestinali

Figura 6ª

appartenenti all' ileo, il primo dei quali e cioè il gastrico *a* mostrava la sua superficie esterna o sierosa di un colore rosso fosco e sporgeva per oltre due centimetri dall' apertura scrotale colla quale allo indietro avea una parte della sua circonferenza presa forte aderenza, *b*, *b*. Questo moncone pendeva in basso, era rivolto a sinistra, ed in causa di ciò le materie che venivano dall' alto escivano dalla sua bocca in quella medesima direzione. Essa bocca poi era del diametro di due centimetri. Il secondo moncone avea all' esterno lo stesso colore del primo, era orizzontale e colla sua bocca vedeasi rivolto a destra, *c*. Sporgeva esso pure dall' apertura scrotale per quasi due centimetri colla quale del pari all' indietro aderiva, *d*, era meno grosso del primo moncone, col suo sbocco più angusto, dell' ampiezza cioè di un centimetro. I due monconi poi, come dissi, rivolti in senso opposto all' infuori, aveano la rispettiva bocca distante l' una dall' altra quattro centimetri.

Mentre i due capi intestinali sporgenti dall' apertura scrotale mantenevansi stabilmente disgiunti e per le contratte aderenze rimanevano permanentemente rivolti all' infuori, in corrispondenza all' apertura dello scroto, essi due capi colla loro faccia interna mantenevansi pressocchè a contatto non avendo frammezzo che una porzioncella di mesenterio, *e*. In causa di ciò sebbene lo sperone, che in questa guisa erasi formato, cominciasse molto più indietro dello sbocco degli intestinali monconi, prolungavasi però di tanto in alto da giungere fino all' ingresso del sacco erniario,

e così anche per questo sarebbe riescito impossibile il libero passaggio delle materie fecciose dal capo gastrico nell' anale, purchè non si fosse ricorso al distacco degli aderenti monconi, e cercato in pari tempo di ottenere la scambievole riunione delle loro bocche. E ciò forse si sarebbe potuto effettuare se il bambino non si fosse già in così deplorevoli condizioni ridotto da non potere resistere ai pericoli di simile operazione.

Ed è poi maggiormente a dolersi che in questo bambino non venisse eseguita in tempo debito la chelotomia, colla quale operazione poteasi sperare non solo di liberarlo dai pericoli che lo minacciavano in causa dello strozzamento erniario da cui trovavasi affetto, ma potevasi avere fiducia ben anco, trattandosi specialmente d' un bambino, d' ottenere colla operazione stessa la guarigione radicale dell' ernia.

Ed anche quando l' ulcerato o troncato ernioso intestino non è già in guisa alcuna sporgente, ma si è più o meno nascosto entro la cavità dell' addome tanto il collo del sacco erniario quanto il sacco stesso talvolta non ponno prestarsi alla formazione del desiderato infondibolo. E di vero fra l' aperto intestino ed il collo del sacco rimanendo talvolta uno spazio entro cui ponno versarsi, raccogliersi ed internarsi materie fecciose, per la irritazione dalle medesime indotta nelle parti attigue, si origina una membranosa suppurante cavità che le accoglie, ed attraverso la quale si scaricano in parte al di fuori dell' addominale apertura, e per ciò stesso rimane impedito al collo ed al sacco erniario di subire quei cambiamenti che li rendono capaci di acconciarsi nella guisa che è indispensabile, acciocchè si formi quell' infondibolo che può valere a ristabilire la continuità del canale, motivo per cui volendo pure tentare la guarigione di simili infermi conviene da prima togliere una sì rilevante complicazione, e cercare quindi nel miglior modo possibile che la intermedia cavità del tutto sparisca.

Io ne ho veduti parecchi di questi esempi, uno di recente ne osservò e lo curò con buon esito il Prof. Costanzo Mazzoni Clinico Chirurgico in Roma, ed un altro molto importante venne non ha guari curato nella Clinica Chirurgica di Napoli diretta dal Prof. Gallozzi, in cui si ebbe ricorso ad un processo operatorio speciale che torna acconcio qui ricordare.

In un giovane di 20 anni robusto avente un' ernia congenita inguinale destra con monorchia, rimase essa ernia presa da strozzamento per cui si dovette ricorrere alla chelotomia. Dopo l' operazione l' infermo si trovò bene, e per alcuni giorni defecò normalmente. Ma nel mattino del sesto giorno mentre il chirurgo lo medicava scaturì un poco di materia stercoracea liquida. Trascorsi i primi dodici giorni poca materia esciva dalla ferita od un liquido purulento misto a bolle di gas. Rimase un seno fistoloso al quale di poi si aggiunsero altre due aperture. Trascorsi i primi due anni riprese vigore, ma le frequenti irritazioni della pelle delle pareti addominali e lo schifo che produceano in lui stesso quelle preternaturali aperture lo indussero ad entrare nella Clinica Chirurgica di Napoli ove fu accolto nel Novembre del 1878.

Esaminato che fu dal Gallozzi rinvenne egli nella regione inguinale destra una o due dita trasverse al disopra del legamento del Paupart ed a livello dell' unione del suo terzo medio col terzo interno un' aia di cute arrossata, nella quale scorgevansi tre piccoli mamelloni fungosi nel cui centro si notavano altrettante aperture fistolose, dalle quali veniva talvolta emessa un po' di marcia spumosa e del materiale stercoraceo, il quale però esciva per lo più 4 o 5 ore dopo il pasto. Colla palpazione si notava che in corrispondenza dell' aia indicata i tessuti erano sclerosati. La pelle non era più scorrevole sugli strati sottostanti e questi formavano una massa dura che comprendea tutta la spessezza della parete addominale. Collo specillo si rinvenivano tre seni fistolosi comunicanti fra loro, i quali attraverso la parete addominale mettevano foce tutti e tre in una stessa cavità al di là della parete addominale L' infermo defecava bene per l' ano e regolarmente digeriva. Nella borsa destra dello scroto non si trovava alcuna traccia di testicolo o di funicolo spermatico che non erano giammai discesi nello scroto.

In questo caso conveniva spaccare i seni fistolosi in modo da dominare l' interna cavità suppurante, medicarla in guisa da ravvivarne il fondo e permettere d' usare di poi una compressione che si rendesse acconcia ad impedire il passaggio del materiale fecale. I seni fistolosi vennero per questo aperti colle legature elastiche, e posti in pratica gli altri precetti suaccennati le aperture fistolose e l' interna cavità suppurante si chiusero rapidamente (1).

Queste cavità suppuranti e stercoracee intermedie che si trovano fra l' apertura intestinale e quella della parete addominale non solo ponno formarsi in seguito di ernie ulcerate e cancrenate, ma, come già feci notare, derivare ponno altresì non di rado da ulcerazione primitivamente formatasi in qualche intestino collocato più o meno profondamente entro l' addome, ulcerazione la quale si effettua talvolta in modo da potersi agevolmente diagnosticare anche prima che si esulceri la parete addominale, ma tal fiata invece si ordisce e procede in una maniera assai latente.

Avvenuta che sia l' ulcerazione intestinale alcune porzioncelle di materie fecciose riescono di frequente a sfuggire dalla formatasi apertura ed a penetrare in qualche spazio o spiraglio lasciato da una o più anse d' intestini. Se le materie non trovano facilità ad espandersi ma restano circoscritte, in allora rimanendone irritata la membrana sierosa che riveste le adiacenti anse intestinali, si origina così una membrana piogenica che attornia ed isola le materie e per tal modo formasi un ascesso stercoraceo purulento che trovandosi in comunicazione colla ulcerazione intestinale va quindi ampliandosi man mano vi si versano nuove feccie e marcie, e così esso ascesso allontanando vieppiù le anse adiacenti ed accostandosi maggiormente alla parete addominale finisce spesso per procurarne l' apertura e concedere per questa via l' escita al pus ed alle feccie nell' ascesso raccolte. Varii casi di simili cavità

(1) Gallozzi. Rendiconto Clinico. Il Morgagni, Marzo 1879, pag. 212.

intermedie formatesi in seguito di primitiva intestinale ulcerazione ebbi ad osservare, ma qui ricorderò soltanto i più gravi.

In un uomo ebbe luogo l' indicata ulcerazione nel colon ascendente in seguito di violenta colite e così formossi un vasto ascesso purulento stercoraceo intra-addominale che si aprì nella regione epicolica destra ove si costituì un ano preternaturale. La grande copia di materie fecali e di pus che si raccoglievano in quella vasta cavità non trovando libera escita nell' esterna apertura addominale impediva alla cavità stessa di restringersi e di obliterarsi, e conveniva quindi pensare a dare di qualche guisa libero sfogo a quelle materie. Con diligenti esplorazioni eseguite mediante lungo specillo avendo potuto conoscere che col medesimo si giungeva fino alla regione lombare del lato destro e che così indietro spingevasi da poterne sentire col dito la punta contro la parete di quella regione, deliberai di aprire ivi una via che meglio valesse a rendere facile l' escita degli umori e delle feccie nel ventre raccolte ed a procurare così la guarigione.

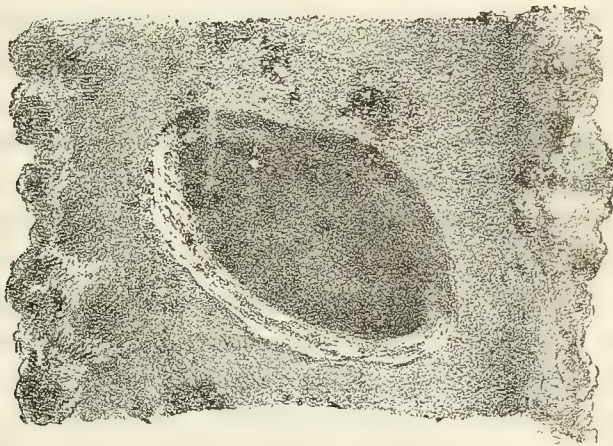
Questa incisione della lunghezza di oltre tre centimetri venne fatta colle dovute cautele immediatamente al di sopra della cresta dell' ileo in direzione trasversale ed a poca distanza dell' apofisi trasversa della corrispondente vertebra lombare, e per tal modo poterono sgorgare liberamente al di fuori dell' addome le copiose materie raccolte in quella vasta cavità. Dopo ciò andò questa man mano rimpiccolendo e finì per isparire e così si ottenne la obliterazione dell' apertura intestinale non che quella formatasi spontaneamente nell' anteriore parete addominale. L' ultima a chiudersi fu l' incisione da me praticata nella regione lombare del lato destro, e dopo ciò il malato si rimise in piena salute (1).

Nell' anno 1844 essendosi in una Signora violentemente infiammata la cistifellea in causa d' impedito passaggio della bile nel colledoco per grosso calcolo nel medesimo arrestatosi, e diffusa essendosi la flogosi al vicino colon trasverso ebbe luogo l' ulcerazione di questo e della cistifellea istessa, in seguito di che, come ho già più addietro fatto notare, la bile e le materie fecali versaronsi in copia strabocchevole nella cavità dell' addome dando luogo ad un vastissimo ascesso ripieno di feccie di bile e di pus. Si dovette ampiamente incidere il ventre nell' ipocondrio destro per dare libera escita a tanta copia di materie e di umori nel qual modo quella vasta cavità si andò di poi a poco a poco rimpiccolendo, per cui dopo 40 giorni dall' eseguita operazione il vastissimo ascesso era scomparso, e la ferita fatta all' addome erasi quasi del tutto cicatrizzata non rimanendo che un piccolissimo pertugio dal quale stillavano poche goccie di bile.

Trascorsi che furono alcuni mesi dalla ottenuta guarigione, la Signora essendo morta di apoplesia, fatta avendo la sezione del cadavere osservai che il condotto colledoco enormemente disteso conteneva un calcolo biliare assai grosso, rinvenni in modo notevole allargato il condotto epatico, e notai che alla sommità della cisti-

(1) Novi Commentarii Instituti Bononiensis 1846. Collezione delle mie Memorie Chirurgiche, Vol. 2.

fellea e verso la sua parete anteriore esisteva un piccolo pertugio il quale metteva foce in un fistoloso canale assai ristretto che andava a sboccare nella parete addominale ove era rimasto superstite il pertugio da cui dissi stillare di tratto in tratto alcun poco di bile. Esaminati che ebbi gli intestini osservai che quella porzione di colon trasverso che fiancheggiava la cistifellea mostrava un' apertura elittica il cui diametro maggiore era lungo più di due centimetri, essa apertura poi era perfettamente chiusa da un tessuto connettivo neoformatosi del tutto isolato dalle altre adiacenti parti e sorto ed originato dai bordi della stessa intestinale apertura, figura 7ª. Questo esteso tessuto di nuova formazione, assunse i caratteri di

Figura 7ª

una semplice lamina fibrosa, la quale si mantenne del tutto isolata dalle adiacenti parti in modo veramente ammirevole, e contribuì ad impedire in quel tratto una intestinale stenosi, che avrebbe cagionate conseguenze assai gravi, se in sua vece i bordi di essa vasta apertura si fossero accostati in modo da originare soltanto una lineare cicatrice (1). Il vasto cavo che avea contenuto bile, feccie ed umori del resto era appieno scomparso (2).

E da ultimo in un giovinetto di 17 anni essendosi ulcerato primitivamente il retto intestino ed in causa di ciò penetrando nelle sue adiacenze materie fecali, per la presenza delle medesime si ordì del pari una cavità suppurante la quale aumentò in guisa per lo accumularvisi delle feccie e delle marcie da giungere ad aprirsi una via attraverso la parete addominale al di sopra dell' ombellico. In questo giovinetto si rese indispensabile di incidere ampiamente ed in due riprese nella direzione della linea alba l' addome dall' apertura addominale sopra ombellicale cioè

(1) Opere citate. Relazione di alcuni casi di interruzione di continuità avvenute in qualche tratto del canale intestinale.

(2) I pezzi patologici si conservano nel Museo di Anatomia Patologica di questa R. Università.

fino verso il pube per dar esito non solo alle materie accumulate entro l' addome ma per giungere altresì a scuoprire e dominare l' ulcerazione del retto intestino in modo da riescire a cauterizzarla e così procurarne la chiusura.

In cotale guisa regolandomi la vasta cavità nella quale raccoglievansi le feccie e le marcie e l' ampia ferita addominale che derivò dalla eseguita laparotomia si andarono grado grado rimpiccolendo e restringendo in modo da convertirsi in un angusto canaletto fistoloso, mediante il quale restavano in diretta comunicazione il superstite piccolissimo pertugio intestinale coll' altro pure piccolissimo rimasto nella addominale parete al di sopra del pube, e così veniva impedito qualunque ristagno di feccie e di pus nell' interno dell' addome mentre poi soltanto sotto violenti sforzi di defecazione sfuggivano da quella esilissima fistoletta minime goccie di feccioso pus (1).

Noterò pure che anche il Langenbeck ebbe in cura un ragazzo di 14 anni nel quale in seguito di enterite ulcerativa eransi formate tre fistole sboccanti nella regione ombellicale e tramandanti materiali fecciosi in abbondanza. Anche in questo caso convenientemente esplorate le fistole si potè conoscere che le medesime comunicavano con una cavità ampia formatasi nella parete addominale, dalla quale cavità poi sorgeva un canale piuttosto lungo che dirigevasi in alto ed a destra. La discontinuità intestinale essendo anche qui molto profonda, per poterla dominare, il Langenbeck pose in comunicazione le tre esterne aperture fistolose, e così avendo acquistato spazio rese cruento col bistorino tutta l' interna superficie della formatasi cavità stercoracea purulenta, quindi dopo aver disinfettata tutta la superficie resa cruenta cercò di ottenerne l' accollamento mediante sutura incavigliata e staccata e colla compressione. La sutura per altro non fu sufficiente per impedire il nuovo passaggio delle feccie dall' intestino ulcerato attraverso l' esterna ferita, e l' operato dovette soccombere. Fattane l' autopsia si trovarono tre fistole intestinali, una nell' ileo davanti alla valvola cecale le altre due nel cieco (2).

Talvolta però queste cavità più o meno vaste stercoraceo-purulente intra-addominali comunicanti coll' intestino e in pari tempo sboccanti all' esterno dell' addome piuttosto che derivare da un' apertura formatasi primitivamente nell' intestino stesso e dal successivo versarsi in copia diversa le materie nel medesimo contenute entro l' addome, ponno invece esse cavità derivare, come già altrove indicai, da fatti patologici o morbosità diverse determinanti un processo suppurativo entro l' addome, e tale da riescire consecutivamente ad ulcerare in qualche tratto non solo l' intestino ma altresì la addominale parete.

Fra i varii morbi che possono ciò cagionare meritano di essere presi in ispeciale

(1) Bullettino delle Scienze Mediche di Bologna. 1871.

(2) Langenbeck. Fistole stercoracee in seguito di enterite. Gazzetta Clinica di Palermo 1879, fascicoli 3 e 4, pag. 63.

[illegible] fecero conoscere Monteggia e Dupuytren i flemmoni susseguiti da ascessi della fossa iliaca (1), e due esempi degni di menzione furono di recente resi noti alla Società di Chirurgia di Parigi dal Verneuil (2). Osservò egli diffatti in due donne prese da flemmone della fossa iliaca sinistra che le marcie lentamente formatesi diedero origine ad un ascesso che si aprì una via nell' esterna parete addominale e più tardi nell' intestino, nel quale modo venne posta in comunicazione l' apertura dell' intestino ulceratosi colla borsa purulenta da prima formatasi nella fossa iliaca e questa borsa istessa coll' apertura addominale, la quale borsa poi, osservò egli pure, tappezzata da uno strato piogenico non avente tendenza alla formazione di bei bottoni carnei ed alla cicatrizzazione. Notò anco il Verneuil che queste cavità stercoracee, derivanti da flemmoni della fossa iliaca passati a suppurazione, e che trovansi intermedie all' apertura intestinale ed alla addominale, qualora siano molto vaste ponno originare complicazioni sì gravi, perdite di umori in tanta copia da cagionare più o meno presto la morte, la quale pure avvenne nelle due inferme da esso lui curate.

Un caso di questo genere gravissimo e di cui per le sue complicazioni non ho trovato esempio consimile, fu da me osservato in un infermo tenuto in cura dall' onorevole signor dott. Capuri (3) e che nell' interesse dell'Anatomia Patologica e della Clinica brevemente piacemi qui ricordare.

In un robusto uomo dell' età di 46 anni sviluppossi un' adenite all' inguine destro che in breve tempo raggiunse un volume considerevole e passò a suppurazione, per cui convenne aprire il formatosi ascesso con un' ampia incisione. Potendo allora il dott. Capuri dominarne l' interna cavità gli riescì facile l' accorgersi che in ispecie in una delle glandole inguinali superficiali e precisamente in quella che sta vicinissima e cuopre le tante volte l' apertura esterna del canale crurale erasi quell' ascesso formato. Dopo due mesi sebbene il cavo suppurante si fosse rimpiccolito, tuttavia rimaneva superstite della durezza e dell' edema ai suoi contorni. Anzi trascorse che furono altre due o tre settimane lo stato della parte si esacerbò, e per continuità di tessuti sviluppossi un flemmone assai grave nel connettivo della fossa iliaca corrispondente che passò a suppurazione e così le formatesi marcie in copia enorme presero la via della glandola in antecedenza aperta e da questa sgorgarono. Fin qui nulla di straordinario. Ma in questo infermo invece dopo un

(1) Gli ascessi che si formano al bellico, o nelle regioni iliache o inguinali nelle puerpere, danno sovente gran copia di pus, guastano alle volte le intestina, producendo uscita anche di feccie e di vermi, durano lungamente e finiscono quando colla consunzione e morte della donna e quando colla guarigione. La cura sarà di aprirli abbastanza per tempo, mantenere libero l' escita al pus, qualche volta farvi abluzioni o iniezioni e frequenti medicazioni per impedire gli stagnamenti. Monteggia. Istituzioni Chirurgiche. Milano 1814, 1815 e 1830, con aggiunte del dottor Caimi. Vol. 6, pag. 222. Dupuytren. Lezioni vocali di Clinica Chirurgica. Firenze 1835, pag. 484.

(2) Gazette des Hopitaux.

(3) Capuri. Adenite inguinale destra, ascesso della fossa iliaca destra e del perineo, perforazione intestinale. Bullettino delle Scienze Mediche di Bologna. 1868.

mese di cura formossi anche alla destra del perineo un ascesso, e di poi si osservò che alle alvine evacuazioni erano commiste delle marcie in buona copia. In seguito vidersi le feccie scaturire pure dall' apertura fatta nella glandola suppurata, si osservò poscia ulcerarsi l' ascesso formatosi al perineo e da questo escire del pari pus misto a materie fecali le quali scaturirono altresì da altro foro ulceroso formatosi fra l' ano e il coccige, e dopo tutto ciò il consunto infermo cessò di vivere.

L' autopsia fece rilevare che l' aperta glandola suppurata trovavasi precisamente di contro l' ingresso del canale crurale nel quale penetrando col dito si giungeva all' ascesso formatosi nella fossa iliaca di quel lato. Un' altra ulcerazione pressocchè circolare del diametro di un centimetro e mezzo si trovava nella regione perineale destra ove dissi essersi pur formato ed aperto un ascesso, la quale di tanto si approfondava da porsi essa pure in comunicazione coll' ascesso iliaco. L' apertura ulcerosa poi formatasi fra il coccige e l' ano era angusta e penetrandovi con uno specillo si scorreva contro la parete posteriore dell' intestino retto da questa si penetrava in un' apertura formatasi nel retto intestino stesso la quale avea un diametro di mezzo centimetro, e mediante il dito introdotto nell' ano sentivasi di sei centimetri da esso ano distante. Questo seno fistoloso era pure in comunicazione coll' ascesso iliaco nel quale mediante l' apertura formatasi nel retto intestino passavano e si accumulavano quelle materie fecali che comiste a pus venivano poscia emesse dalle aperture che ho descritte. Lo stesso ascesso iliaco poi lungo il psoas ed il muscolo iliaco spingendosi in basso penetrava nella coscia e giungeva fino al piccolo trocantere il quale sentivasi in parte privo di periostio ed eroso.

Ippocrate lasciò scritto, si quid intestinorum gracilium discinditur non coalescit (1) e venendo a tempi non tanto remoti, il Magati nel Libro 2° ove parla delle ferite dell' addome così si esprime, quod si deperdita fuerit Intestini Crassi substantia raro integra Sanitas sequitur, sed Ulcus remanet per quod Fœces, et excrementa alia assiduo effluunt.

Questa sentenza è giusta *specialmente* allorquando per mala ventura gli aperti bordi della ferita intestinale si trovano in così impropri rapporti coll' esterna ferita dell' addome o colle parti circostanti, da permettere alle materie fecciose di versarsi, raccogliersi e soffermarsi nel peritoneo o fra i vani della parete addominale ferita, giacchè anche in simili casi a motivo della irritazione indotta dalle stagnanti materie nei tessuti adiacenti, si forma quello strato granuloso di più o meno cattivo fondo che dissi già circoscrivere di sovente simili fecciose raccolte, e dare luogo così a quella intermedia cavità, che ponendo in comunicazione la ferita intestinale con quella della parete addominale, se non acquista buoni caratteri, e se quindi non trova modo di restringersi e di obliterarsi in guisa da concedere in pari tempo il rimarginamento dell' apertura intestinale, dà origine di necessità alla formazione di un ano preternaturale accidentale permanente. Ed altrettanto

(1) Ippocrate. Aforismi, Sez. IV. Af. XXIV.

accade se il formatosi tessuto granuloso non riesce, in quei casi in cui l' intestino è troncato o si è formato uno sperone assai prominente, a convertirsi in uno speciale infondibolo che a guisa di quello costituito dal collo o dal sacco erniario nell' ernia cancrenata, valga a ristabilire la continuità del canale.

In varii casi però se a questo diffetto la natura non vale a provvedere (1) può soccorrere l' arte, e ce ne porse già da tempo un bellissimo esempio il Tacconi da me superiormente lodato, che quì verrò brevemente narrando per toglierlo da quell' oblìo in cui per mala sorte era pur esso caduto (2).

Un uomo di 59 anni nel Settembre del 1737 riportò un colpo di coltello all' addome fra la regione epigastrica e la ombellicale alquanto a destra. La ferita era penetrante in cavità, ma al momento non vi erano indizi di lesione d' intestino. Passò la ferita a suppurazione e di poi sviluppossi ai contorni della medesima una risipola che finì per dar luogo ad una vasta e profonda cancrena la quale invadendo muscoli e peritoneo del lato destro originò una cavità cotanto ampia da potervi facilmente intromettere una mano. Due o tre giorni dopo la manifestazione di questa cancrena vidersi escire delle feccie commiste agli umori che da essa cavità emanavano ed allora si conobbe l' esistenza di un' angusta apertura o di un forame nel colon destro in corrispondenza alla sua curvatura, il quale foro si trovò cagionato dalla punta del coltello feritore, che poscia in causa della sviluppatasi cancrena maggiormente ampliossi. Per quante avvertenze e cautele si adoperassero affine d' impedire la raccolta ed il ristagno di materie fecali e di pus entro la cavità del peritoneo non vi si riescì, per cui il Tacconi fu costretto darvi libero scolo mediante un' incisione eseguita nella regione lombare alla distanza di circa sei dita trasverse dalla ferita. Dopo ciò usando diligenti ed appropriate medicature non che acconcia compressione si ottenne il distacco di tutte le parti cancrenate, poscia il graduale rimpiccolimento di quella vasta cavità stercoraceo-purulenta, la quale poi si obliterò in un colla intestinale apertura, ottenendosi così la completa e stabile guarigione del malato.

Ora riferirò una mia osservazione non meno notevole di questa, che serve a comprovare anch' essa il vantaggio che si può ritrarre in consimili casi complicati di ani preternaturali susseguiti a ferite, eseguendo una contro-apertura nella regione dei lombi.

Fra i feriti più gravi che io ebbi ad osservare durante la guerra d' Italia del 1848 e 1849 fuvvene uno in cui una palla da fucile penetrò per lungo tratto dal basso in alto nella regione iliaca sinistra. Ben presto si rese manifesta la lesione

(1) Il Flaiani che era poco favorevole alla sutura delle ferite intestinali, fece notare che se per necessità o per elezione ebbe da procurare in simili casi l' ano artificiale, dopo alcuni anni li vide perfettamente guarire, *ed in ispecie se la recisione era delle intestina-crasse.* Corradi Alfonso. Della Chirurgia in Italia, pag. 418.

(2) Memoria sopra la Fisica e Istoria Naturale di diversi Valentuomini. Lucca 1844, Tom. 2, pagina 349.

del colon di quel medesimo lato dalla escita di materie fecali le quali poi in parte si raccoglievano entro la cavità addominale. Cogli esami fatti non si potè allora rinvenire la palla, e le cure più premurose non riescirono a fare sparire la cavità entro cui si accumulavano le feccie e le marcie e ad ottenere l' obliterazione della ferita intestinale.

Intanto il ferito cominciò a risentire del dolore alla regione lombare sinistra a qualche distanza dalle vertebre e scorsi che furono alcuni giorni manifestossi in quel punto una profonda fluttuazione, che resasi più superficiale fece manifesto ivi essersi formato un ascesso che mediante una incisione venne aperto e da cui sgorgarono marcie miste a materie fecali. Esaminato col dito profondamente l' ascesso vi si rinvenne la palla che fu tosto estratta. Dopo ciò le materie fecali ed il pus trovando anche per questa via uno scarico, la vasta cavità entro cui da prima ristagnavano, potendosene sbarazzare, andò per questo man mano rimpiccolendo e si obliterò, cicatrizzandosi in pari tempo la ferita intestinale, l' apertura inguinale, non che quella ottenutasi mediante l' incisione del profondo ascesso formatosi alla regione lombare del lato sinistro.

A questa osservazione farò infine seguito con altre due di fistole stercoracee che susseguirono a ferite prodotte da armi da taglio che per le loro particolarità richiesero mezzi di cura di una certa entità onde essere sanate.

Il 23 Luglio 1872 in un alterco, certo Antolini Angelo, giornaliero, abitante a Casalecchio di Reno fu colpito con coltello al lato destro del ventre a pochissima distanza e quasi a livello dell' ombellico. La ferita era lunga tre centimetri, e fu riunita al momento con alcuni punti di sutura cruenta.

Trasportato così allo Spedale Maggiore, manifestaronsi fenomeni che accennavano a strozzamento erniario, motivo per cui il dott. Medini in allora mio Assistente pose a nudo la ferita e trovò diffatti che rallentatisi i punti di sutura fra i divaricatisi labbri sporgeva una porzione di omento e di intestino tenue. Tolta che ebbe la sutura, nell' intestino scuoprì una soluzione di continuità larga un centimetro circa i cui margini combacciavano e comprendevano soltanto le esterne membrane. Cautamente perciò il Medini respinse tanto l' omento quanto l' intestino nell' addome, e così potè conoscere che l' addominale ferita dirigevasi obliquamente dall' esterno all' interno dall' alto al basso e da destra a sinistra dell' infermo e che era della profondità di parecchi centimetri.

Quantunque si usassero appropriate medicature non si potè ottenere la adesione della ferita, manifestaronsi invece fenomeni di peritonite ed in quinta giornata perforatosi del tutto l' intestino nel punto in cui erano rimaste lese soltanto, le esterne membrane, cominciarono ad escire anche dall' apertura della parete addominale delle feccie liquide e talora materie alimentari in istato di imperfetta digestione. Ed oltre a ciò importa notare che nel corso di 20 giorni orditasi una estesa infiltrazione purulenta, formossi un' ampia cavità suppurante fra l' apertura intestinale e quella dell' addome, nella quale cavità soffermandosi anche le ma-

terie fecciose, per darvi libero scolo si fu costretti di praticare nella parete addominale un' incisione della lunghezza di 15 centimetri e così quel cavo rimase aperto completamente. In tal modo si pose a nudo la fistolosa intestinale apertura che trovavasi in basso, ed era di figura circolare del diametro di circa un centimetro con bordi rilevati gonfi ed arrovesciati all' infuori. Collo scorrere dei giorni la piaga prese un buon aspetto, ma l' apertura intestinale stentando a rimpiccolire venne perciò più volte cauterizzata col nitrato d' argento e così si chiuse e cicatrizzò pure l' addominale ferita. Riacquistata avendo l' Antolini le forze venne licenziato dallo Spedale il 10 Ottobre e cioè un mese dopo ottenuta la completa guarigione.

Ma molto più grave di quello ora descritto si è l' altro caso da me pure osservato, in cui la fistola stercoracea susseguì del pari a ferita d' arma da taglio e di cui darò ora per ultimo brevemente la storia. Il quale poi rendesi sopra ogni altro interessante in quanto che in esso l' apertura fistolosa della parete addominale trovavasi disgiunta da quella dell' intestino non già da una sola ma da due intermedie cavità.

L' individuo che formò oggetto di questa osservazione si è Carlo Cacciari di Piumazzo d' anni 33 muratore, il quale nel giorno 11 di Giugno 1873 riportò una ferita da coltello alla regione inguinale sinistra della lunghezza di tre centimetri. La ferita avea una direzione obliqua da sinistra a destra ed oltre essere penetrante nella cavità addominale lasciava il sospetto ci si complicasse lesione intestinale.

Non avendosi però qualsiasi dato di versamento di materie fecciose nella cavità addominale la ferita fu chiusa con delle striscie di cerotto adesivo, e l' infermo fu sottoposto ad un regime severo. Nullameno non tardò a svilupparsi una peritonite gravissima, ed in corrispondenza alla ferita, i cui bordi si erano riuniti, formossi un ascesso profondo per cui convenne riaprirla. Dapprima escirono sole marcie ma nel giorno 25 dello stesso mese alle marcie si trovarono commiste delle feccie. Ad onta che la ferita si mantenesse aperta fu d' uopo allargarla più volte ed in varie direzioni per impedire il soffermamento delle materie fecali entro l' addome. In tal modo dopo non breve tempo la suppurante ferita cominciò a restringersi ed a cicatrizzarsi e non rimase che una piccola fistola stercoracea, la quale giunti che si fu al 26 del successivo Novembre si trovò essa pure chiusa. Ma dopo 14 giorni mentre il Cacciari faceva dei premiti per andare di corpo sentì riaprirsi la cicatrice e tosto si accorse che dalla formatasi apertura con impeto ed in copia escivano dei gas in un con materie fecciose. Colla pulitezza e con medicatura semplice il 15 Decembre si chiuse nuovamente la fistola, e così rimase fino all' 11 del successivo Gennaio 1874, nel qual giorno di nuovo si riaprì escendone di frequente in copia materie fecali. In questa guisa proseguì fino al 3 Marzo nel qual giorno venne accolto nello Spedale Maggiore ed allora io ne assunsi la cura.

L' infermo trovavasi in modo assai notevole dimagrito, l' apertura fistolosa esi-

stente alla regione inguinale sinistra era molto angusta e ne uscivano materie purulente e feccie fluide, l' adiacente cute arrossata ed in alcuni tratti escoriata faceva vedere le cicatrici che risultarono dalle incisioni in antecedenza praticate. Introdotto uno specillo nella fistola mi accorsi che entravo in una cavità che appariva della forma e delle dimensioni di una mezza noce, dalla quale cavità, ritirato che ebbi lo specillo, escirono tosto all' esterno delle marcie intrise di feccie. Ritenuto avendo che questa cavità suppurante fosse una di quelle cavità intermedie nelle quali ristagnando e feccie e marcie resta perciò impedita la chiusura della fistola, per fare sparire essa cavità mi decisi di ampiamente aprirla, nel qual modo scoperta che avessi l' apertura intestinale che vi metteva foce, l' avrei all' occorrenza potuta cauterizzare, o mi sarei adoperato in altro acconcio modo affine di sollecitarne la obliterazione.

Preparato quindi convenientemente l' infermo ed usando delle maggiori cautele, quella cavità venne ampiamente aperta in direzione trasversale, ossia da sinistra a destra verso l' ipogastrio, e cioè in corrispondenza del suo maggiore diametro, ma svuotata che l' ebbi dei sozzi umori in essa contenuti e debitamente pulitala, non mi fu dato di scorgere l' intestinale apertura. Mi avvidi invece che a destra dell' infermo ossia verso l' ipogastrio la parete dell' aperta cavità suppurante erasi convertita in un grosso e duro cordone che aderiva fortemente all' interna superficie addominale. Attentamente esaminato avendo quel grosso setto mediante il dito e lo specillo, potei giungere a scuoprire al di sotto di esso un piccolo pertugio entro il quale introdotto lo specillo stesso penetrai in direzione trasversale pure da sinistra a destra del malato in un' altra cavità suppurante, che con diligente esame potei conoscere pressocchè della medesima forma e delle medesime dimensioni della antecedentemente aperta. Risolvetti allora di spaccare in un coll' indicato cordone e la sovrapposta parete addominale anche questa seconda cavità nella stessa direzione trasversale del cavo in antecedenza aperto, ossia da sinistra a destra dell' infermo verso l' ipogastrio, e ciò venne fatto, e ben intesi sempre con ogni maggiore cautela. Pulito che ebbi anche questa cavità, posta così in perfetta comunicazione coll' altra, mi riuscì allora di scuoprire nel suo fondo l' intestinale apertura fistolosa che era di figura pressocchè circolare ed avente un diametro di parecchi millimetri. Riempito che ebbi tutto quel cavo con delle filaccie applicai attorno il ventre una fasciatura leggermente compressiva.

Niun fenomeno rilevante di poi si sviluppò, l' interna superficie di esso cavo si cuoprì di belle granulazioni e cominciò a rimpiccolirsi, e nel frattanto non essendosi omesso di cauterizzare più volte l' intestinale apertura se ne ottenne la chiusura, dopo di che la cicatrice della piaga addominale cominciò pure ad ordirsi, ed alla fine di Luglio era completa, e così è stabilmente rimasta. Il Cacciari si trova ora in ottime condizioni di salute, ma è però munito di un brachiere affine d' impedire che nel punto della riportata lesione, ove esiste la cicatrice, gli intestini al disotto di essa facciano prominenza.

Delle osservazioni da me esposte, non poche, come era mio principale intendimento, serviranno per certo a confermare di quanta utilità possa riescire l' attento studio di quelle purulente e stercoracee cavità che non di rado si formano fra un ulcerato ferito o troncato intestino ed una eventuale apertura anale orditasi nell' addome. E davvero senza essersi fatta la più precisa idea delle varietà di simili cavi non sarà mai concesso al chirurgo di stabilire in una maniera razionale i mezzi, che a tenore delle circostanze, potranno rendersi acconci a fare sparire le cavità istesse, ed a permettere così la stabile chiusura degli ani anormali che ad esse trovansi congiunti, e che altrimenti trattati si renderebbero fuor d' ogni dubbio ribelli a qualsiasi valido presidio dell' arte.

OSSERVAZIONI
SULLA VARIAZIONE DI TEMPERATURA DEL CORPO UMANO
PRODOTTA DAL MOVIMENTO

NOTA

DEL PROF. EMILIO VILLARI

(Letta nella Sessione del 27 Novembre 1879)

Una ricerca oramai famosa dell' Hirn collega felicemente la termogenesi animale alle odierne teorie della meccanica del calore. Egli, con esperimenti assai ingegnosi, dimostra come ogni grammo d' ossigeno inspirato, combinandosi nell' interno dell' organismo umano, mette in libertà all' esterno dell' organismo istesso 5 calorie, quando l'uomo è in riposo. Invece se l' individuo ascende, sollevando il proprio corpo, esso assorbe molta maggior quantità d' ossigeno che nel caso antecedente ; però ciascun grammo d' ossigeno svolgerà allora all' esterno 1, 7 calorie circa, avendo in compenso l' uomo prodotto un lavoro positivo, espresso dal peso del corpo per l' altezza alla quale fu sollevato. E finalmente l' Hirn avendo fatto discendere il paziente, trovò che l' ossigeno assorbito era minore che nel secondo caso, ma il calore prodotto da ciascun grammo di quello era di 6 a 7 calorie. Dal che si inferisce che quando l' uomo ascende l' *equivalente termico* (1) dell' ossigeno è minimo, perchè parte del calore delle azioni chimiche si trasforma in lavoro meccanico: nel caso della discesa detto equivalente è massimo, imperocchè al calore delle azioni chimiche s'aggiunge quello meccanico dello spegnersi del lavoro dell' uomo che discende; e finalmente quello dell' uomo in riposo deve essere ed è realmente, ai due precedenti lavori medio in quantità.

Se tali sono le modificazioni che il movimento induce nella produzione del calorico animale, quali sono quelle che la temperatura dell' uomo patisce per effetto dello stesso movimento?

(1) Chiamo per brevità *equivalente termico* dell' ossigeno il calorico messo in libertà da esso nell' organismo umano e misurato dall' Hirn.

Alcune antiche esperienze del Davy ci dicono che col movimento la temperatura alle parti periferiche dell' uomo (mani ascella ecc:) s' accresca assai più vistosamente che non nelle parti centrali, p. e. nella bocca. Il Beclard a buon diritto però ci fa notare che le variazioni di temperatura, le quali si manifestano nei muscoli e quindi nell'organismo, sono dovute a fenomeni complessi. Ed infatti fa osservare che nel movimento dei muscoli, e quindi del corpo degli animali, va considerato il genere di lavoro che essi eseguono: giacchè se essi producono un lavoro positivo, il sollevamento d' un peso, p: e: vi deve essere trasformazione di calore in lavoro e però diminuzione di calore e di temperatura: per lo contrario, se essi producono un lavoro negativo vi deve essere in essi maggiore sviluppo di calorico, imperocchè in questo caso parte del lavoro si trasforma in calore. Dopo di che il Beclard passa agli esperimenti e trova, che il gastrocnemio di una rana si riscalda, meno quando per una eccitazione si contrae sollevando un peso, e più quando la contrazione è impedita, per essere fissato l' arto immobilmente. Quindi studia la temperatura del bicipite brachiale dell' uomo, presa esternamente con dei termometri, ed afferma (1) che il bicipite, quando solleva un peso (contrazione dinamica) e produce così un lavoro positivo, si riscalda meno di quando tiene stabilmente sollevato ed immobile il medesimo peso (contrazione statica): e la differenza sarebbe di 0°,18.

Se il braccio poi solleva ed abbassa alternamente il peso, il muscolo invece si riscalda egualmente che nella contrazione statica; e ciò l' A. interpreta ammettendo, che il muscolo nel sollevare il peso si raffredda di tanto di quanto si riscalda nell' impedire la rapida discesa del peso istesso.

Queste due serie d' osservazioni sono fra loro perfettamente concordanti e, come si rileva da ciò che precede, il Beclard discutendole le mette in relazione con la termodinamica come nel caso delle esperienze dell' Hirn qui sopra citate.

Queste esperienze del Beclard però e l' interpretazione ch' egli ne dà non pare sieno ammesse da tutti i fisiologi; e fra gli altri Haindenhein (2) ritiene che la differenza di temperatura nel muscolo non vi debba essere quando esso solleva od impedisce la rapida caduta d'un peso giacchè, dice egli, in entrambi i casi il muscolo fa ad un dipresso sempre il medesimo sforzo. Ed a vero dire, oltre che riesce difficile il comprendere l'interpetrazione termodinamica data dal Beclard del fenomeno in quistione, io mi penso che il bicipite debba fare uno sforzo maggiore e consumar maggiore energia se impedisce la rapida caduta d' un peso eguale a 10 p. e. di quello che fa nel sollevarne uno eguale a 5, e perciò dovrebbe, seguendo le idee del Beclard, riscaldarsi meno nel far discendere il corpo che nel sollevarlo: il che non concorderebbe colle esperienze del Beclard medesimo. Ed inoltre, se supponiamo che il braccio tenga librato in aria il massimo peso, p. e. 10 K., che esso possa sostenere; è

(1) Beclard fisiologia. Paris 1866 p. 466.

(2) Compara Dufour Constance de la force Lusanna p. 29 1865.

chiaro che un piccolissimo accrescimento di peso farà discendere il corpo; ed invece una diminuzione sua anche piccolissima renderà atto il braccio a sollevar quel peso. Ora in tutti questi vari casi l' azione del muscolo, con piccolissima differenza, è sempre la medesima, e difficilmente si riesce a comprendere la variazione di temperatura indicata dal Beclard con la sua teoria.

Tuttavia a me non pare che la quistione possa risolversi col semplice ragionamento, imperocchè il muscolo quando lavora e si contrae è sede d' azioni chimiche assai più energiche che quando è in riposo, le quali debbono da sè sole modificare la sua temperatura (1): egli è perciò necessario ricorrere alle esperienze e determinare senza preconcetti l' effetto dei vari movimenti sulla temperatura medesima.

L' Heidenhein sperimentò in proposito sopra un gastrocnemio di rana isolato e trovò, che esso eccitato dalle scariche indotte emette calore quando contraendosi solleva un peso: e detto calore cresce un po' col peso che solleva. Ed inoltre l' A. ha ancora osservato, che per eccitazioni eguali il muscolo svolge più calore quando si contrae che quando la contrazione è impedita (2). Il quale risultato è diametralmente opposto a quello ottenuto e discusso dal Beclard.

A me è parso utile di fare delle nuove ricerche per stabilire possibilmente la relazione che passa fra il movimento e la temperatura dell' uomo. Ed in queste indagini, piuttosto che osservare le variazioni di temperature d' un dato muscolo, m' è parso bene studiare quelle che subisce l' intiero organismo umano quando esegue energici e prolungati movimenti. In questa maniera operando, le variazioni di temperatura debbono, io mi pensavo, essere abbastanza estese, per potersi misurare senza errori sensibili: e l' organismo inoltre trovandosi nel suo stato perfettamente normale i risultati che s' ottengono debbono essere assai esatti. Ed è d' altronde evidente, che la temperatura animale deve essere in intima relazione con quella dei muscoli, imperocchè il sangue che li nutre porta e diffonde in quello la variazione di temperatura di questi.

Nella decorsa estate adunque avendo eseguito varie escursioni Alpine ebbi agio di studiare la variazione di temperatura, prodotta dall' esercizio, in un uomo sano di circa 40 anni di età, di temperamento nervoso e di circa 70 chilogrammi di peso. Prima però di eseguire dette misure io credetti necessario di fare alcune osservazioni preliminari, per determinare nell'uomo la maniera più adatta ed agevole per misurare la sua temperatura nelle varie circostanze.

(1) È dimostrato in fisiologia, che quando un muscolo lavora e si contrae assorbe ossigeno ed emette acido carbonico in maggior quantità di quando è in riposo. Ed Helmholtz ha visto pel primo che un muscolo che ha molto lavorato e si è energicamente contratto molte volte, contiene più sostanze solubili nell' alcool e meno sostanze che si sciolgono nell' acqua, in confronto a quelle che ne aveva avanti le contrazioni.

(2) Queste citazioni dell' Heidenhein sono ricavate dall' opuscolo di Marc Dufour « La costance de la force, Lausanne 1865: nel quale sono riferite molte esperienze dell'Heindenhein, ricavate dalla sua memoria originale che ha per titolo Mechanische Leistung, Warmeentwicklung und stoffumsatz bei der Muskelthätigkeit. Leipzig 1864.

Per tale scopo mi provvidi di due termometri clinici a massimo con piccoli bulbi, che avevano segnati i decimi di grado centigrado sulla scala, e permettevano d' apprezzare anche i ventesimi di grado senza difficoltà. Essi termometri furono comparati fra loro così, che le indicazioni di entrambi si corrispondono perfettamente. Con detti termometri cominciai a determinare la temperatura della palma della mano tenuta strettamente chiusa e del cavo ascellare; e m' ebbi subito a convincere che la temperatura delle due suddette cavità non è mai costante ed i termometri in esse rinchiusi, con grande stento e lentezza segnano la temperatura fissa. Ed inoltre osservai reiterate volte, che la temperatura delle due cavità indicate, e più specialmente quella della mano variano sensibilmente, a seconda che il paziente si trova in un' aria agitata o tranquilla, calda o fredda, esposto al sole od all' ombra ecc. Per le quali cagioni riusciva cosa difficile ed incerta fare uno studio della temperatura dell' uomo osservando quella della mano o del cavo ascellare.

Poscia misurai la temperatura del paziente ponendo il bulbo del termometro sotto la sua lingua, ed ottenni così delle indicazioni assai costanti ed esatte, nel caso che egli era in riposo da qualche ora e perfettamente tranquillo: ma se per l' esercizio aveva accelerato la respirazione, e molto più ancora se si trovava in moto, riusciva cosa lunga e difficile determinare con esattezza la temperatura sua nel modo indicato. Ed invero per una respirazione accelerata l' aria, generalmente fresca, passa in parte per la cavità della bocca e la raffredda; nè forse può essere del tutto priva d' influenza quella che entrando per le fosse nasali penetra nella laringe attraverso la retro-bocca. Così che avendo io fatto un giorno sul S. Bernardino una semplice passeggiata di 45′, trovai che la temperatura presa al disotto della lingua, subito dopo la escursione, era di 35,3 e poscia lentamente crebbe a 36,2; e così rimase stazionaria. Perciò a voler in tal modo determinare la temperatura dell' uomo, dovrà porsi il termometro sotto la lingua e tener la bocca chiusa per 3 o 4 minuti; ed anche in tale maniera, in caso di respirazione accelerata, l' osservazione forse non è del tutto rigorosa.

Dopo le quali indagini io, volendo sempre trovar la maniera di determinare la temperatura dell' uomo con modo facile e sicuro e sopratutto al coperto da ogni errore accidentale, istituii sul paziente diverse misure di confronto, fra la temperatura presa sotto la lingua a bocca chiusa, la temperatura del retto (circa 10ᶜ internamente) e quella dell' uretra, nella quale introducevo il termometro per circa 10ᶜ e quindi prendevo la temperatura, dopo che dal paziente erano state emesse le urine. Ora eseguite con accuratezza queste tre diverse misure sul paziente che trovavasi in perfetta quiete ottenni i seguenti dati numerici:

9 agosto, 9 a. 1879 — Stazione S. Bernardino altezza 1614 m.

Temperatura	dell' uretra	36,5
„	del retto	36,5
„	della bocca	36,5

10 agosto 6 a. id. id.

Temperatura	dell' uretra	36,7
„	del retto	36,7
„	della bocca	36,6

Da questi dati rilevasi che nello stato di riposo dell' individuo la temperatura delle suindicate tre cavità è in tutte la stessa e perciò esse realmente indicano la temperatura delle parti interne del corpo umano. È da notarsi però che nella bocca il termometro fu tenuto per più minuti di seguito, per le ragioni che si dissero, onde avere indicazioni concordi: ciò non pertanto nell' ultimo esempio citato si nota anche per questa cavità che la temperatura fu d' 0,1 inferiore alle altre due: differenza che certo si accentua maggiormente nel caso che il paziente abbia accelerata la sua respirazione. La temperatura invece determinata nel retto e nell' uretra, nel modo che si è detto, fu trovata sempre la stessa: per cui queste due cavità sono adatte per simile genere di misure; ed io in esse ne eseguii molte nelle varie escursioni che feci. Se non che è da avvertire che le misure s' eseguono più facilmente nell' uretra, ed il termometro indica la massima sua temperatura, appena che si sia emessa una piccola quantità d' urina. Per le quali ragioni io preferii di fare tali misure nell' uretra, e perciò i dati numerici che citerò quì in seguito tutti ad esse si riferiscono.

Ciò premesso dirò come io cominciai le mie osservazioni; ed in prima, per avere un termine di confronto, misurai varie volte la temperatura, nel modo suindicato, quando il paziente era in riposo ed ottenni fra gli altri i seguenti risultati :

S. Bernardino 1614 m.	9 agosto	9° a.	Temperatura	36,6
	10 „	6 a.	„	36,7
Parpan (1500 m.)				
	16 agosto	11 a.	„	37,3
		7 p.	„	36,8
Luogo non indicato		10 p.	„	36,65
			media	36,8

Da questi dati adunque risulta che la temperatura media del soggetto studiato da me era di 36,8 con una variazione massima di + 0,5 c. e — 0,2, dovuta alle condizioni varie in cui si trovava l' organismo.

Dopo le quali osservazioni misurai la temperatura del paziente dopo un più o meno grande esercizio ed ottenni i dati seguenti, che sono relativi solo ad alcune poche delle mie osservazioni, che furono moltissime.

I. — 20 agosto. Dopo 1° 30′ di ripida discesa: dalla cima dello Staetzerhorn 2576 m. a Parpan 1500 m. Dislivello 1076 m.

ore 2 p. Temperatura 38,1

In questa discesa si spensero, in numero rotondo, 75,000 Km. di lavoro e quindi si produssero dallo individuo meccanicamente circa 173 calorie.

II. — 27 agosto discesa dal Pitz Pazzola, 2582 m. a Sedrun 1395 m. Dislivello 1187 m.

circa 1° p. Temperatura 38,15

In questa discesa si spensero circa 83,100 Km. di lavoro, percui il paziente produsse meccanicamente circa 190 calorie

III. — Discesa dal monte Prosa (2738 m.) al S. Gottardo (2093 m.) Dislivello 645 Temperatura 37,9

Lavoro trasformato circa 45,000 Km. calorie svolte circa 104.

IV. — Discesa poco ripida dalla Furca (2436 m.) a Gletsch (1753 m.) Dislivello 683 m.

ore 2,30 p. Temperatura 38,1

Lavoro trasformato 48000 Km. e calore prodotto circa 110 calorie.

V. — Discesa lieve dal piccolo Sidelhorn (2766 m.) al Grimsel 2175 m. Dislivello 591 m.

Temperatura 37,7

Lavoro trasformato circa 41,000, calorico prodotto circa 94 calorie.

E senza citare ulteriori esempi dirò che da tutte le osservazioni precedenti risulta chiaro che durante la discesa il corpo umano si è riscaldato sempre e costantemente: e prendendo la media dei numeri precedenti la si trova eguale a 37.° 99: percui la temperatura del paziente per effetto della discesa si è elevata di 1°,19 sulla media di riposo. E questo fatto concorda pienamente con la teoria del Beclard, imperocchè nella discesa una enorme quantità di lavoro si è spento ed ha svolto una corrispondente quantità di calorico, che si è manifestato con l' aumentata temperatura del paziente.

Veniamo al secondo punto della quistione e vediamo quale è l' influenza dell' ascensione sulla temperatura dell' uomo. Le misure furono fatte alla solita maniera ed ascendendo in generale i luoghi più sopra citati; ed i risultati ottenuti furono i seguenti

I. — 19 agosto. Dopo una salita di circa due ore in vicinanza di Parpan

Temperatura 38,0

II. — Ascensione al Piz Pazzola da Sedrun Dislivello 1395 m.

Temperatura 38,0

Lavoro eseguito circa 83,100 K.m., calore assorbito circa 190 calorie

III. — Ascensione dal S. Gottardo al monte Prosa Dislivello 645

Temperatura dopo la montata 38,15

Lavoro eseguito circa 45,000 Km. calorie assorbite circa 104.

IV. — Ascensione da Sedrun alla Furca Dislivello 1041. Salita lieve 6° ore di cammino

Temperatura dopo la montata 38,3

V. — Ascensione da Gletsch al Piccolo Sidelhorn Dislivello 1013

Temperatura dopo la montata 38,2

Lavoro eseguito 70,000 Km. circa, calore consumato 160 calorie circa (1).

E senza aggiungere nuovi esempi potremo dire che dopo l' ascensione il corpo umano si riscalda sensibilmente: percui prendendo la media di tutti i numeri precedenti noi avremo che la temperatura dopo la salita fu 38.°,13, la quale supera la media del riposo di 1°,33. Dunque la temperatura del corpo si accresce di 1,33 dopo che l' uomo ha eseguito un enorme lavoro, ed ha perciò trasformato una grande quantità di calore. Ed anzi è degno di nota, che nella ascensione il riscaldamento supera di 0,14 quello che si manifesta dopo la discesa; e tale differenza in più apparisce ancora maggiore se noi consideriamo, che alla sommità dei monti la temperatura è sempre assai bassa rispetto al piano, percui anche quella del corpo umano deve partecipare a questa minore temperatura dell' ambiente e raffreddarsi. Ora questo fatto, parmi non si possa in modo alcuno interpretare con le idee del Beclard (2).

(1) In queste determinazioni del lavoro spento o prodotto noi abbiamo tenuto conto solo di quello dovuto al montare o discendere del paziente, senza considerare quello che l'uomo fa nel trasportarsi orizzontalmente perchè esso lavoro, sebbene grandissimo pure verificandosi egualmente nella salita e nella discesa (che furono generalmente fatte sulla stessa strada) influirono nello stesso modo sulle temperature finali (*).

(2) Qui però è necessario, per debito d'imparzialità, ricordare alcune osservazioni del Dufour l. c. p. 58) fatte col medesimo scopo di determinare l' influenza dell' esercizio sulla temperatura del corpo umano. Le osservazioni del Dufour furono eseguite dopo aver montato o disceso una scala assai inclinata di $17^{m},35$ d' altezza verticale e di $21^{m},04$ di lunghezza: le temperature erano osservate con un termometro che faceva apprezzare i cinquantesimi di grado ed era posto nella cavità ascellare. Le misure erano eseguite come si disse dopo la montata o la discesa della scala e l' equilibrio del termometro, dopo ogni serie di movimento, si otteneva trascorsa circa 15 minuti primi. I risultati possono così riassumersi

I	Temperatura massima dopo la		*montata*	36.98
	«	«	*discesa*	37,16
II	«	«	*montata*	36,95
	«	«	*discesa*	37,02

Sicchè in media la temperatura dopo la montata sarebbe 36°,97 e dopo la discesa 37,09 differenza in più per la discesa 0,12: differenza assai piccola ma pur sufficiente se fosse sicura. Però io ho

(*) Per dare una idea del consumo di forza che esige la locomozione orizzontale, dirò che il Thury fondandosi su un apprezzamento di Saussurre, che dice che un' ora di cammino in piano equivale in lavoro muscolare alla ascensione di 400 m.; e su quelle di altri con queste assai concordate, ammette che per 1 m. di cammino orizzontale un uomo di media taglia sviluppa 7,3 Km. di lavoro.

Dopo le quali cose parmi potersi affermare che le mie osservazioni, concordanti con quelle fatte in modo totalmente diverso dall' Heidenhein, meritano grande confidenza, tanto più perchè sono state eseguite con gran rigore, su vastissima scala ed i risultati ottenuti sono assai cospicui. E perciò parmi potersi ritenere come sicuramente dimostrato, che il corpo umano si riscalda tutte le volte che produce un lavoro, sia negativo sia positivo, e più nel secondo che nel primo caso. Il che poi è anche dimostrato dall'osservazione volgare e giornaliera, giacchè tutti sappiamo che ci riscaldiamo di più quando si ascende che quando si discende un monte, ed in tutti e due i casi studiamo e lavoriamo di più che stando fermi.

Ora l' interpretazione di questi fenomeni non può ricavarsi dai soli principii di termodinamica, come per avventura vorrebbe il Beclard, imperocchè i fenomeni dell' organismo sono assai complessi ed intricati; e per darci ragione delle suindicate variazioni di temperatura bisogna considerare le condizioni dell' organismo istesso nelle varie fasi delle esperienze: ed è evidente che dette variazioni debbono essere in intima relazione con l' attività della respirazione e del circolo sanguigno.

Ora io nelle mie osservazioni ho notato che i battiti del polso e la respirazione s' accelerano assai di più nel montare che nel discendere una montagna; e perciò la respirazione e le azioni chimiche devono necessariamente essere più attive nel primo che nel secondo caso. Così ho osservato che nello stato di riposo il mio polso dava 74 pulsazioni al minuto, ed eseguivo 17,5 inspirazioni in un minuto primo. Dopo una leggiera montata di 1 ora le pulsazioni erano 95 e le inspirazioni 21 in un minuto: e per lo contrario dopo essere io ritornato per la medesima via, alla fine della strada le pulsazioni erano solo di 85. e le inspirazioni 19 a minuto. Ma le esperienze più estese ed i risultati più completi in proposito si devono allo Smith (1), il quale ha misurato la quantità di aria respirata in un

già indicato le difficoltà ed incertezze che s'incontrano a far le misure di temperatura nel cavo ascellare; difficoltà certo accresciute dal tempo lungo che bisognò aspettare nelle osservazioni del Dufour, per ottenerle; ed esse sarebbero state al certo più sicure e precise se fossero state eseguite nel retto; ed il Dufour le eseguì infatti anche in quella cavità, ma io qui non ne trascrivo i risultati perchè l'A. stesso non le crede degne di confidenza e dice per esse « nous nous assurâmes bientôt que ce moyen est entaché de causes d'erreurs assez fortes pour que les resultats acquis meritent peu d' être pris en consideration »

Il Dufour cita poi anche a p. 56 un' osservazione fatta dal Davy, che collimerebbe con le sue e con la quale il Davy trova la temperatura sotto la lingua e quella della mano dell' uomo essere di 36,6 dopo una salita di 20' e di 36,9 dopo la discesa. Però « non avendo il Davy » dice il Dufour « avuto in mira d' osservare l' influenza dei diversi lavori sulla temperatura, le indicazioni di questa osservazione unica sono assai scarse »: perciò a me pare che quella osservazione non merita piena confidenza; tanto più che riesce difficile persuadersi come la temperatura sotto la lingua e quella del cavo della mano sieno le medesime.

(1) Edimburg med. Journal V gennaio 1859 citato da Dufour.

dato tempo da un uomo posto in diverse condizioni, ed ha trovato che dette quantità sono nelle proporzioni seguenti:

Stato del paziente	Quantità di Aria respirata
A letto	1,00
Discendendo $^2/_5$ di miglia l' ora	3,43
Ascendendo $^2/_5$ " "	4,40

Questi dati mostrano che la respirazione dell' uomo è minima quando è in riposo, media quando discende ed è massima quando esso ascende. I quali risultati insieme a quelli del Hirn, citati in principio di questa nota, ci danno l' interpretazione delle variazioni di temperature da me osservate.

Ed infatti quando l' uomo ascende e produce un lavoro positivo il coefficiente termico dell' ossigeno che egli assorbe decresce e la temperatura dovrebbe abbassarsi; però la respirazione in questo caso s' accresce in proporzioni assai più rilevanti del diminuito coefficiente termico e quindi in realtà la temperatura si accresce, relativamente a quella del riposo.

Nella discesa invece il coefficiente termico s' aumenta di poco, la respirazione s' accelera anche essa, sebbene meno che nel caso precedente, e perciò la temperatura anche in questo caso deve aumentarsi; ed io l' ho ritrovato quasi eguale a quella osservato nell' ascensione. Vero è però che in questi fatti così complicati dell' organismo non si può istituire un calcolo per determinare la temperatura del corpo prendendo a base solamente i risultati del variato coefficiente termico dell' ossigeno e della modificata respirazione nei diversi casi.

Nè voglio terminar questa nota senza far rilevare che se è vero secondo Hirn che il coefficiente termico dell' Ossigeno aumenta nell' uomo, che fa un lavoro negativo, non se ne può inferire, come vorrebbe il Beclard, che la temperatura del muscolo, solo per questo debba aumentarsi ; imperocchè il lavoro che si trasforma in calore, quando un uomo discende non deve necessariamente trovarsi solo nel muscolo, potendo trovarsi e trovandosi certamente in parte almeno là dove l'uomo urta col piede per fermare la rapida caduta del suo corpo. L'Hirn misurava tutto quanto il calorico del paziente, messo tutto intiero in una specie di calorimetro e le sue deduzioni furono esatte; ma ripeto non si può con la semplice termodinamica risalire a determinare le variazioni termiche di un muscolo che lavora in un senso o nell' altro, essendo detto lavoro accompagnato da grandi modificazioni dell' attività chimica dei muscoli stessi.

SULLE

LEGGI TERMICHE E GALVANOMETRICHE

DELLE SCINTILLE DELLE SCARICHE D' INDUZIONE

Ricerche

Del Prof. EMILIO VILLARI

(III. Memoria)

(Letta nella Sessione ordinaria delli 15 Maggio 1879)

Dopo di avere determinato le leggi termiche e galvanometriche delle scintille prodotte dalle scariche dei condensatori (1), io intrapresi altre ricerche consimili sulle scintille d' induzione, e specialmente su quelle prodotte dai grandi induttori; e l' esposizione dei risultati di queste mie nuove indagini forma il soggetto di questo scritto.

L' apparecchio adoperato da me in queste nuove esperienze è disegnato nella Tav. I, e consta di un gran rocchetto di Ruhmkorff R; e di uno o due dei miei termometri a scintilla T e P e di un galvanometro G (2).

Il rocchetto era uno dei maggiori fabbricati dal Ruhmkorff, e tale che animato da 8 grandi elementi Bunsen produceva delle scintille di 35 a 40 cm. di lunghezza. A misurare la intensità della corrente inducente io ho adoperato una ottima bussola delle tangenti, che ponevo in derivazione del circuito primitivo, ed a grande distanza dal rocchetto per eliminare le sue influenze perturbatrici. Le interruzioni della corrente primaria, per produrre le induzioni, si eseguivano a mano affine di potere sperimentare sopra una sola scintilla per volta; e perciò si adope-

(1) I risultati di queste mie indagini sulle scintille si trovano pubblicate in due estese memorie: la I^a^ è fra le Memorie dell' Accad. delle Scienze di Bologna T. X (3^a^) p. 147, 1879, Bologna: e la II^a^ trovasi inserita nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei, Anno CCLXXVI, 1879, Roma.

(2) Il termometro P disegnato per isbaglio come è indicato nella figura deve avere la forma di quello rappresentato in T.

rava il noto interruttore Foucault, che era unito al rocchetto nel modo ordinario e munito delle sue pile, per farlo agire nelle medesime condizioni nelle quali suolsi adoperare.

I termometri a scintilla erano quei medesimi ideati da me e descritti nella I. delle due memorie succitate; e consistono ciascuno in un pallone di vetro T isolato, munito di un cannello di vetro t contenente un indice di glicerina ed acqua, il quale col suo spostamento misura le dilatazioni e perciò i riscaldamenti subiti dal gas contenuto nel pallone. La scintilla vi scatta internamente fra due palline di platino, fuse agli estremi di corti fili della stessa sostanza (1).

Il galvanometro G era quello del Wiedmann a specchio con rocchetti di filo di rame rivestito di grosso strato di guttaperca, ed esso era posto a molta distanza dall' induttore per sottrarlo alle sue influenze perturbatrici.

Il galvanometro ed i termometri successivamente od insieme si facevano comunicare col circuito indotto del rocchetto per mezzo dei fili f f perfettamente isolati e sostenuti nell' aria da bastoni di ebanite.

Ciò posto dirò come le mie prime ricerche ebbero per iscopo di determinare la relazione che esiste fra la lunghezza della scintilla indotta e la quantità di calorico che essa produce. Perciò riunii al circuito indotto del rocchetto (animato da 6 elementi Bunsen medio modello) il solo termometro a scintilla T con elettrodi mobili. Quindi manovrando l' interruttore Foucault facevo scoccare una sola scintilla per volta nel pallone e misuravo la dilatazione del gasse (generalmente aria od azoto secco) in quello contenuto, ossia il riscaldamento prodotto dalla scintilla, con lo spostamento dell' indice glicerico t. Codeste dilatazioni e riscaldamenti s' ottenevano solamente all' interruzione della corrente primaria, imperocchè nel pallone vi passava solo la indotta diretta, a meno che gli elettrodi non erano estremamente vicini; nel qual caso un lieve riscaldamento s' otteneva anche alla chiusura della corrente primaria.

Le mie misure però furono eseguite sulla sola scintilla indotta diretta, che si produceva di varie lunghezze nel pallone, portando in esso gli elettrodi a diverse distanze le quali esattamente si misuravano, determinando in ciascun caso con le seste, la posizione degli elettrodi medesimi. Per ogni determinata lunghezza di scintilla si eseguivano tre o più esperienze, per determinare il suo potere termico, e le medie di queste misure sono riportate nella tabella seguente.

(1) Per maggiori particolari intorno a questi termometri vedi: Villari, Accademia delle Scienze di Bologna, pag. 149. Bologna 1879.

Tabella I. Ossigeno Pallone B $\alpha = 23^0, 30'$

N.º d' ordine	Lunghezza della scintilla L	Calore C	Rapporti L: C
1	0	0, 00	0, 00
2	7, 3	2, 22	3, 29
3	12, 0	3, 44	3, 49
4	17, 2	4, 80	3, 58
5	24, 6	6, 00	4, 10
6	29, 2	6, 70	4, 36
7	35, 4	6, 82	5, 21
8	42, 3	7, 14	6, 59
9	51, 1	7, 22	7, 08
10	61, 5	7, 67	8, 02
11	71, 0	7, 75	9, 16
12	88, 0	3, 17	27, 76

Nella tabella precedente sono trascritte nella colonna L le lunghezze delle varie scintille con le quali si sperimentò: nella colonna C sono indicati i calori svolti da ciascuna scintilla, e nell' ultima colonna sono riferiti i rapporti L : C, fra le lunghezze dalle scintille ed i calori relativi C.

Dell' esame dei quali risultati noi scorgiamo, che in principio il calorico da esse prodotto cresce con la loro lunghezza, poi rimane costante ed indipendente delle lunghezze medesime; e finalmente al crescere di queste, quello va rapidissimamente diminuendo. Ed in effetti l' esame della colonna ultima, dei rapporti L: C, mette in chiaro che in principio (esp. 1 a 6) il calorico cresce quasi proporzionalmente alla lunghezza della scintilla, giacchè in detti limiti il rapporto su indicato cresce assai lentamente, così da potersi ritenere approssimativamente costante. In seguito, oltre la esperienza 6, il detto rapporto cresce rapidamente, ed il calorico svolto delle varie scintille (esp. 6 a 11 colonna C) rimane quasi costante, per poi decresce grandemente fra le due ultime esperienze.

Queste diverse fasi o periodi del fenomeno non sono naturalmente separati fra loro in modo netto e reciso, ma quasi si sovrappongono, in maniera che lentamente dall' uno si passa all' altro. E tali periodi inoltre sono evidentemente in relazione con l' apparenza propria della scintilla indotta. Così essa per un determinato rocchetto è grossa vivace e fiammeggiante, quando è breve e l' induzione è potente; e per lo contrario, pare che si assottigli e diventi poco luminosa, quando si allunga, sino poi a riescire invisibile e quindi spegnersi affatto, oltre un dato limite della sua lunghezza.

Questo vario modo di comportarsi della scintilla d' induzione, io credetti fosse in relazione con l' intensità dell' induzione medesima, non che della natura del gas nel quale la scintilla si faceva balenare; e perciò ripetei le esperienze precedenti adoperando una corrente inducente più energica (la bussola dava 31°, 30′ di deviazione, e precedentemente soli 23°, 30′), e facendo passare la scintilla per entro il pallone, una volta ripieno di idrogeno ed un' altra di ossigeno. I risultati medi di 3 o più misure per ciascun caso sono riportati nelle tabelle seguenti.

Tabella II. Ossigeno $\alpha = 31^{\circ}, 30'$

N.° d' ordine	Lunghezza della scintilla L	Calorico C	Rapporti L : C
1	0, 0	1, 27	
2	4, 3	4, 68	0, 92
3	8, 8	7, 78	1, 13
4	11, 9	9, 95	1, 20
5	14, 0	10, 70	1, 31
6	18, 0	13, 47	1, 37
7	23, 0	15, 50	1, 48
8	26, 0	17, 34	1, 49
9	31, 0	18, 50	1, 68
10	34, 5	17, 60	1, 96
11	38, 0	17, 50	2, 27
12	46, 2	18, 50	2, 57
13	54, 5	18, 00	3, 03
14	66, 0	19, 20	3, 44
15	76, 0	20, 60	3, 69

Tabella III. Idrogeno $\alpha = 31^0, 30'$

N.º d' ordine	Lunghezza di scintilla L	Calore C	Rapporti L : C
1	0	0, 0	
2	3, 7	2, 4	1, 54
3	11, 4	11, 3	1, 00
4	18, 0	10, 8	1, 67
5	24, 2	18, 7	1, 29
6	37, 9	18, 7	2, 03
7	56, 8	20, 0	2, 59
8	72, 7	19. 6	3, 70
9	80, 9	21, 1	3, 80

Le due tabelle precedenti sono disposte nel medesimo ordine della I. ed i risultati registrati nelle due ultime sono simili a quelli trascritti nella I.

Così noi scorgiamo che il calorico svolto dalla scintilla, tanto nell' ossigeno quanto nell' idrogeno, aumenta in principio con la lunghezza della scintilla e poscia rimane quasi costante. Ed inoltre, in sulle prime, l' aumento di calorico è quasi proporzionale alla lunghezza della scintilla, quando però questa non superi i 23 o 26^{mm}; come mostra la costanza dei rapporti L: C (Tav. II. e III.) considerati nei suindicati limiti. Per lunghezze di scintille maggiori delle predette noi vediamo dalle colonne C delle due ultime tavole, che il calorico svolto nel pallone è pressochè costante, sebbene la lunghezza delle scintille che l' ha prodotta abbia grandemente variata; laonde in questo secondo periodo il calorico svolto dalle scintille è quasi indipendente dalla loro lunghezza. Il che potrebbe dipendere o da un raffreddamento della scintilla dovuto al suo allungamento, e perciò alla diminuita intensità della corrente inducente, od anche forse ad altre cagioni non per anco ben determinate.

Un completo confronto può intanto farsi fra i risultati della tavola I. e quelli

inscritti nelle tabelle II. e III. essendo tutti stati ottenuti in circostanze analoghe, salvo l' intensità delle correnti adoperate che fu diversa nei vari casi. Ora una tale comparazione fra la tavola I. e II. fa scorgere che il riscaldamento prodotto da una medesima lunghezza di scintilla sia assai maggiore nelle esperienze relative alla Tavola II. che alla I. Così p. e. si rileva nella Tav. I. che ad una scintilla di 24^m, 6 corrisponde un riscaldamento di 6^0 del mio termometro, e nella Tav. II. ad una scintilla di 23^m corrisponde un riscaldamento di 15^0, 5, cioè quasi il triplo del precedente. E questo maggiore effetto termico della scintilla in questo ultimo caso dipende dall' essere essa stata prodotta da una piú energica induzione.

Le tre tabelle poi insieme considerate mostrano, come la relazione fra il calorico svolto dalle scintille e la loro lunghezza tiene in tutte il medesimo andamento. Così il periodo o legge di proporzionalità, fra il calorico e la lunghezza della scintilla, si appalesa nei dati di ciascuna tabella e cessa per l' idrogeno come per l' ossigeno, con corrente debole o forte, con una lunghezza di scintilla compresa presso a poco fra 24 e 30^{mm}: quindi segue il secondo periodo. E perciò può dirsi che il cessar dell' uno ed il cominciar dell' altro, sia quasi indipendente dalla natura del gas e dall' intensità della corrente inducente.

Nella tavola I. inoltre si rileva che il 2^0 periodo cessa con una lunghezza di scintilla di 71^{mm} circa, mentre che con una lunghezza di scintilla di 76 per la II. tav. e di 80^{mm} per la III. noi scorgiamo mantenersi sempre stabile il 2^0 periodo. Questo adunque può dirsi, che sebbene cominci con una lunghezza di scintilla quasi costante ed indipendente dalla energia dell' inducente, pure esso si prolunga assai di più con correnti forti che con correnti inducenti deboli. E tale prolungarsi del secondo periodo è in relazione evidentemente col fatto, che con corrente inducente energica le scintille indotte si producono di molta maggiore lunghezza che con corrente primaria debole. Noi adunque possiamo, generalizzando e riassumendo dire, che dalle precedenti esperienze risultano dimostrate le seguenti leggi o periodi relativi alle scintille d' induzione:

1° Per piccole lunghezze di scintille indotte il calorico svolto da esse cresce quasi proporzionalmente a dette lunghezze.

2° Per lunghezze maggiori di scintille il calorico svolto da esse è quasi costante ed indipendente da dette lunghezze.

3° Per lunghezze massime di scintille (*massime*, in relazione con l' intensità dell' inducente) *il calorico da esse prodotte decresce rapidamente col loro aumentarsi fino a diventar 0°*, quando la scintilla cessa di passare nel gas.

A viemeglio mettere sottocchio del lettore l' andamento ed il succedersi di questi tre periodi o fasi del fenomeno, ho coi dati delle tre precedenti tabelle, tracciate nella Tav. II. tre curve, contando sulle ascisse le semilunghezze delle scintille, e sulle ordinate il calorico svolto da esse; cioè le indicazioni termometriche corrispondenti: ed il numero che porta ciascuna curva corrisponde a quello della tabella i cui dati servirono a costruirla.

Le curve I. e II. relative all' ossigeno hanno un andamento perfettamente regolare e simile fra loro, sebbene nella II. i valori delle ordinate (calore) corrispondenti alla stessa ascissa della I. sieno molto maggiori che in questa. L' inflessione in entrambi le curve accade presso a poco alla medesima ascissa e perciò può ritenersi che per le due serie di esperienze il primo periodo cede al secondo presso a poco alla medesima lunghezza delle scintille. Del terzo periodo non vi è che una sola osservazione relativa alla curva I. indicata in *n*: nella quale curva i risultati furono ottenuti con debole corrente inducente, con la quale il terzo periodo si manifesta con scintille non eccessivamente lunghe. Nella curva II. invece detto periodo manca, imperocchè le esperienze relative ad essa furono fatte con corrente inducente molto energica, per la quale l' apparire del 3^0 periodo abbisognava di lunghezze di scintille troppo maggiori di quelle che le dimensioni del mio termometro a scintilla non permetteva ottenere.

Le medesime conclusioni valgono per la curva III., che si riferisce all' idrogeno; nella quale si scorge che il 1^0 periodo dà luogo al 2^0 presso a poco come e quando si verifica nelle due curve precedenti.

La spiegazione di questi periodi o leggi che segue il calorico generato dalle scintille di induzione di varia lunghezza, noi dobbiamo necessariamente ricercarla nei due fattori che concorrono a produrre il calorico stesso per mezzo della scintilla che balena in un medesimo gasse; e questi due fattori sono, primo la lunghezza della scintilla, e secondo la quantità di elettricità che la costituisce; circa le quali cose io ho già, nella mia memoria più volte citata, stabilito in modo sicuro che il calorico svolto dalla scintilla è (poste le altre cose eguali) proporzionale alla lunghezza della scintilla ed alla quantità di elettricità che la costituisce. Ora nelle esperienze più sopra citate, la lunghezza delle scintille era perfettamente misurata e quindi rimaneva a studiare solo come variava la quantità di elettricità che la formava al variare della lunghezza medesima.

È già noto che la scintilla indotta quando si allunga diventa poco luminosa e par che s' assottigli; e sicuramente la corrente che la produce deve variare di intensità con le diverse lunghezze della scintilla medesima. Però la legge con la quale varia la suddetta intensità, per quanto io mi sappia, non è ancora stata da alcuno investigata, e mi è parso utile, affine d' interpretare i fenomeni termici della scintilla, di istituire in proposito una serie di esperienze. Al quale scopo io feci passare la scarica d' induzione attraverso il mio solito termometro a scintilla (i cui elettrodi portati successivamente a varie distanze determinavano la lunghezza della scintilla) e poscia attraverso il galvanometro isolato come più sopra dissi. Le esperienze si praticavano nella maniera consueta e s' osservavano contemporaneamente gli effetti termici e galvanometrici che una scarica indotta produceva: e nella tabella seguente sono riportati i valori medi di 3 o più esperienze successive eseguite con ciascuna lunghezza di scintilla.

Tabella IV. Ossigeno Pallone B. Bussola $\alpha = 20^0, 48'$

N.° d' ordine	I Lunghezza di scintilla L	II Calore C	III Rapporti L : C	IV Derivazioni galvano-metriche D	V Prodotti L × D	VI Differenze
1	0, 0	0, 0		62, 0		
2	5, 7	1, 9	3, 00	20, 0	114	
3	9, 2	3, 0	3, 67	17, 6	162	
4	12, 5	4, 3	3, 12	14, 9	186	
5	19, 7	6, 5	3, 03	12, 5	246	
6	26, 7	7, 6	3, 51	10, 0	267	— 19
7	31, 4	8, 3	3, 78	9, 2	289	+ 03
8	38, 0	9, 8	3, 89	8, 0	304	+ 18
9	45, 2	8, 4	5, 38	6, 6	298 media = 286	+ 12
10	52, 5	8, 5	6, 18	5, 7	289	+ 03
11	57, 7	9, 6	5, 07	5, 0	289	+ 03
12	66, 0	7, 3	9, 11	4, 0	264	— 22
13	74, 0	2, 5	39, 60	2, 5	185	

Dai dati precedenti noi scorgiamo al solito, che il calorico svolto dalle scintille di diverse lunghezze, in principio cresce quasi proporzionalmente alle dette lunghezze, come bene si rileva dalla colonna III. nella quale i rapporti L: C sono quasi costanti fino alla 6^a o 7^a esperienza. Poscia il calorico svolto è indipendente da detta lunghezza, come si rileva dalla colonna II. nella quale il detto calore è pressochè costante dalla 7^a alla 12^a esperienza all' incirca. E da ultimo il calore rapidamente decresce dall' esp. 12^a alla 13^a. E con questi dati ho costruito la curva IV. che concorda con le precedenti, registrate nella Tav. II. ed alla quale curva appartiene il valore n' corrispondente al 3^0 periodo.

Nella colonna IV. della stessa Tavola sono riportate le deviazioni D del galvanometro, generate dalla scarica indotta, quando produceva scintille delle lunghezze indicate nella colonna I. Ora dall' esame della detta colonna IV. si scorge chiaro come le derivazioni galvanometriche decrescono al crescere della lunghezza della

scintilla; ossia decrescono al crescere dello strato d' aria che la corrente indotta deve attraversare. Ed io per meglio rilevare la legge di tale decremento ho trascritto nella colonna V. i prodotti L $\times$ D, delle lunghezze delle scintille per le deviazioni galvanometriche. Ora esaminando i valori contenuti in detta colonna si scorge, che per le prime 4 o 5 esperienze (corrispondenti alle minime lunghezze delle scintille), i suddetti prodotti vanno rapidamente aumentando, per cui si inferisce che le deviazioni D, decrescono più lentamente che non aumentano le lunghezze L. Poscia il prodotto L $\times$ D rimane pressocchè costante (esp. 6 a 12) percui si conclude che le deviazioni D, ossia le intensità della indotta sono in ragione inversa della lunghezza L delle scintille. E finalmente i detti prodotti rapidamente decrescono (Esp. 12^a a 13^a) e perciò le deviazioni galvanometriche e la intensità della corrente rapidissimamente decrescono, e presto si riducono a 0^0 con l' aumento di L.

Laonde noi qui possiamo ritenere, che relativamente alle deviazioni galvanometriche esistono ancora tre periodi, analoghi a quelli che si osservano rispetto al calorico e quindi anche qui potremo dire che:

1° Per piccole lunghezze di scintille indotte, la quantità di elettricità che le costituisce decresce pochissimo al crescere delle lunghezze di quelle.

2° Per lunghezze di scintille maggiori, la quantità di elettricità che le produce è in ragione inversa di dette lunghezze.

3° Finalmente per lunghezze di scintille ancora maggiori, la quantità di elettricità che le costituisce decresce ancora più rapidamente dell' aumento delle lunghezze di quelle.

Nè vuolsi qui mancare d' avvertire, che questi tre periodi, relativi alle deviazioni galvanometriche, sono perfettamente analoghi a quelli già indicati parlando del calorico svolto dalla scintilla: ed essi inoltre, nei due ordini di fenomeni, si manifestono e succedono insieme nelle medesime condizioni e per le medesime lunghezze di scintille, cosicchè sono fra loro strettamente collegati e dipendenti. E siccome io ho già dimostrato (1) che il calorico svolto dalla scintilla elettrica cresce proporzionalmente alla sua lunghezza, quando è d' intensità costante, ed alla quantità di elettricità che la produce, quando è di lunghezza costante, così riassumendo e collegando insieme i due ordini di fenomeni, del calorico cioè svolto dalle scintille e delle deviazioni galvanometriche, noi potremo dire che:

1° *Per scintille indotte di piccola lunghezza, il calorico svolto da esse cresce quasi proporzionalmente alla loro lunghezza, perchè allora la quantità di elettricità che le costituisce è quasi costante, scemando poco con lo allungarsi delle scintille.*

2° *Per scintille di maggior lunghezza, il calorico svolto da esse è quasi costante ed indipendente dalla loro lunghezza, perchè la quantità di elettricità che le costituisce, è quasi in ragione inversa della lunghezza delle scintille istesse.*

(1) Villari l. c.

3° *Finalmente per scintille di massima lunghezza, il calorico che esse svolgono decresce rapidamente col crescere della loro lunghezza, imperocchè allora la quantità di elettrico che le produce, decresce più rapidamente che non crescono le lunghezze suddette.*

Con lo studio delle leggi galvanometriche, che seguono le correnti indotte, noi siamo riusciti a darci ragione ed interpretare le leggi termiche delle scintille prodotte dalle medesime correnti. Ora ci rimane a spiegare come e perchè l' intensità della indotta varia nel modo indicato precedentemente; il che si potrebbe facilmente qualora al rocchetto indotto, considerato come una pila, si potessero applicare le note leggi di Ohm sulle correnti elettriche.

Ed in vero risulta dagli studi fatti sul rocchetto d' induzione, che il filo indotto nell' istante dell' induzione può considerarsi come una pila d' un enorme numero d' elementi, la forza elettromotrice della quale possiamo rappresentare con E, e la resistenza con R, quindi l' intensità I dell' indotta sarà

$$I = \frac{E}{R}$$

per un determinato rocchetto animato di una data corrente inducente, e supposto che i capi del filo indotto sieno riuniti direttamente fra loro. Nel caso invece che fra gli estremi del filo indotto s' introduca una determinata resistenza r, questa deve naturalmente entrare in calcolo, per la determinazione del valore di I, e quindi avremo in questo secondo caso per la legge di Ohm

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Il valore adunque di I dipende evidentemente da quello delle due resistenze R ed r, che potremo chiamare interna ed esterna.

Nelle mie esperienze più sopra descritte, la resistenza esterna del rocchetto era fatta da brevi fili congiuntivi di rame, e perciò di resistenza trascurabile, e dalla resistenza opposta dall' aria al passaggio della scarica; la quale resistenza può essere o piccola o grande, rispetto alla resistenza interna del rocchetto indotto, a seconda che la scintilla d' induzione è breve o lunga. Così per scintille di frazione d' un millimetro od anche di alcuni millimetri, il valore di r rispetto ad R può considerarsi come piccolissimo, e supponendolo anche trascurabile, il valore di I ci sarà dato con approssimazione dalla relazione

$$I = \frac{E}{R}.$$

Cioè in questo caso l' intensità dell' indotto sarà presso a poco costante ed indipendente da r, cioè dalla lunghezza della scintilla; e perciò il calorico svolto

da essa dovrà essere proporzionale alla sua lunghezza. Ciò si verifica appunto approssimativamente con le scintille brevi, ed abbiamo il 1° periodo notato più sopra.

Nè qui parmi per avventura arrischiata la supposizione, che la resistenza di uno strato d' aria, anche di parecchi millimetri, possa ritenersi come trascurabile rispetto alla resistenza interna del rocchetto indotto, imperocchè questa non deve calcolarsi in ragione della sua normale resistenza elettrica già per sè stessa grandissima, ma sì vero bisogna considerare che esso rocchetto indotto, nell' istante dell' azione inducente è sede di forze elettromotrici potentissime, le quali dirò (se mi è permesso il confronto) che a quella guisa di molteplici polarità secondarie, operando nell' interno del filo stesso, contrastano il passaggio dell' elettricità nel senso opposto a quello che in esso si svolge per l' induzione, e perciò nel momento che scatta la scintilla, la resistenza interna del rocchetto deve essere enorme.

Quando poi la scintilla aumenta molto di lunghezza, così che lo strato d' aria da quella percorsa diventa di sufficiente spessezza, la resistenza che esso oppone alla scarica crescendo in proporzione, presto rappresenta, con sufficiente approssimazione, la resistenza totale dell' intiero circuito d' induzione. Allora R può considerarsi come trascurabile rispetto ad r, ed I è dato approssimativamente della formola

$$I = \frac{E}{r}.$$

In questo caso adunque I è in ragione inversa di r, lunghezza della scintilla, come appunto con approssimazione trovasi confermato nello specchio IV fra gli altri (colonna V esp. 6 a 12); ed in tali limiti il calorico svolto dalla scintilla deve essere ed è infatti quasi indipendente dalla sua lunghezza: e perciò si manifesta il 2° periodo.

Finalmente crescendo ancora viemaggiormente la lunghezza della scintilla, e quindi avvicinandosi al limite della sua formazione, l' intensità della corrente scema rapidissimamente, ha luogo il 3° periodo, e poscia la resistenza dell' aria potendosi considerare infinita, per l' apparato che si adopera, l' intensità I della corrente diventa

$$I = \frac{E}{\infty} = 0,$$

così la scarica indotta più non passa ed abbiamo la fine del 3° periodo istesso.

L' applicazione della legge di Ohm a questi fenomeni delle scintille e delle scariche d' induzione parmi collega in un certo modo i fenomeni e le leggi delle scariche indotte a quelle delle correnti voltaiche. Ed inoltre siccome le scariche d' induzione sono collegate in ispecial modo, per l' esistenza del primo periodo notato da me e per molti altri fenomeni ancora, alle leggi termiche delle scariche dei condensatori, così queste vengono in una certa maniera collegate con le leggi delle correnti voltaiche.

Vero è però che sebbene una relazione esiste fra le scariche dei condensatori e quelle dei rocchetti, pure sembra a prima vista che fra questi due ordini di fenomeni passi una enorme differenza. Ed infatti è noto che la scarica d' un condensatore, quando dà luogo ad una scintilla nel circuito oltre quella contro lo scaricatore (1), detta scarica è sempre composta della medesima quantità di elettricità (poste le altre cose eguali) qualunque sia la lunghezza della prima scintilla che in detta scarica si forma. Invece nelle scariche del rocchetto, escluso il caso di scintille piccole (1° periodo), la quantità di elettrico che le forma decresce proporzionalmente al crescere della lunghezza della scintilla, e più rapidamente ancora. Percui può dirsi che mentre la scarica dei condensatori è indipendente dalla resistenza del circuito esterno, quella del rocchetto vi è in intima dipendenza. Tuttavia, comunque grande possa sembrare codesta differenza fra le due specie di scariche, pure essa a tutto rigore è più apparente che reale.

Ed invero non è punto esatto, ciò che si ritiene generalmente dai fisici, che la quantità di elettricità che forma la scarica d' un condensatore, sia indipendente dalla resistenza dell' arco scaricatore e dalla lunghezza delle scintille che nell' arco medesimo possono formarsi. Io ho dimostrato infatti in una lunga Memoria sulle scintille dei condensatori (2), che se la quantità di elettricità che forma la scarica d' un condensatore è costante, qualunque sia la lunghezza d' una scintilla che in essa si formi, ciò avviene essenzialmente ed unicamente a cagione d' una seconda scintilla, che nell' atto della scarica si produce contro lo scaricatore, che s' adopera per chiudere il circuito. Seconda scintilla non per anco stata presa in considerazione dai fisici, ma che è della massima importanza nello studio delle scariche dei condensatori medesimi.

Ora dalle mie citate ricerche risulta dimostrato, con due metodi diversi, che quando la scarica di un condensatore dà luogo ad una prima scintilla in un punto qualunque dell' arco congiuntivo, e ad una seeonda contro lo scaricatore col quale si chiude il circuito, avviene sempre e costantemente, che quando la prima delle due scintille s' allunga od accorcia, la seconda viceversa si accorcia od allunga d' una egual quantità, supposto simili gli estremi degli elettrodi dai quali le due scintille balenano. Da ciò se ne traggono fra le altre le due conclusioni seguenti:

1° La somma delle lunghezze delle due indicate scintille è costante:

2° La somma delle resistenze incontrate dalle due scintille nell' aria è costante.

E per quest' ultimo principio possiamo dire, che nel caso che la scarica d' un condensatore formi una o più scintille di varia lunghezza, per la compensazione che vi apporta quella contro lo scaricatore, si ha sempre che la resistenza totale incontrata da esse nell' aria è costante, e quindi la scarica deve sempre essere formata da una stessa quantità di elettricità, supposto tutte le altre cose uguali.

(1) Vedi Villari l. c.

(2) Villari ricerche termiche ecc. Acc. d. Lincei Roma 1879.

Questi risultati semplici ed evidenti, mettono il fenomeno delle scariche dei condensatori sotto la sua vera luce, e rendono possibile d' apprezzar e stabilir meglio le analogie fra le scariche dei condensatori e quelle dei rocchetti di induzione. Per lo che io cercai di sperimentare con le scariche d' induzione in condizioni analoghe a quelle nelle quali si verificano le scariche dei condensatori: e perciò introdussi nel circuito del rocchetto indotto due de' miei soliti termometri a scintilla, con elettrodi mobili terminati internamente con palline di platino di circa 2^{mm} di diametro. I due termometri erano ripieni di azoto secco, e la distanza somma degli elettrodi, internamente ai due termometri, nelle varie esperienze fu tenuta costante, modificandola in ciascun termometro sempre d' egual qnantità, ma in senso inverso. Quindi per entro ai due palloni facevo passare la scarica, la quale traversando degli strati d' aria d' una grossezza somma costante, incontrava sempre la medesima resistenza, come appunto accade per le scariche dei condensatori. Le esperienze le ho riputate tre o più volte per ciascuna lunghezza di scintilla nei due palloni, ed in ciascuno di essi ho misurato il calorico svolto, e le medie di ogni serie di misure le ho trascritte nello specchio seguente: ho fatto inoltre alcune misure galvanometriche, che sono anch' esse riportate nello stesso specchietto. In queste esperienze il rocchetto era attivato da quattordici elementi Bunsen, medio modello, disposti in due serie.

Tabella V. — Azoto

Numero d' ordine	Pallone A.		Pallone E.		Rapporti		Somme		Galvanometro
	Lunghezza di scintilla L	Calore C	Lunghezza di scintilla $L_{,}$	Calore $C_{,}$	$L : C$	$L_{,} : C_{,}$	$L + L_{,}$	$C + C_{,}$	D
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	101, 8	16, 8	0	0. 0	6, 1		101, 8	16, 8	
2	96, 8	14, 4	5	1, 0	6, 7	5			3, 4
3	91, 8	14, 2	10	3, 0	6, 5	3, 3		17, 2	
4	86, 8	13, 3	15	4, 0	6, 5	3, 8		17, 3	
5	81, 8	13, 6	20	5, 3	6, 5	3, 8		17, 9	
6	76, 8	12, 3	25	7, 0	6, 2	3, 3		19, 3	
7	71, 8	11, 1	30	8, 5	6, 5	3, 5		19, 6	
8	66, 8	9, 3?	35	9, 6?					3, 5
9	61, 8	8, 1	40	11, 5	7, 6	3, 7		19, 6	
10	56, 8	8, 0	45	12, 5	7, 1	3, 6		20, 5	
11	51, 8	6, 6	50	16, 0	7, 8	3, 1		21, 5	
12	46, 8	5, 6?	55	18, 5?		3, 0			3, 3

Nella tabella qui sopra riportata sono trascritti i risultati ottenuti con due termometri A ed E. Nel primo la scintilla di $101^{mm}, 8$ si è mano mano diminuita di 5^{mm} per volta, fino a 6, 8: e nel secondo si è d' altrettanto accresciuta, da 0 a 55^{mm}: il calore nel primo, colonna II, è andato continuamente scemando, mentre nel secondo, colonna IV, s' è continuamente accresciuto. Nelle colonne V e VI ho trascritto i rapporti L : C ed $L_{,}$: $C_{,}$ fra la lunghezza L della scintilla ed il calorico C svolto nel primo pallone e fra i valori analoghi $L_{,}$ e $C_{,}$ relativi al secondo pallone: nella colonna VII è riportata la somma della lunghezza delle scintille nei due palloni, che fu costantemente $108^{mm}, 8$; nella VIII sono indicate le somme dei calori $C + C_{,}$ svolte nei due palloni contemporaneamente; e da ultimo nella IX colonna sono indicate le deviazioni galvanometriche prodotte dalla scarica indotta.

L' esame dei numeri precedenti ci mostra, che le deviazioni galvanometriche osservate in diversi momenti dell' esperienze sono state costanti, colonna IX, e perciò la corrente è rimasta sempre della medesima intensità in tutto il corso dell' esperienze medesime, cosa d' altronde naturalissima, imperocchè in esse la lunghezza somma delle scintille e la resistenza del circuito sono rimaste sempre invariate.

Le osservazioni relative al pallone A ci mostrano inoltre che col decrescere della distanza degli elettrodi in esso (colonna II) il calorico C svolto va scemando nella medesima proporzione, in maniera che il rapporto L : C, fra la lunghezza della scintilla ed il calorico suddetto, è costante (colonna V). Una osservazione consimile può farsi rispetto al termometro E; ed infatti noi scorgiamo del pari che il rapporto $L_{,}$: $C_{,}$ fra le lunghezze delle scintille in esso termometro ed il calore che vi si svolge è costante (colonna VI). Cosicchè può, per le due serie di esperienze precedenti, stabilirsi la legge seguente:

Il calorico svolto dalla scintilla d' induzione è, coeteris paribus, *in ragione diretta della sua lunghezza.*

La quale legge è la stessa che io dimostrai verificarsi nelle scintille delle scariche dei condensatori; e perciò, per ragioni affatto analoghe a quelle esposte nella mia precedente Memoria (1), noi qui possiamo enunziare i due seguenti corollari relativi alla scintilla d' induzione, considerata nelle condizioni qui sopra esposte.

a) *La temperatura della scintilla elettrica d' induzione nei vari suoi punti è costante ed indipendente dalla sua lunghezza.*

b) *La resistenza opposta dai gassi alla scintilla d' un induttore è proporzionale alla grossezza dello strato gassoso percorso dalla scintilla istessa.*

Dalla colonna VIII ove, come si disse, sono riportate le somme dei calori svolti nei due palloni A ed E, si vede che esse sono quasi costante. Ed ho detto *quasi* imperocchè i due palloni e le due scintille in essi non essendo eguali, le loro indicazioni non potevano avere i medesimi valori, per una stessa lunghezza di scintilla, e perciò la somma dei calori svolti doveva risentirsi sempre di quello dei due che dava indicazioni più cospicue.

Per ottenere nei due palloni risultati che meglio fra loro potevano confrontarsi io rifeci le precedenti ricerche, avendo avuto cura di sperimentare con scin-

tille eguali successivamente in ciascuno di essi; e ciò ottenni facendo nelle diverse esperienze variare in senso inverso la distanza degli elettrodi in ciascun pallone da 0^{mm} a 55^{mm}; ed i risultati sono trascritti nella tabella seguente, che è in tutto e per tutto simile alla precedente. Siccome però il pallone $E_,$ era più sensibile di quello A, e tale che le sue indicazioni erano di valore doppio, così nella colonna VII vi sono trascritte le somme $C + \frac{1}{2} C_,$ del calorico C svolto in A, e della metà $\frac{1}{2} C_,$ svolto nel termometro E, onde non fare in dette somme predominare le indicazioni dell' uno sull' altro.

Tabella VI — Azoto

Termometro A		Termometro E		Rapporti		Somme dei calori	Somma delle scintille	Deviazioni galvanometriche
Lunghezza di scintilla L	Calore C	Lunghezza di scintilla $L_,$	Calore $C_,$	L : C	$L_, : C_,$	$C + \frac{1}{2} C_,$	$L + L_,$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
0^{mm}	0	55^{mm}	23, 0	5, 8	2, 4	11, 5	55^{mm}	
5	0, 8	50	21, 6	6, 2	2, 3	11, 5	"	
10	1, 7	45	21, 2		2, 4	12, 3	"	
15	3, 0	40	18, 4	5, 0	2, 1	12, 2	"	
20	4, 0	35	17, 0	5, 0	2, 1	12, 5	"	
25	5, 1	30	14, 8	4, 9	2, 0	12, 5	"	3, 8
30	6, 8	25	11, 0	4, 4 (media 4,5)	2, 3	12, 3	"	
35	7, 8	20	8, 0	4, 5	2, 5	11, 8	"	
40	9, 2	15	5, 4	4, 3	2, 8	11, 9	"	
45	11, 5	10	3, 6	3, 9	2, 7	13, 3	"	
50	12, 0	5	1, 6	4, 2	3, 0	12, 8	"	
55	12, 8	0	0, 0		media 2,4	12, 8	"	3, 6
						media 12, 3		

L' esame di quest' ultima tabella conduce a risultati analoghi a quelli ricavati dalla tabella V indicati più sopra. Così noi osserviamo che la somma delle due scintille essendo rimasta sempre costantemente eguale a 55^{mm}' le somme dei calori

$C + \frac{1}{2} C_{,}$ svolte nei due palloni fu del pari costante ed eguale a 12, 3 in media; nel mentre che le deviazioni galvanometriche, colonna IX, e perciò l' intensità della corrente indotta rimasero sempre le medesime. Si rileva inoltre che i diversi rapporti $L : C$ ed $L_{,} : C_{,,}$ fra le lunghezze delle scintille L ed $L_{,}$ ed i calori C e $C_{,,}$ svolti nei due palloni furono pochissimo diversi dalle medie e devono ritenersi come costanti, specialmente se non si tien conto delle due o tre prime osservazioni, relative al termometro $A_{)}$ e corrispondenti alle piccolissime ed incerte sue indicazioni. Dai quali risultati, che confermano quelli indicati più sopra e ricavati dalla penultima tavola, noi possiamo con sicurezza stabilire le seguenti leggi.

1° *Quando la scarica indotta produce due scintille di lunghezza somma costante* (qualunque sieno le rispettive lunghezze) *la quantità di elettricità che costituisce la scarica è costante.*

2° *La resistenza totale incontrata dalle due scintille di lunghezza somma costante è costante.*

3° *Il calorico totale svolto dalle due scintille di lunghezza somma costante, è invariabile, qualunque sieno le lunghezze relative delle due scintille.*

Le quali leggi sono perfettamente analoghe a quelle state ritrovate da me per la scarica dei condensatori, quando esse producono del pari due scintille, una cioè nell' arco congiuntivo interotto in un punto qualunque, ed una seconda contro lo scaricatore che serve a chiudere il circuito. — Le leggi adunque della scarica dei condensatori sono analoghe interamente a quelle degli induttori, e queste scariche si comportano in alcuni rapporti come le correnti delle pile.

Per ultimare questo studio sulle scintille indotte bisogna ricercare la legge con la quale cresce il calorico svolto da esse al crescere della corrente che le produce; ed io già mi sono occupato di questa quistione, e ne ho discorso nella mia breve Nota anticipata, presentata il 18 maggio 1879 all' Acc. d. S. di Bologna. In questo anno inoltre ho molto esteso le mie ricerche in proposito e credo meglio, per non allungar troppo questo scritto, di trattare a parte questa quistione interessante, relativa alle scintille indotte: e perciò senza più qui passo a ricordare in breve le cose principali esposte in questa memoria.

Riassunto:

Il calorico, svolto dalle scintille d' induzione che hanno luogo nei gassi, si manifesta seguendo tre fasi o periodi diversi che sono i seguenti:

1° Il calorico svolto da scintille brevi è quasi proporzionale alla loro lunghezza.

2° Il calorico svolto da scintille di media lunghezza è quasi costante ed indipendente dalla lunghezza stessa.

3° Il calorico svolto da scintille lunghissime decresce rapidamente fino a 0 col crescere di detta lunghezza.

Questi tre periodi sono, naturalmente in relazione con l'intensità della corrente che forma la scintilla indotta; ed avendo io studiato e misurato codesta intensità, ho trovato che essa analogamente al calore, dà luogo ai tre periodi seguenti:

1° L'intensità della corrente indotta per brevi scintille è quasi costante ed indipendente dalla loro lunghezza.

2° L'intensità della corrente indotta per scintille di media lunghezza è presso a poco in ragione inversa della loro lunghezza.

3° L'intensità dell'indotta, per scintille lunghissime decresce rapidamente sino a 0° col crescere della loro lunghezza.

Questi tre periodi, relativi al calore ed alla intensità delle correnti, che si succedono e corrispondono completamente, non sono fra loro separati e distinti in maniera affatto assoluta, ma si succedono e sostituiscono lentamente l'uno all'altro.

La interpretazione del succedersi dei periodi rispetto al calore si ricava da quelli relativi alla intensità della corrente indotta.

Ed invero avendo, con altre mie esperienze, dimostrato che il calorico svolto dalle scintille è proporzionale alla loro lunghezza ed alla quantità di elettricità che la forma ne segue, che per piccole scintille indotte la corrente che le forma essendo quasi costante ed indipendente dalla loro lunghezza, il calorico che esse scintille svolgono deve crescere quasi proporzionalmente alle dette lunghezze; ed abbiamo così il 1° Periodo. Per lunghe scintille la intensità della corrente indotta essendo presso a poco inversa alla loro lunghezza, avviene che il calore da esse prodotto deve essere indipendente da detta lunghezza, e si manifesta così il 2° Periodo. Finalmente per scintille lunghissime l'intensità della corrente decrescendo rapidissimamente sino a 0°, avviene che anche il calorico che esse svolgono deve decrescere con eguale rapidità sino a 0° al crescere della lunghezza delle medesime scintille, e quindi abbiamo il 3° Periodo più sopra notato.

I tre periodi poi che si manifestano nella intensità della corrente si possono alla lor volta interpretare qualora si consideri il filo indotto come una pila d'un gran numero di elementi e ad essa s'applichino le leggi e le formole di Ohm.

A completare lo studio delle proprietà termiche della scintilla indotta è stato necessario di esaminarne una, formata sempre d'una quantità costante di elettricità. A tale scopo si facevano produrre dalla scarica indotta due scintille, ognuna delle quali scoccava in uno dei miei termometri a scintilla. Questi termometri avevano mobili i loro elettrodi, così che si potevano spostare variamente nelle diverse misure: e le esperienze furono condotte in modo che la somma delle distanze degli estremi dei sudetti elettrodi, e perciò la lunghezza somma delle scintille che da essi scoccavano rimaneva sempre e costantemente la medesima. In cotal maniera operando si constatò:

1° Che al variare della lunghezza di ciascuna delle due scintille (di lunghezza somma costante) l'intensità della corrente indotta rimaneva costante;

Quindi

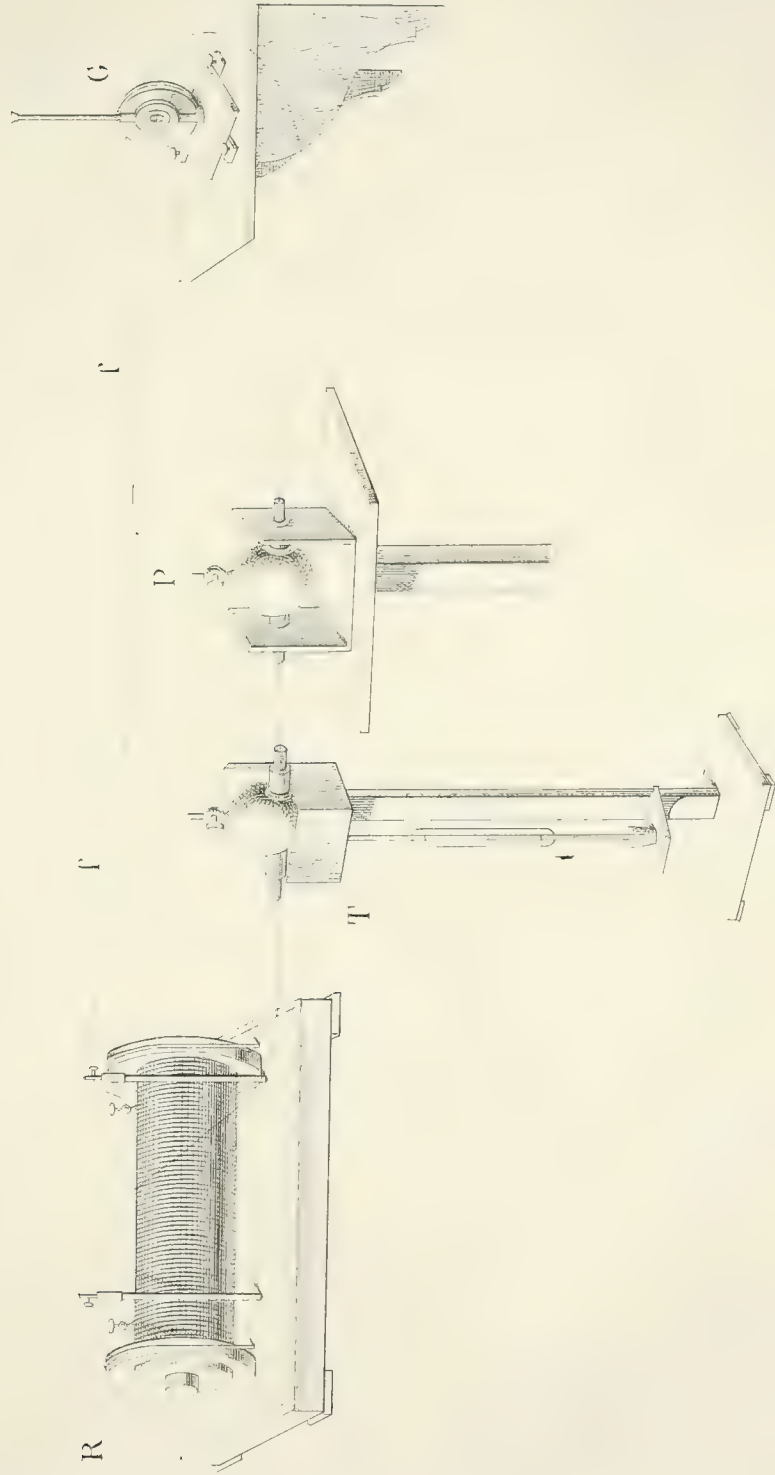
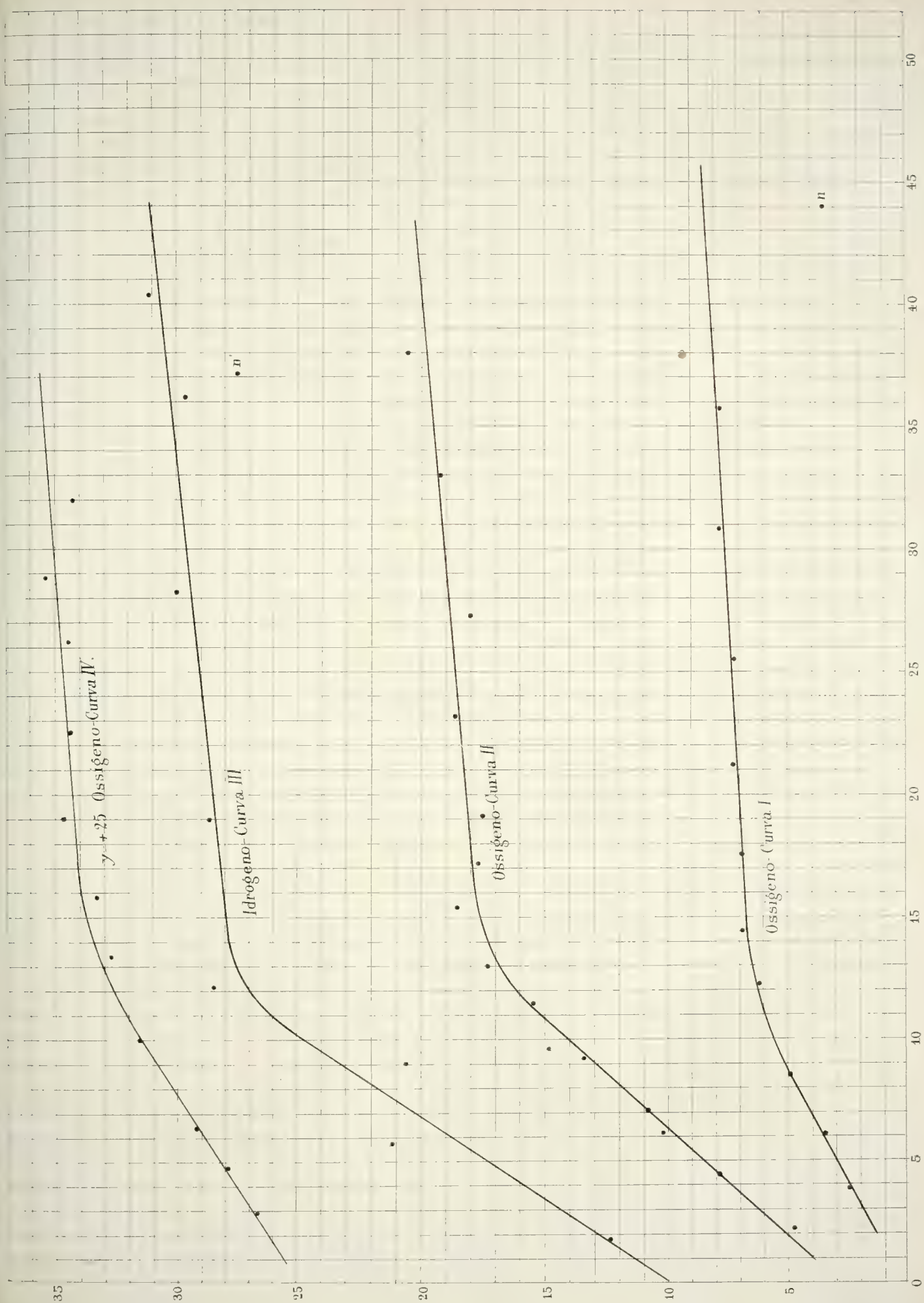
2° La resistenza somma dei due strati d'aria (di spessezza totale costante) percorso dalle due scintille è costante.

3° Il calore svolto da ciascuna delle due scintille, d'intensità costante, è proporzionale alla loro lunghezza.

E perciò

4° La temperatura di ciascuna di dette scintille è indipendente dalla loro rispettiva lunghezza.

5° La resistenza che ciascuna di esse incontra nell' aria è proporzionale alla grossezza dello strato che attraversa.

Questi risultati sono perfettamente simili a quelli che si riferiscono alla scintilla elettrica d' un condensatore, prodotta nell' arco congiuntivo interrotto in un dato suo punto, fatta astrazione però dalla scintilla che ha luogo contro lo scaricatore, che stabilisce le comunicazioni: imperocchè questa ha proprietà affatto diverse. Laonde può affermarsi esistervi completa analogia fra le proprietà della scintilla indotta e quella dei condensatori ordinari: le quali per tale analogia vengono in un certo qual modo messe in relazione coi fenomeni delle correnti della pila voltaica.

R

f

T

f

P

G

F. Liuzzi dis.

C. Bettini inc.

y + 25 Ossigeno-Curva IV.
Idrogeno-Curva III
Ossigeno-Curva II
Ossigeno-Curva I
n'
n
35
30
25
20
15
10
5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

SULLE

PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLE TRAIETTORIE ORTOGONALI

DELLE GENERATRICI DELLE SUPERFICIE RIGATE

MEMORIA

del Professor ANTONIO FAIS

(Letta nella sessione ordinaria delli 20 Novembre 1879)

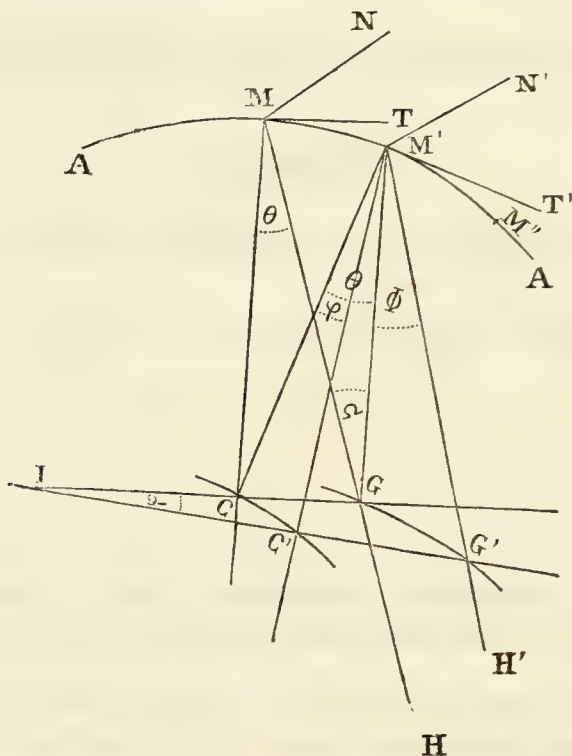
§ 1.°

Nozioni sulla curvatura geodetica e sulla torsione geodetica delle traiettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate.

Si abbia una superficie rigata che in generale supporremo gobba; e sulla medesima si supponga tracciata la linea $MM'M''\dots$ (Fig. 1ª) traiettoria ortogonale delle generatrici di quella; la qual linea chiameremo A. Nel punto qualunque M di questa linea consideriamo la sua toccante MT, la normale principale MC; come pure la generatrice MH della superficie e la normale MN esterna (*) a quest'ultima. Sia poi C il centro di curvatura della A relativo al punto M, cosicchè MC rappresenta il raggio di curvatura in questo punto, raggio che chiameremo ρ; ed ICG sia l'asse polare (cioè del circolo osculatore della A in M), il quale incontra nel punto G la generatrice MH. Analogamente pel punto M' infinitamente vicino al punto M, e posto rispetto a questo dalla parte dalla quale si suppone crescano gli archi della A e delle altre traiettorie ortogonali della superficie, consideriamo la toccante $M'T'$ alla A, la normale principale $M'C'$, la generatrice $M'H'$ e la normale $M'N'$ esterna alla superficie. Sia inoltre C' il centro di curvatura della A relativo al punto M', ed $IC'G'$ l'asse polare (cioè del circolo osculatore della A in M') corrispondente, il quale incontra nel punto G' la generatrice $M'H'$.

(*) Per *regione esterna* d'una superficie intendiamo quella in cui giacciono tutti i punti dello spazio pe' quali il 1° membro dell'equazione della superficie acquista il segno positivo; intendiamo poi per *normale esterna* condotta ad una superficie in un suo punto la normale condotta per quel punto nella regione esterna di quella superficie.

Infine conduciamo le rette $M'C$ ed $M'G$ che giaceranno nel piano normale alla A nel punto M', insieme alle rette $M'C'$, $M'H'$ ed $M'N'$ già considerate.

Figura 1ª

Consideriamo l' angolo CMN che la normale MN fa col raggio di curvatura MC (**); lo chiameremo λ, e lo considereremo come positivo ovvero negativo, secondochè il raggio MC nel descriverlo ruota attorno al punto M dalla sinistra alla destra, oppure dalla destra alla sinistra di chi guardasse quel raggio tenendo i piedi in M, e l' occhio nel punto qualunque T della tangente MT. Così parimenti considereremo come positivo ovvero negativo l' angolo CMG, posto nello stesso piano dell' angolo CMN, secondochè il raggio MC nel descriverlo ruota attorno al punto M nel 1° ovvero nel 2° senso testè indicato; e lo chiameremo θ. In grazia di queste convenzioni potremo per tutti i casi porre $\lambda = \theta + 90°$.

Convenzioni analoghe alle precedenti intendiamo fatte per gli angoli $CM'C'$, $C'M'G'$, $CM'G$, $GM'G'$ (**) posti tutti nel piano normale alla A nel punto M', ed aventi per vertice comune questo punto.

(**) Considereremo le rette MC, MG, MN come diramantisi dal punto M, e le rette $M'C$ $M'C'$ $M'G$ ed $M'G'$ dal punto M'. Quanto ad un angolo qualunque XYZ avente il vertice in Y lo intenderemo descritto col rotare del lato YX attorno ad Y fino a coincidere coll' altro lato YZ.

In ultimo notiamo che l'angolo θ, più sopra definito, misura l'inclinazione del piano osculatore alla linea A nel punto M col piano tangente alla superficie nello stesso punto; e che per conseguenza $\frac{\cos\theta}{\rho}$ è l'espressione della curvatura geodetica della linea A in quel punto.

Ciò premesso, osserviamo che dal triangolo MCG rettangolo in C si ha $MG = \frac{MC}{\cos CMG} = \frac{\rho}{\cos\theta}$. Laonde possiamo dire che il segmento MG rappresenta il raggio della curvatura geodetica della linea A nel punto M, raggio che chiameremo P. Se poi chiamiamo S l'arco della stessa linea contato da un' origine arbitraria e terminato in M, e con dS denotiamo il suo differenziale (ossia la lunghezza dell' elemento MM' assunto come infinitesimo del 1° ordine) allora $\frac{dS}{\mathrm{P}}$ varrà l'angolo di contingenza geodetica, che indicheremo con Ω. Inoltre sappiamo che il settore curvilineo ed infinitesimale MGM' si può considerare come settore circolare contenuto da un arco che ha il centro in G ed è tangente in M alla linea A, e dai due raggi GM e GM'. Pertanto il rapporto $\frac{dS}{\mathrm{P}}$ è eziandio misura dell' angolo MGM', il quale perciò sarà di quì innanzi da noi considerato come eguale all' angolo Ω di contingenza geodetica.

Come il segmento MG rappresenta il raggio P di curvatura geodetica della linea A nel punto M, così il segmento $M'G'$ rappresenta il raggio $\mathrm{P} + d\mathrm{P}$ della curvatura geodetica della stessa linea nel punto M'. Osservo inoltre che l'angolo $CM'C'$ (trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al 1°) è eguale all'angolo della torsione ordinaria della linea A nel punto M, angolo che diremo φ; come pure osservo che l'angolo $C'M'G'$ misura l'inclinazione del piano osculatore alla A nel punto M' col piano tangente alla superficie proposta nello stesso punto; e però potremo indicarlo con $\theta + d\theta$. In ultimo considero che i 2 triangoli rettangoli MCG ed $M'CG$ sono eguali, poichè $MC = M'C = \rho$, ed $MG = M'G = \mathrm{P}$: laonde avremo $\wedge\, CM'G = \theta$.

Ciò posto, possiamo calcolare il valore dell' angolo infinitesimale $GM'G'$, il quale, trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al 1°, eguaglia (*) quello che

(*) I geometri moderni, seguendo il Bonnet, intendono per *torsione geodetica* di una curva tracciata sopra una superficie in un suo punto M il quoziente che si ottiene dividendo l'angolo che la normale esterna alla superficie nel punto M' di quella curva infinitamente vicino ad M fa col piano che contiene la normale esterna alla superficie in M e l'elemento MM', per la lunghezza di questo stesso elemento. Tale angolo è misurato da quello che la normale in M' fa colla sua proiezione ortogonale sul detto piano. Io lo chiamerò angolo della torsione geodetica che la curva proposta ha nel suo punto M.

Ciò premesso, osservo che nel caso che qui si considera d'una traiettoria ortogonale A delle generatrici d'una superficie rigata, il piano $CM'G'$ (V. Fig. 1ª) normale alla A nel punto M' si

la normale $M'N'$ alla superficie proposta nel punto M' fà col piano che contiene la normale MN e l' elemento MM', ossia l'angolo della torsione geodetica della linea A nel punto M. Chiamando Φ quest' angolo, $\frac{\Phi}{dS}$ misura la torsione geodetica, e $\frac{dS}{\Phi}$ sarà perciò il raggio di torsione geodetica, che chiameremo R. Intanto per trovare il valore della Φ osserviamo che, poichè le 4 rette $M'C$, $M'C'$, $M'G$, $M'G'$ giacciono nel medesimo piano, si ha nel caso della fig. 1ª

$$CM'G + GM'G' = CM'C' + C'M'G' \quad ;$$

e quindi, in grazia delle notazioni prestabilite,

$$\theta + \Phi = \varphi + \theta + d\theta \quad ; \text{ ossia}$$

$$\Phi = \varphi + d\theta \quad ; \qquad (1)$$

nella quale relazione il $d\theta$ può avere il segno positivo o negativo. Nella figura si è supposto che la $M'G'$ cada dentro l'angolo $GM'N'$: se cadesse fuori di questo, e dentro l' angolo $CM'G$, allora si avrebbe

$$CM'G - G'M'G = CM'C' + C'M'G' \quad ;$$

ossia

$$\theta - \Phi = \varphi + \theta + d\theta \quad ; \text{ d' onde}$$

$$\Phi = -[\varphi + d\theta] \quad .$$

È però da notare che in questo caso il $d\theta$ sarebbe necessariamente negativo.

può ritenere perpendicolare sia al piano MGM', come al piano NMM'. Laonde quel piano $CM'G'$ si potrà considerare come quello che proietta ortogonalmente la normale $M'N'$ alla superficie nel punto M' sopra il piano NMM'; ed allora è chiaro che la generatrice $M'G'$, la retta $M'G$, la normale $M'N'$ e la sua proiezione sono 4 rette giacenti nel detto piano $CM'G'$; e che inoltre come la $M'G'$ è perpendicolare alla $M'N'$, così la $M'G$ (intersezione del piano $CM'G'$ col piano MGM') è perpendicolare alla proiezione di quest'ultima. Da ciò deriva che l'angolo $GM'G'$ è eguale a quello che la $M'N'$ fa colla sua proiezione; e quindi, in virtù di ciò che abbiamo detto più sopra, all' angolo della torsione geodetica della traiettoria A nel punto M.

N.-B. Ciò che ora abbiam detto sussiste in quanto nelle questioni che tratteremo gli infinitesimi d' ordine superiore al 1° si possono trascurare in confronto delle quantità finite e degli infinitesimi del 1° ordine.

Inoltre notiamo che dalla definizione che qui si dà della torsione geodetica, risulta che dessa è nulla per tutti i punti di una curva, la quale sia linea di curvatura della superficie proposta. Quest' osservazione ci servirà più innanzi.

Poichè si ha $\lambda = \theta + 90°$, nella relazione (1) possiamo al $d\theta$ sostituire anche il $d\lambda$, ed avremo

$$\Phi = \varphi + d\lambda.$$

Ciò premesso, e prima di passare alla ricerca delle proprietà generali delle traiettorie ortogonali delle generatrici della superficie rigata proposta, dedurrò alcune formule differenziali relative alla linea GG'..... luogo geometrico dei punti d' intersezione di quelle generatrici cogli assi dei circoli osculatori della linea A traiettoria ortogonale delle medesime. A tal' uopo osserviamo che al triangolo $M'GG'$ si possono applicare quelle stesse considerazioni che dagli autori si sogliono fare relativamente ai settori delle curve piane riferite a coordinate polari. Pertanto riteniamo il punto M' come polo, ed i segmenti $M'G = \mathrm{P}$, ed $M'G' = \mathrm{P} + d\mathrm{P}$ come raggi vettori consecutivi fra loro inclinati dell' angolo Φ, e che terminano all' estremità dell' elemento lineare GG' della linea suddetta. Laonde denotando con σ l' arco di questa linea corrispondente all' arco S della traiettoria A, e quindi terminato nel punto G, potremo rappresentare con $d\sigma$ l' elemento GG' in questione, e calcolarne il valore per mezzo della nota formula che dà il differenziale dell' arco delle curve piane in coordinate polari. Pertanto si avrà

$$d\sigma^2 = \mathrm{P}^2\,\Phi^2 + \overline{d\mathrm{P}}^2 \quad ;$$

formula che comprende come caso particolare quella del Molins relativa alle linee dei centri di curvatura delle curve gobbe.

Cerchiamo ora di determinare l' angolo $M'G'G$ che l' elemento GG' fa colla generatrice $M'G'$ che passa per l' estremità G' del medesimo, angolo che diremo γ. A quest' uopo applichiamo la formula che per le curve piane riferite a coordinate polari somministra la tangente trigonometrica dell' angolo che la toccante alla curva fa col raggio vettore che và al punto di contatto; e ciò considerando l' angolo Φ come differenziale dell' ascissa angolare, come abbiam fatto più sopra. Per tal modo si ottiene immediatamente

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\mathrm{P}\Phi}{d\mathrm{P}} \quad .$$

Per altra parte considerando il triangolo $M'GG'$ se ne ricava

$$\operatorname{sen} \gamma : \operatorname{sen} \Phi :: M'G : GG' \quad ;$$

e quindi

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\mathrm{P} \operatorname{sen} \Phi}{d\sigma} \quad .$$

Dividendo membro a membro le 2 equazioni ottenute, si ricava

$$\cos\gamma = \frac{dP}{d\sigma} \times \frac{\text{sen}\,\Phi}{\Phi} \quad ;$$

e poichè, trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al 1°, si ha $\frac{\text{sen}\,\Phi}{\Phi} = 1$, così si ottiene

$$\cos\gamma = \frac{dP}{d\sigma} = \frac{dP}{\sqrt{P^2\Phi^2 + \overline{dP}^2}} \quad .$$

§ 2°

Formule relative a 2 traiettorie ortogonali delle generatrici d'una superficie rigata — Applicazione di queste formule al calcolo della curvatura delle superficie gobbe.

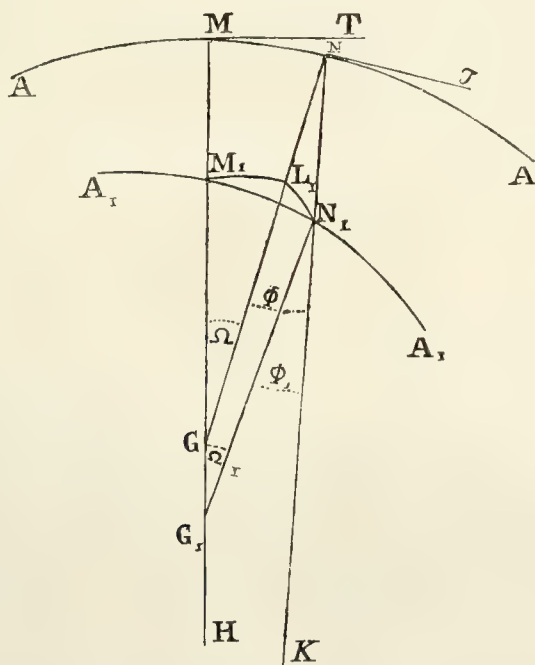
Mi propongo ora di applicare le definizioni date nel § precedente per dedurre, per mezzo di semplici considerazioni di geometria infinitesimale, diverse relazioni che passano fra i raggi di curvatura geodetica e di torsione geodetica di 2 traiettorie ortogonali delle generatrici d'una superficie rigata, che in generale supporrò gobba. Per tal via giungerò facilmente a parecchie formule già date dal Bonnet e da altri; come pure nè troverò qualcuna, che, per quanto io sappia, non fù da altri enunciata.

Delle relazioni che in questo e nei successivi paragrafi dedurrò si può in genere dire che comprendono come caso particolare le formule relative alle curve che hanno per normali principali le generatrici d'una superficie gobba. Il metodo di deduzione poi che seguirò in questo 2° paragrafo è analogo a quello già da me adoperato nella Nota relativa alle curve gobbe aventi le stesse normali principali (*).

Supponiamo di avere 2 linee A ed A_1 le quali sieno traiettorie ortogonali delle generatrici d'una superficie rigata; e sieno M ed M_1 (V. fig. 2ª) due punti di una qualunque MH di queste generatrici; e de' quali il primo sia posto sulla A ed il 2° sulla A_1. Diciamo a la distanza MM_1 da assumersi come positiva, ovvero come negativa, secondochè M_1 giace rispetto ad M dalla parte della quale giace il punto G intersezione dell'asse del circolo osculatore alla A nel punto M con quella generatrice, ovvero dalla parte contraria. Quella distanza a, in virtù d'un

(*) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna — Serie III, tomo 8°.

noto teorema del Gaus, deve essere la stessa qualunque sia la generatrice che si considera. Sia poi N un punto della linea A infinitamente vicino al punto M, e posto rispetto a questo dalla parte stessa dalla quale crescono gli archi di quella linea (e di tutte le traiettorie ortogonali delle generatrici): e sia N_1 il punto corrispondente della linea A_1; cioè il punto in cui questa linea taglia la generatrice NK che passa pel punto N ed è quindi successiva ed infinitamente vicina alla generatrice MH, ed al pari di questa comune normale alle 2 traiettorie. I segmenti MG ed NG sono eguali fra loro, ed eguali al raggio P di curvatura geodetica della A nel punto M; l' angolo MGN da essi formato è eguale all' angolo Ω di contingenza geodetica nello stesso punto, ed infine l' angolo GNK è eguale all' angolo Φ della torsione geodetica. Inoltre osserviamo che il piano GNK è normale alla linea A nel punto N, ed è quindi perpendicolare al piano GNJ che è tangente alla superficie proposta in quel punto, ed è inclinato d' un angolo infinitesimale del 2° ordine sul piano MGN. Possiamo quindi dire che quel piano normale fa con quest' ultimo piano un angolo retto, ove si trascuri la differenza che è infinitesimale del 2° ordine. — Ciò posto, fatto centro nel punto G con raggio GM_1 si descriva l'archetto infinitesimale M_1L_1 che riescirà perpendicolare in L_1 alla retta NG; fatto poi centro nel punto N si descriva l' archetto infinitesimale N_1L_1 che pur esso riescirà perpendicolare in L_1 a quella retta. Per tal modo

Figura 2ª

otteniamo un triangolo curvilineo $M_1L_1N_1$ avente i 3 lati infinitesimali e l'angolo $N_1L_1M_1$ che si può ritenere come retto, ove si trascurino gli infinitesimi d'ordine

superiore al 1°. Laonde potremo ritenere quel triangolo come rettilineo e rettangolo nel vertice L_1: il suo angolo acuto $N_1M_1L_1$ misura l' inclinazione dell' elemento M_1N_1 della traiettoria A_1 sull' archetto circolare M_1L_1, e quindi sull' elemento MN della traiettoria A, il quale è parallelo a quell' archetto; epperciò misura l' inclinazione dei piani tangenti alla superficie proposta nei punti M ed M_1. Chiameremo β quell' angolo, e l' assumeremo come positivo, ovvero come negativo (*) secondochè per descriverlo la rotazione dell' elemento M_1N_1 attorno ad M_1 si fa verso la normale esterna in M_1 alla superficie, ovvero verso la normale interna. In ultimo noteremo che per le fatte costruzioni si ha $MM_1 = NL_1 = NN_1 = a$.

Ciò posto, chiamiamo S l' arco della traiettoria A contato da un' origine arbitraria e terminato al punto M, dS il differenziale di quest' arco, ossia la lunghezza dell' elemento MN, ed R il raggio della torsione geodetica di quella traiettoria nel detto punto M: cosicchè rammentando il significato di P, di Ω e di Φ si vede che si ha $\mathrm{P} = \frac{dS}{\Omega}$, ed $R = \frac{dS}{\Phi}$. Intenderemo poi per dS_1, P_1, Ω_1, R_1, Φ_1 le quantità analoghe alle dS, P, Ω, R, Φ, ma relative al punto M_1 della traiettoria A_1. Ciò posto, osservo che dal triangolo rettangolo $M_1L_1N_1$ si ha

$$\mathrm{sen} \wedge N_1M_1L_1 = \frac{L_1N_1}{M_1N_1}; \quad \cos \wedge N_1M_1L_1 = \frac{M_1L_1}{M_1N_1} \quad .$$

Ora $\wedge N_1M_1L_1 = -\beta$; $L_1N_1 = a\,\Phi$; $M_1N_1 = dS_1$; $M_1L_1 = \Omega\,(\mathrm{P} - a)$.

Laonde avremo

$$\mathrm{sen}\,\beta = -\frac{a\,\Phi}{dS_1} \quad , \qquad (1)$$

$$\cos\beta = \frac{\Omega\,(\mathrm{P} - a)}{dS_1} \quad . \qquad (2)$$

Ora osserviamo che le 2 linee A ed A_1, essendo traiettorie ortogonali fra loro equidistanti in tutti i punti corrispondenti, godono delle stesse proprietà. Osserviamo pure che la distanza fra il punto M della linea A ed il punto G_1 (intersezione della generatrice M_1H coll' asse del circolo osculatore alla linea A_1 nel punto M_1) è espressa da $a + \mathrm{P}_1$; mentre la distanza fra il punto M_1 ed il punto G è espressa da $\mathrm{P} - a$.

(*) Volendo mettere d' accordo le convenzioni fatte sulla fig. 1ª con quelle che qui facciamo sulla fig. 2ª, l' angolo $N_1M_1L_1$ di questa sarà indicato con $-\beta$.

Laonde potremo applicare le relazioni (1) e (2) ponendo in esse semplicemente dS_1, P_1, Ω_1, Φ_1 in luogo di dS, P, Ω, Φ, e $P_1 + a$ in luogo di $P - a$. Per tal guisa otteniamo le 2 altre formule

$$\operatorname{sen} \beta = - \frac{a \Phi_1}{dS} \quad , \tag{1}_1$$

$$\cos \beta = \frac{\Omega_1 (P_1 + a)}{dS} \quad . \tag{2}_1$$

Per mezzo delle 4 formule testè ricavate possiamo con molta facilità trovare diverse relazioni fra i raggi di curvatura geodetica e di torsione geodetica delle 2 traiettorie ortogonali A ed A_1, le quali relazioni ci daranno modo di esprimere i raggi di una di queste curve in funzione di quelli dell' altra.

Difatti dividendo il valore (1) di sen β pel valore (2) di cos β si ottiene

$$\operatorname{tang} \beta = - \frac{a}{P - a} \frac{\Phi}{\Omega} \quad ,$$

e poichè $\dfrac{\Phi}{\Omega} = \dfrac{P}{R}$, avremo pure

$$\operatorname{tang} \beta = - \frac{a P}{R (P - a)} \quad ; \tag{3}$$

ovvero ancora

$$\frac{a}{P} - \frac{a}{R} \cot \beta = 1 \ . \tag{3}'$$

Da questa relazione si ricava

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{- \dfrac{a}{R}}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{P} - 1\right)^2}} \quad . \tag{3}''$$

Queste sono le relazioni cercate fra la curvatura geodetica e la torsione geotica della traiettoria ortogonale A; nelle quali entra pure l' angolo β dell' inclinazione che colla A ha l' altra traiettoria ortogonale A_1. L' angolo β varia da

generatrice a generatrice, mentre la distanza a rimane costante. Le relazioni (3) non differiscono da quelle ricavate dall' O. Bonnet (**) con metodo differente da quello ora esposto.

Nel caso in cui le 2 linee A ed A_1 avessero per normali principali comuni le generatrici della superficie rigata proposta, allora P ed R si ridurrebbero rispettivamente ai raggi di curvatura e di torsione ordinaria; e come fu dal Serret e da altri dimostrato, l' angolo β avrebbe lo stesso valore per tutti i punti corrispondenti di quelle linee. Per tal guisa la relazione (3) si ridurrebbe a quella che fu per altra via trovata dal Bertrand nel tomo 15° del Giornale del Liouville.

Intanto se eguagliamo fra loro i valori (1) e $(1)_1$ di sen β si ottiene

$$\frac{dS_1}{dS} = \frac{\Phi}{\Phi_1} \quad .$$

Così pure eguagliando i valori (2) e $(2)_1$ di cos β si ottiene

$$\frac{dS_1}{dS} = \frac{\Omega\,(\mathrm{P} - a)}{\Omega_1\,(\mathrm{P}_1 + a)} \quad .$$

Elevando ora al quadrato i 2 membri delle equazioni (1) e (2), e poscia sommando membro a membro si ricava

$$1 = \frac{a^2\Phi^2}{dS_1^{\,2}} + \frac{(\mathrm{P} - a)^2\,\Omega^2}{dS_1^{\,2}} \quad .$$

Ponendo nelle 3 relazioni ora trovate

$$\Omega = \frac{dS}{\mathrm{P}}, \quad \Phi = \frac{dS}{R}, \quad \Omega_1 = \frac{dS_1}{\mathrm{P}_1}, \quad \Phi_1 = \frac{dS_1}{R_1}$$

esse diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS_1^{\,2}}{dS^2} &= \frac{R_1}{R} \\ \frac{dS_1^{\,2}}{dS^2} &= \frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}}\,\frac{\mathrm{P} - a}{\mathrm{P}_1 + a} \\ \frac{dS_1^{\,2}}{dS^2} &= \frac{a^2}{R^2} + \frac{(\mathrm{P} - a)^2}{\mathrm{P}^2} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(**) Mémoire sur la théorie générale des surfaces — Journal de l' École Polythecnique. 32 cahjer N.° 45.

Pertanto otteniamo le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_1}{R} &= \frac{a^2}{R^2} + \frac{(\mathrm{P} - a)^2}{\mathrm{P}^2} \\ \frac{R_1}{R} &= \frac{\mathrm{P}_1 (\mathrm{P} - a)}{\mathrm{P}(\mathrm{P}_1 + a)} \quad ; \end{aligned}\right\} \qquad (4)'$$

le quali risolute rispetto ad R_1 ed a P_1 danno

$$R_1 = \frac{R^2 (\mathrm{P} - a)^2 + a^2 \mathrm{P}^2}{\mathrm{P}^2 R} \qquad (5)$$

$$\mathrm{P}_1 = \frac{R^2 (\mathrm{P} - a)^2 + a^2 \mathrm{P}^2}{\mathrm{P}R^2 - a(\mathrm{P}^2 + R^2)} \quad . \qquad (6)$$

Queste 2 formule fan conoscere i raggi della curvatura e della torsione geodetica della traiettoria A_1 conoscendo quelli della traiettoria A.

Partendo dalle formule (1) (2) $(1)_1$ $(2)_1$ possiamo assai facilmente ricavare altre relazioni — Dalla (1) si ha $dS_1 = -\dfrac{a\,\Phi}{\operatorname{sen}\beta}$; e quindi

$$\frac{dS_1}{dS} = -\frac{a}{R \operatorname{sen}\beta} \quad .$$

Analogamente per mezzo della $(1)_1$ si ricava

$$\frac{dS}{dS_1} = -\frac{a}{R_1 \operatorname{sen}\beta} \quad .$$

Se ora queste 2 equazioni si moltiplicano membro a membro, si ottiene

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{a^2} \quad ; \qquad (7)$$

formula che dà luogo al seguente nuovo ed importante Teorema « Se si hanno 2 « traiettorie ortogonali delle generatrici d' una superficie gobba, il prodotto delle « loro torsioni geodetiche nei punti in cui quelle sono tagliate da una medesima « generatrice è proporzionale al quadrato del seno dell' angolo d' inclinazione delle « traiettorie stesse in quei punti ».

Corollario — Quando le 2 traiettorie sieno ugualmente inclinate in tutti i punti corrispondenti, il prodotto delle loro torsioni geodetiche in questi punti è costante.

Osservazione — Nel caso in cui la superficie proposta sia quella delle normali principali supposte comuni alle 2 traiettorie, si ha il teorema dello Schell (*), il quale teorema è perciò un caso particolare di quello testè dimostrato.

La relazione (7) lega l' angolo β coi raggi di torsione geodetica delle 2 traiettorie. Analogamente possiamo dedurre una relazione che leghi quell' angolo coi raggi di curvatura geodetica delle traiettorie stesse. Difatti dalla (2) si ha

$$dS_1 = \Omega \frac{P - a}{\cos \beta} \quad ; \text{ e quindi}$$

$$\frac{dS_1}{dS} = \frac{P - a}{P \cos \beta} \quad .$$

Questa relazione si applica pure al caso in cui le 2 traiettorie sieno infinitamente vicine, sicchè a si possa surrogare con da, sia cioè un infinitesimo del 1° ordine al pari del dS e del dS_1. Trascurando allora gli infinitesimi d' ordine superiore al 1°, e quindi ponendo 1 a luogo di cos β l' ultima relazione trovata diventa

$$\frac{dS_1}{dS} = \frac{P - da}{P} \quad ;$$

e quest' ultima coincide con quella dimostrata con altro metodo dal Bonnet nel N.° 28 della citata sua Memoria.

Operando ora sulla $(2)_1$ in modo analogo a quello che abbiam fatto sulla (2), si ricaverebbe

$$\frac{dS}{dS_1} = \frac{P_1 + a}{P_1 \cos \beta} \quad .$$

Moltiplicando membro a membro quest' equazione per l' altra $\frac{dS_1}{dS} = \frac{P - a}{P \cos \beta}$, trovata poc' anzi, si ottiene

$$\sec^2 \beta = \frac{PP_1}{(P - a)(P_1 + a)} \quad . \qquad (8)$$

Ora il 2° membro di questa relazione esprime il rapporto anarmonico $(MG\,M_1G_1)$.

Se pertanto le 2 traiettorie A ed A_1 sono tali da avere in tutti i punti che in esse si corrispondono la stessa inclinazione β, allora quel rapporto anarmonico

(*) Vedi Allgemeine Theorie der Curven doppelter krümmung in rein geometrischer Darstelleng. (Leipzig 1859 — pag. 76).

è costante per tutte le generatrici. — Che se quell' angolo fosse costantemente di $\pm 45^\circ$, allora i 4 punti M, M_1, G, G_1 posti sopra una generatrice qualunque formano un gruppo armonico.

È da notare che la relazione (8) si può pure scrivere sotto la forma

$$\frac{1}{P_1} = \frac{\cos^2 \beta}{P - a} - \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{a} \quad .$$

Dalle relazioni (3) e (7) si ricava pure facilmente quest' altra

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{P - a}\right] .$$

Applicazione delle formule vedute al calcolo della curvatura d' una superficie gobba.

Prima di passare ad altre applicazioni delle formule finora trovate possiamo intanto applicarle per calcolare il valore (*) della curvatura d' una superficie gobba in un suo punto qualunque. Ora si sà che questo valore è dato dal rapporto che l' angolo de' piani tangenti al punto considerato ed al punto infinitamente vicino appartenente alla stessa generatrice ha colla distanza di questi stessi punti. — Per trovare quel rapporto si potrebbe, come fa il Bonnet nel N.° 48 della citata Memoria, ricavare il rapporto differenziale $\frac{d\beta}{da}$ dalla relazione tang $\beta = - \frac{a\,P}{R\,(P - a)}$, da noi dimostrata in questo stesso paragrafo. Ma per trovare questo rapporto preferisco indicare un' altra via che mi pare non men semplice, e che si fonda sopra un' altra relazione trovata più sopra. — Volendo calcolare la curvatura della superficie in un suo punto qualunque M_1 si immagini la traiettoria ortogonale A_1 che passa per questo punto; e sia R_1 il suo raggio di torsione geodetica nel punto stesso. Immaginiamo poi una 2ª traiettoria ortogonale, che diremo A_1', successiva alla A_1, distante da questa d' una quantità finita ma sufficientemente piccola Δa, ed inclinata alla A_1 d' un angolo $\Delta\beta$ (**). È chiaro allora che il raggio della torsione geodetica della A_1' nel punto in cui attraversa la generatrice che passa pel punto

(*) Intendiamo per curvatura il modulo di $\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}$ essendo r_1 ed r_2 i raggi principali: vedi Bonnet — Memoria citata N. 18.

(**) Si potrebbe immaginare la traiettoria ortogonale A che passa pel punto M posto sulla stessa generatrice con M_1, dista della quantità a dalla A_1 ed è inclinata a questa d' un angolo β. Per tal guisa resterebbe meglio chiarito il significato della distanza designata con Δa e dell' angolo designato con $\Delta\beta$.

dato M_1 si può rappresentare con $R_1 + \Delta R_1$. Ciò posto, potremo alle 2 traiettorie applicare la relazione $\frac{1}{RR_1} = \frac{\text{sen}^2 \beta}{a^2}$ col porvi $\Delta\beta$ a luogo della β, Δa a luogo della a ed $R_1 + \overline{\Delta R_1}$ a luogo della R.

Per tal guisa si avrebbe

$$\frac{1}{R_1 (R_1 + \overline{\Delta R_1})} = \frac{\text{sen}^2 \Delta\beta}{\overline{\Delta a}^2} \quad ; \text{ d' onde}$$

$$\frac{\text{sen}\, \Delta\beta}{\Delta\beta} \times \frac{\Delta\beta}{\Delta a} = \mp \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_1 \overline{\Delta R_1}}}$$

Se ora si prende il limite dei 2 membri, e si fa tendere $\overline{\Delta a}$ indefinitamente a 0, avremo

$$\frac{d\beta}{da} = -\frac{1}{R_1} \quad .$$

Dei 2 segni provenienti dal radicale abbiamo preso il negativo, poichè col crescere della a (positivamente) cresce il valore assoluto β, ma mantenendosi negativo.

Resta pertanto dimostrato il noto teorema che la curvatura d'una superficie gobba in qualunque suo punto è eguale e di segno contrario alla torsione geodetica che ha in quel punto la traiettoria ortogonale che vi passa.

Tenendo conto di quest' ultimo teorema, possiamo così enunciare quello che abbiamo veduto essere espresso dalla relazione (7)

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{\text{sen}^2 \beta}{a^2} \quad :$$

« Se si hanno 2 traiettorie ortogonali delle generatrici d' una superficie gobba, il « prodotto delle curvature che ha la superficie nei punti in cui quelle traiettorie « sono tagliate da una medesima generatrice, è proporzionale al seno dell' angolo « che misura l' inclinazione delle traiettorie stesse in quei punti ».

§ 3.°

Inclinazione e distanza di 2 generatrici infinitamente vicine — Posizione del punto centrale.

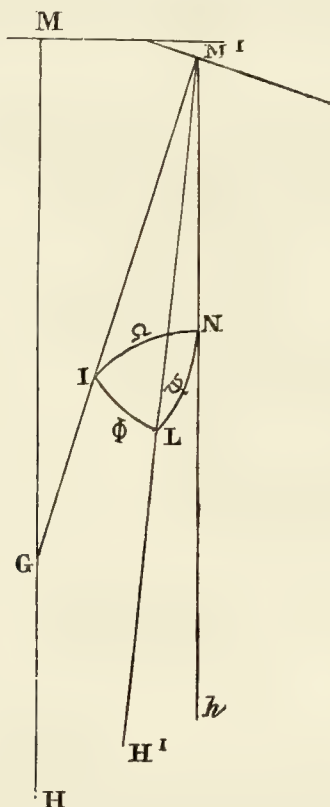
Consideriamo una traiettoria ortogonale qualunque A delle generatrici d' una superficie gobba: sieno M, M^1 (V. Fig. 3ª) due punti qualunque, ma successivi ed infinitamente l' un all' altro vicini della curva stessa: sieno poi MH ed M^1H^1 le generatrici che passano per quei punti, e che in generale non giacciono nello stesso piano. — In questo paragrafo mi propongo di calcolare l' angolo che queste generatrici formano fra loro, la minima loro distanza ed infine la posizione di quel punto speciale, nel quale la prima di quelle generatrici è incontrata dalla comune perpendicolare che misura quella distanza; punto che fù dai geometri appellato *punto centrale* di quella generatrice. — Nel dedurre le formule che risolvono questi problemi procederò con metodo affatto analogo a quello che gli autori sogliono adoperare, allorchè vogliono risolvere gli analoghi problemi relativi ad una superficie gobba le cui generatrici sono le normali principali d' una curva a doppia curvatura. La differenza nei procedimenti si riduce a ciò solo, che alla considerazione della linea de' centri di curvatura della traiettoria A ho surrogato la considerazione della linea d' intersezione della sua superficie polare colla superficie gobba su cui quella traiettoria è posta.

Pertanto sia G il punto di quella linea situato sulla generatrice MH, corrispondente cioè al punto M della traiettoria A. Si unisca il punto G col punto M^1, e per questo si conduca la retta M^1h parallela alla generatrice MH. Allora potremo considerare l' angolo triedro avente per vertice il punto M^1, e per spigoli le 3 rette M^1G, M^1H^1, M^1h: in esso la faccia GM^1H^1 è perpendicolare alla faccia GM^1h; inoltre l' angolo GM^1h è eguale all' angolo MGM^1, che è l' angolo Ω di contingenza geodetica della linea A nel punto M.

L' angolo GM^1H^1 poi è eguale all' angolo Φ della torsione geodetica di questa stessa linea relativo allo stesso punto M. Infine l' angolo H^1M^1h è l' angolo delle 2 generatrici infinitamente vicine MH ed M^1H^1, angolo che chiameremo Ψ, e che assumeremo come positivo, ovvero come negativo secondochè la M^1H^1 giace o nò dalla parte del piano GMM^1 nella quale giace la normale esterna alla superficie nel punto M. — Ciò posto, volendo trovare il valore di quest' angolo, si intenda descritta una superficie sferica di raggio eguale all' unità e col centro in M^1; così otterremo il triangolo sferico ILN rettangolo in I, e corrispondente al suddetto angolo triedro. I tre lati di questo triangolo sendo infinitesimali, desso puossi considerare come rettilineo; epperò si avrà $\overline{LN}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{IN}^2$, ossia

$$\Psi^2 = \Omega^2 + \Phi^2 \quad .$$

Se poi, come abbiam fatto nel paragrafo precedente, indichiamo con P ed R i raggi di curvatura geodetica e di torsione geodetica della A relativi al punto M,

Figura 3ª

e con dS l' archetto infinitesimale MM^I, allora la relazione testè trovata si può porre sotto la forma

$$\Psi^2 = dS^2 \left[\frac{1}{\mathrm{P}^2} + \frac{1}{R^2}\right] \quad ;$$

d' onde

$$\Psi = \frac{dS}{\mathrm{P}R} \sqrt{\mathrm{P}^2 + R^2} \quad : \qquad (9)$$

formula che coincide con quella che con metodo differente è stata dimostrata dal Bonnet nel N. 42 della sua Memoria (V. Nota (**) pag. 76).

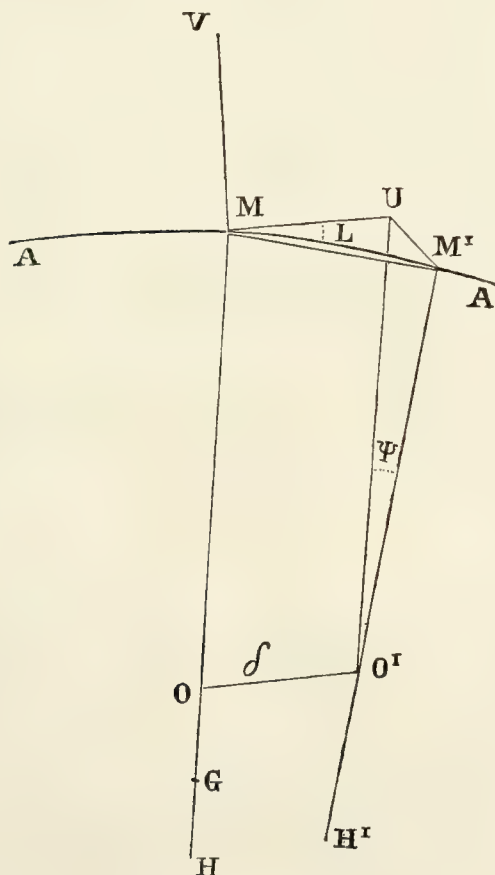
Quello stesso triangolo rettangolo ILN considerato ancora come rettilineo somministra queste altre relazioni:

$$\text{tang } N = \cot L = \frac{IL}{IN} = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{\mathrm{P}}{R}$$

$$\text{sen } N = \cos L = \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + R^2}}$$

$$\cos N = \text{sen}\, L = \frac{\Omega}{\Psi} = \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} \quad .$$

Studiamo ora più da vicino il significato degli angoli N ed L del triangolo ILN. — L' angolo N di esso a rigore è l' angolo dietro che il piano MGM^1h fa col piano H^1M^1h. Ora quest' ultimo è parallelo al *piano direttore* relativo alla generatrice MH, il quale contiene questa ed una parallela condotta per M alla generatrice M^1H'. Quanto al piano MGM^1h, trascurando gli infinitesimi d' ordine superiore al 1°, si può ritenere come piano tangente alla superficie proposta nel punto M. Laonde possiamo dire che l' angolo N del triangolo ILN, trascurando gli infinitesimi d' ordine superiore al 1°, è supplementare (*) dell' angolo che il piano tangente alla superficie nel punto M fà col piano direttore relativo alla generatrice MH. — Per altra parte consideriamo il piano che passa per questa generatrice e per la retta OO^1 (Fig. 4ª) comune perpendicolare alla medesima ed alla

FIGURA 4ª

(*) Diciamo supplementare e non eguale, per cagione delle convenzioni fatte sul segno degli angoli piani, le quali si estendono naturalmente agli angoli diedri da essi misurati.

generatrice successiva M^1H^1. Tale piano, che vien detto centrale dai geometri, è evidentemente perpendicolare al piano direttore più sopra considerato: cosicchè l'angolo (**) che il piano centrale fà col suddetto piano tangente è eguale a — $(90° — N)$. Ma per avere l'angolo piano misuratore di quest' angolo diedro, pel punto M e nel piano direttore relativo alla generatrice MH conduciamo una retta MV (Fig. 4ª) perpendicolare a questa generatrice; così parimenti per quello stesso punto conduciamo una retta MU parallela alla retta OO^1 (e quindi giacente nel piano centrale). Allora le 2 rette MV ed MU risulteranno fra loro ortogonali, e l'angolo che la toccante alla A in M fà colla MU è misura dell' angolo dietro N del triangolo sferico ILN, ovverossia è eguale all' angolo N considerato come angolo piano del triangolo rettilineo INL; così parimenti l' angolo che la MU fà con quella toccante è complementare di N e quindi eguale ad L.

Ciò premesso, passiamo a calcolare la minima distanza OO^1 delle generatrici MH ed M^1H^1, la quale distanza infinitesimale indicheremo con δ, come anche la distanza finita MO cui si trova da M il punto centrale O, la quale indicheremo con a_0. — A tal' uopo pel punto M immaginiamo il piano perpendicolare alla generatrice MH, il quale piano conterrà necessariamente la toccante in M alla traiettoria ortogonale A. Trascurando gli infinitesimi d' ordine superiore al 1°, potremo pur dire che quel piano contiene l'elemento $MM^1 = dS$ di quella traiettoria, elemento che si può considerare come rettilineo. Ciò posto, pel punto O^1 in cui la comune perpendicolare alle generatrici incontra la 2ª, cioè la M^1H^1, conduciamo una parallela all' altra generatrice, cioè alla MH, fino ad incontrare nel punto U l' anzidetto piano: inoltre congiungiamo questo punto U coi punti M ed M^1. È allora chiaro in 1° luogo che il segmento UO^1 è eguale alla distanza cercata $MO = a_0$, e che l' angolo UO^1M^1 è eguale all' angolo Ψ; ed in 2° luogo che il triangolo infinitesimale MUM^1 è rettangolo nel vertice U, ha il cateto $MU = OO^1 = \delta$, l' ipotenusa $MM^1 = dS$, ed infine l' angolo acuto UMM^1 eguale all' angolo L più sopra considerato. Pertanto avremo anzitutto

$$\delta = dS \cos L \quad .$$

Ora abbiam veduto che

$$\cos L = \frac{\Phi}{\Psi} = \frac{dS}{R\Psi} \quad ;$$

laonde si avrebbe

$$\delta = \frac{dS^2}{R\Psi} \quad . \tag{10}$$

(**) Quest' angolo è quello che più avanti designeremo con β_0, e si intende contato dal piano centrale GMU al piano GMM^1 (v. fig. 4ª).

Che se poi a luogo di $\cos L$ si sostituisce l' altro valore

$$\frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}}$$

pure trovato più sopra, otterremo

$$\delta = \frac{P\, dS}{\sqrt{P^2 + R^2}} \quad . \qquad (10)^1$$

Dallo stesso triangolo MUM^1 si ha pure

$$UM^1 = \delta \operatorname{tang} L = dS \operatorname{sen} L \; .$$

Dall' altro triangolo M^1UO^1, pure rettangolo in U, si ha poi

$$UM^1 = UO^1 \times \operatorname{tang} \Psi = a_0 \operatorname{tang} \Psi \; .$$

Pertanto avremo

$$\frac{\delta}{a_0} = \frac{\operatorname{tang} \Psi}{\operatorname{tang} L} \quad ;$$

ossia

$$\frac{\delta}{a_0} = \frac{\operatorname{tang} \Psi}{\Psi} \times \frac{\Psi}{\operatorname{tang} L} \quad ;$$

ed al limite si avrà

$$\frac{\delta}{a_0} = \frac{\Psi}{\operatorname{tang} L} \quad ; \text{ e quindi}$$

$$\delta \operatorname{tang} L = dS \operatorname{sen} L = a_0 \Psi \; .$$

Dalla 2ª eguaglianza di questa doppia relazione si trae

$$a_0 = \frac{dS \operatorname{sen} L}{\Psi} = dS \frac{\Omega}{\Psi^2} = \frac{dS^2}{P\, \Psi^2} \quad ;$$

e ponendo a luogo di Ψ il valore (9), si ha

$$a_0 = \frac{P R^2}{P^2 + R^2} \quad . \qquad (11)$$

E poichè $\frac{R^2}{P^2 + R^2} = \text{sen}^2 L,$ avremo pure

$$a_0 = P \,\text{sen}^2 L \quad . \tag{12}$$

Infine se nella relazione

$$\delta \,\text{tang}\, L = a_0 \Psi$$

poniamo per tang L il suo valore $\frac{R}{P}$, si ottiene

$$\frac{\delta}{\Psi} = a_0 \frac{P}{R} \quad .$$

Vedremo il significato geometrico del rapporto $\frac{\delta}{\Psi}$, come pure un' espressione ancor più semplice del suo valore.

§ 4.°

Raggio di curvatura geodetica e di torsione geodetica della traiettoria ortogonale che passa pel punto centrale d' una generatrice della superficie gobba proposta — Legge di distribuzione del piano tangente e della curvatura della superficie lungo una medesima generatrice.

Supponiamo che le relazioni trovate nel 2° paragrafo si vogliano applicare per calcolare il raggio di curvatura geodetica P_0, ed il raggio di torsione geodetica R_0 della traiettoria ortogonale A_0 passante pel punto centrale O della generatrice MH (v. fig. 4ª), in funzione dei raggi di curvatura e di torsione geodetica P ed R relativi al punto M della traiettoria ortogonale A. Basterà a tal' uopo nelle relazioni generali (5) e (6) porre a luogo di a_0 il valore (11) trovato nel paragrafo precedente, cioè

$$a_0 = \frac{PR^2}{P^2 + R^2} \quad ; \text{ e si avrà}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{P^2 + R^2}{P^2 R} \tag{13}$$

$$\frac{1}{P_0} = 0 \quad .$$

Moltiplicando poi il valore di a_0 per quello di $\frac{1}{R_0}$ si ricava la semplicissima relazione

$$\frac{a_0}{R_0} = \frac{R}{P} \quad . \qquad (14)$$

Ora nel precedente paragrafo abbiam trovato

$$\frac{\delta}{\Psi} = a_0 \frac{P}{R} \quad ;$$

laonde, in grazia della (14), si avrà pure

$$\frac{\delta}{\Psi} = R_0 \quad .$$

Di questo valore del rapporto $\frac{\delta}{\Psi}$ ci occuperemo più avanti.

Infine se fra la (13) e la (14) si elimina R, si ottiene

$$R_0^2 = a_0 (P - a_0) \quad ; \qquad (15)$$

ossia (v. fig. 4ª)

$$R_0^2 = \overline{MO} \times \overline{OG} \quad .$$

Pertanto se si vuole costrurre geometricamente il raggio R_0 della torsione geodetica della trajettoria ortogonale che passa pel punto centrale O (supposto conosciuto) d'una data generatrice, basterà conoscere la posizione del centro C della curvatura ordinaria relativo al punto M in cui la generatrice taglia un'altra traiettoria ortogonale qualunque. Difatti basterebbe in quel punto C elevare una perpendicolare al raggio CM di curvatura fino ad incontrare in G la generatrice data MO; e quindi costrurre una media proporzionale fra MO ed OG.

Reciprocamente: dato il valore di R_0 relativo ad una generatrice, della quale eziandio si conosca la posizione del punto centrale, per mezzo delle relazioni (14) e (15) si calcolano i valori dei raggi P ed R di curvatura e di torsione geodetica di qualunque traiettoria ortogonale che incontri quella generatrice ad una data distanza a_0 dal punto centrale. Difatti dalla (15) si ha subito

$$\mathrm{P} = \frac{a_0^2 + R_0^2}{a_0} \quad ; \tag{16}$$

e quindi dalla (14) si ha

$$R = \frac{a_0^2 + R_0^2}{R_0} \quad . \tag{17}$$

Queste 2 formule si prestano ad un' elegante costruzione geometrica.

Deduzione di altre formule.

Possiamo pure facilmente trovare altre relazioni fra a_0, R_0, R, P — Difatti applichiamo anzitutto la 2ª delle formole $(4)'$ alle traiettorie A ed A_0, di cui la 1ª passa pel punto M della generatrice MH, e la 2ª taglia questa nel punto centrale O. Basterà porre in quella formula R_0 a luogo di R_1, a_0 a luogo di a e

$$\frac{1}{\mathrm{P}_1} = \frac{1}{\mathrm{P}_0} = 0 \quad \text{; e si otterrà}$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P} - a_0} \quad \text{; d' onde si trae}$$

$$a_0 = \frac{\mathrm{P}}{R}(R - R_0) \quad . \tag{18}$$

Confrontando questo valore di a_0 con quello dato dalla (12), si trae quest' altra relazione

$$R_0 = R \cos^2 L \quad .$$

Ora abbiamo visto che $-\frac{1}{R_0}$ misura la curvatura della superficie proposta nel punto centrale O della generatrice MH, e $-\frac{1}{R}$ misura la curvatura della superficie stessa nel punto M; e che infine L è l' angolo di inclinazione del piano tangente in M alla medesima sul piano centrale della generatrice MH: laonde possiamo dire che l' ultima relazione trovata stabilisce la legge della variazione della curvatura della superficie lungo una generatrice qualsivoglia di essa.

Possiamo pure ricavare un altro valore di a_0 : infatti la relazione (7)

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{\text{sen}^2 \beta}{a^2}$$

, trovata nel 2° paragrafo, può essere applicata al caso in cui una delle 2 traiettorie sia la A_0, cioè quella che passa pel punto centrale O d' una data generatrice MH alla distanza a_0 dall' altra traiettoria A. Allora chiamando β_0 l' angolo d' inclinazione delle 2 traiettorie nei punti corrispondenti M ed O, ossia l' angolo dei piani tangenti alla superficie in questi punti; e quindi ponendo R_0 a luogo di R_1 nella (7), questa ci somministrerà

$$a_0^2 = RR_0 \text{ sen}^2 \beta_0 \quad .$$

Ma dalle equazioni (12) e (14) moltiplicate membro a membro si ha pure

$$a_0^2 = RR_0 \text{ sen}^2 L \quad ;$$

laonde si avrà $\beta_0 = \pm L$; ma sceglieremo il segno inferiore per la ragione che già abbiamo veduto nella nota (*) della pagina 74. Questo risultato si potea prevedere osservando che la retta $OO_1 = \delta$ comune perpendicolare alle generatrici infinitamente vicine MH ed M^1H^1 tocca la traiettoria ortogonale A_0, che passa pel punto centrale O, in questo stesso punto.

Possiamo ora facilmente stabilire la legge di distribuzione del piano tangente alla superficie lungo una generatrice qualsivoglia. Difatti se alla relazione

$$\text{tang } L = \frac{R}{\text{P}}$$

, trovata nel 2° paragrafo, uniamo la relazione (14), otteniamo

$$\text{tang } L = \frac{a_0}{R_0} \quad ;$$

e quindi, per essere $L = - \beta_0$, si avrà

$$\text{tang } \beta_0 = - \frac{a_0}{R_0} \quad ; \qquad (19)$$

formula che esprime il teorema di Chasles. A questa formula saremmo pervenuti più presto ponendo $\frac{1}{\text{P}} = \frac{1}{\text{P}_0} = 0$ nella formula (3) del 2° paragrafo.

Poichè per una data generatrice R_0 rimane costante, e varia solo da generatrice a generatrice, quella formula dà la legge di distribuzione del piano tangente lungo una generatrice; ed R_0 chiamasi coefficiente di distribuzione di questo piano. — Abbiam veduto diverse espressioni del suo valore, e fra le altre il rapporto $\frac{\delta}{\Psi}$: laonde resta chiarito come questo rapporto venga dai geometri chiamato appunto coefficiente di distribuzione del piano tangente.

Terminerò questo paragrafo col dare un' altra dimostrazione dell' importante teorema relativo alla curvatura delle superficie gobbe; e stavolta per la dimostrazione partirò dalla formula (19).

Come ho detto quando alla fine del 2° paragrafo ho dato una prima dimostrazione del teorema in questione, la curvatura d' una superficie gobba in un suo punto qualunque M è data dal rapporto che l' angolo dei piani tangenti alla medesima in quel punto e nel punto infinitamente vicino appartenente alla stessa generatrice ha colla distanza di questi punti: laonde quella curvatura varrà $\frac{d\beta_0}{da_0}$. Ora differenziando l' equazione (19) e rammentando che R_0 rimane costante lungo una medesima generatrice, otterremo

$$\frac{d\,\beta_0}{\cos^2\beta_0} = -\frac{d\,a_0}{R_0}\ .$$

Laonde la curvatura cercata varrà $\quad -\frac{\cos^2\beta_0}{R_0}\ ,\quad$ ossia

$$-\frac{1}{R_0\,(1+\operatorname{tang}^2\beta_0)}\ .$$

Se ora sostituiamo a tang β_0 il suo valore dato pure dalla (19), avremo infine

$$-\frac{R_0}{R_0{}^2+a_0{}^2}\ ;\ \text{ovvero ancora}\quad -\frac{1}{R}\ ,\ \text{in virtù della (17).}$$

Adunque per la misura della curvatura nel punto M abbiamo

$$\frac{d\beta_0}{da_0} = -\frac{\cos^2\beta_0}{R_0} = -\frac{1}{R} \qquad \text{q. e. d.}$$

Se applichiamo l' una, ovvero l' altra delle formule incluse in questa doppia eguaglianza al calcolo della curvatura che la superficie ha nel punto centale O, otteniamo $-\frac{1}{R_0}$ come misura di questa curvatura. Laonde possiamo pure stabilire la seguente nota

Proposizione — La curvatura d' una superficie gobba in un suo punto qualunque M vale la curvatura che la superficie stessa ha nel punto centrale della generatrice passante per M moltiplicata pel quadrato del coseno dell' angolo che il piano centrale relativo a questa generatrice fà col piano tangente in M.

Da questo teorema consegue che la curvatura ha il valor massimo nel punto centrale, mentre pel punto all' infinito d' una generatrice (nel quale il piano tangente alla superficie non è altro che il piano direttore) la curvatura sarebbe nulla.

§ 5.°

Applicazioni diverse.

Passiamo ora alle applicazioni che si possono fare delle proposizioni e delle formole dimostrate nei paragrafi precedenti.

Cominceremo dal supporre che sulla superficie rigata proposta si possa tracciare una traiettoria ortogonale B delle generatrici, la quale sia in pari tempo *linea geodetica* della superficie stessa. Dico che in tal caso la B è la linea di stringimento della superficie, e che perciò le generatrici di questa sono le binormali di quella. Difatti confrontando la B con un' altra traiettoria ortogonale A distante della quantità a, e chiamando R il raggio della torsione geodetica della B, la relazione (3)′ (V. 2° paragrafo)

$$\frac{a}{\mathrm{P}} - \frac{a}{R} \cot \beta = 1$$

in questo caso somministra

$$\operatorname{tang} \beta = - \frac{a}{R} \quad ;$$

poichè trattandosi di linea geodetica la curvatura geodetica $\frac{1}{\mathrm{P}}$ è nulla.

Se ora paragoniamo questa equazione colla (19), risulta che la linea proposta B passa pel punto centrale di qualunque generatrice; epperciò dessa è pure linea di stringimento della superficie. È pur chiaro che l' angolo Φ della torsione geodetica è eguale all' angolo φ della torsione ordinaria, poichè per essere costantemente l' angolo θ (Vedi paragrafo 1°) di 90° si ha $d\theta = 0$.

Possiamo pure dimostrare facilmente la proposizione inversa, vale a dire che se la linea di stringimento d' una superficie gobba è traiettoria ortogonale delle

generatrici di questa, dessa è in pari tempo linea geodetica. Difatti abbiamo veduto nel paragrafo precedente che la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_0}$ della traiettoria ortogonale che passa per il punto centrale d' una generatrice qualunque è nulla. Laonde per tutti i punti della linea proposta si avrebbe $\frac{1}{\rho_0} = 0$, e quindi dessa è linea geodetica della superficie (*).

Da ciò che precede risulta eziandio che nella superficie generata dalle binormali d' una curva gobba, all' infuori di questa, nessun' altra traiettoria ortogonale può essere geodetica, nè alcun' altra linea geodetica può essere traiettoria ortogonale.

Altre applicazioni

Supponiamo che si tratti d' una superficie generata dalle binormali d' una linea gobba A_0 di torsione costante: allora dicendo R_0 il raggio di torsione (geodetica od ordinaria) della stessa linea, la curvatura della superficie in un punto qualunque d' una traiettoria ortogonale A distante di a_0 dalla A_0 sarà $-\frac{R_0}{R_0^2 + a_0^2}$; epperciò sarà costante per tutti i punti di quella traiettoria. E la stessa cosa deve dirsi della torsione geodetica e della curvatura geodetica di questa traiettoria, le quali si mantengono costanti nei diversi suoi punti, come si vede chiaro dai loro valori dati dalle formule (16) e (17). Infine anche l' inclinazione β_0 delle linee A ed A_0 nei punti corrispondenti posti sulle singole generatrici è la stessa, poichè si ha $\tang \beta_0 = -\frac{a_0}{R_0}$. E ciò che qui si dice della traiettoria A deve per le stesse ragioni estendersi a qualunque traiettoria ortogonale. Se pertanto si considerano 2 traiettorie ortogonali A ed A_1, la loro inclinazione β nei punti corrispondenti sarà sempre la stessa. Potremo quindi applicare l' osservazione fatta nel paragrafo 2° circa la formula (8), il cui 2° membro esprime il rapporto anarmonico dei 4 punti in cui una qualsivoglia generatrice è tagliata dalle 2 traiettorie A ed A_1, e dalle linee d' intersezione della superficie colle superficie polari delle traiettorie stesse. Laonde possiamo stabilire il seguente

Teorema — « Se si considerano due traiettorie ortogonali qualunque delle bi-
« normali d' una curva gobba di torsione costante, e le linee luogo geometrico
« dei punti d' intersezione di queste binormali cogli assi dei circoli osculatori di
« quelle traiettorie, il rapporto anarmonico dei 4 punti in cui le singole binor-
« mali tagliano le 4 linee non varia ».

(*) Le 2 proposizioni ora vedute sono state con altro metodo dimostrate dal Bonnet per le traiettorie qualunque nel N. 57 della più volte citata sua Memoria.

Corollario — Se una delle traiettorie ortogonali è la stessa curva di torsione $\frac{1}{r_0}$ costante, e l' altra traiettoria ortogonale ne dista d' una quantità $a_0 = \pm r_0$, allora l'angolo β_0 della loro inclinazione nei punti corrispondenti sarà di $\pm 45°$, ed i 4 punti indicati nel teorema, presi in ordine conveniente, formano un gruppo armonico.

Flessione delle superficie gobbe.

Abbiam trovate le relazioni

$$(16) \qquad P = \frac{a_0^2 + R_0^2}{a_0} \quad , \qquad R = \frac{a_0^2 + R_0^2}{R_0} \quad , \qquad (17)$$

le quali danno la curvatura geodetica e la torsione geodetica in un punto M di una traiettoria ortogonale A per mezzo della torsione geodetica della traiettoria ortogonale che passa pel punto centrale della generatrice MH e della distanza a_0 delle 2 traiettorie. Supponiamo ora che la traiettoria A mediante opportuna trasformazione della superficie gobba su cui giace, che supponiamo flessibile ed inestensibile, sia ridotta ad avere per normali principali le generatrici della superficie trasformata (*). Allora il raggio P della curvatura geodetica si riduce al raggio ρ della curvatura ordinaria; e così parimenti il raggio R della torsione geodetica si riduce al raggio r della torsione ordinaria. Inoltre è chiaro che nella trasformazione suddetta a_0 non deve cangiare, come neppure R_0; poichè $-\frac{1}{R_0}$ misura la curvatura della superficie nel punto centrale O, la quale curvatura si sà che conserva lo stesso valore in quella trasformazione. Laonde le relazioni (16) e (17) per la *trasformata* della traiettoria A diventano

$$\rho = \frac{a_0^2 + R_0^2}{a_0} \qquad (16)'$$

$$r = \frac{a_0^2 + R_0^2}{R_0} \qquad (17)'$$

Ciò premesso, supponiamo che la distanza a_0 riesca costante per tutte le generatrici: ciò significherà che il luogo geometrico de' punti centrali, ossia la linea di stringimento della superficie trasformata è essa stessa traiettoria ortogonale delle

(*) Tale trasformazione è sempre possibile — Vedi Bour. Journal de l' École Polythécnique. Cahier 39°, teorema V, pag. 52 — Vedi pure Beltrami. Annali di Matematica del Tortolini. Tomo 7° pag. 112.

generatrici di questa. Ed abbiamo veduto come in tal caso questa traiettoria è linea geodetica della superficie, e quelle generatrici non sono altro che le binormali di questa linea, della quale $\frac{1}{R_0}$ è pure la torsione ordinaria. — Se poi, oltre a ciò, supponiamo ancora che R_0 abbia lo stesso valore per tutte le generatrici, in tal caso la superficie è formata dalle binormali d' una curva di torsione costante; e dalle relazioni $(16)^1$ e $(17)^1$ risulta che dopo la trasformazione, di cui abbiamo parlato più sopra, i raggi ρ ed r della curvatura e della torsione della trasformata della traiettoria A conservano il medesimo rispettivo valore per tutti i punti della trasformata stessa. — Ed è chiaro come lo stesso ragionamento si possa fare riguardo alla trasformata di qualunque altra traiettoria ortogonale. Pertanto nel caso attuale tutte le traiettorie ortogonali, compresa la linea di stringimento della superficie, per effetto della flessione subita da questa si trasformano in eliche avvolte a cilindri di rivoluzione. E dalle espressioni di ρ e di r scritte più sopra si vede pure che queste eliche hanno lo stesso passo, e quei cilindri lo stesso asse.

Laonde possiamo conchiudere che la trasformata della superficie generata dalle binormali d' una curva gobba di torsione costante è un' elicoide sghembo a piano direttore e a direttrice rettilinea. — Da ciò che si è detto possiamo pure dedurre che una superficie generata dalle binormali d' una curva gobba di torsione costante non può contenere alcuna traiettoria ortogonale di queste, la quale sia pure linea assintotica (*); vale a dire non si può tracciare su quella superficie alcuna curva che abbia per normali principali le generatrici della superficie stessa; poichè altrimenti, in virtù della dimostrazione precedente, vi sarebbero un' infinità di curve godenti di questa proprietà, e la superficie sarebbe addirittura l' elicoide suddetto, anzichè una superficie applicabile sul medesimo.

Superficie sviluppabili.

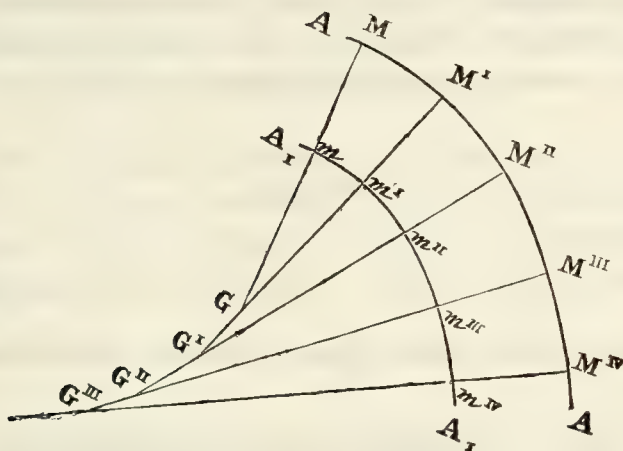
Passiamo ora a dimostrare alcune proprietà delle superficie sviluppabili. Colla scorta delle relazioni stabilite nel 2° e 3° paragrafo si può anzitutto dimostrare il seguente

Teorema « Ogni superficie rigata avente per linea di curvatura una traiettoria « ortogonale A delle sue generatrici è necessariamente una superficie sviluppabile ». Difatti la relazione $(10)^1$ del 3° paragrafo

$$\delta = dS \frac{\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{P}^2 + R^2}} = dS \frac{\frac{\mathrm{P}}{R}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{P}^2}{R^2}}}$$

(*) Vedi Dini — Giornale del Battaglini. Volume IV pag. 301 e 302.

, che dà la minima distanza di 2 generatrici infinitamente vicine, in questo caso somministra $\delta = 0$, poichè $\frac{1}{R} = 0$ per tutti i punti della linea di curvatura proposta. Ciò prova che le generatrici in generale s' incontrano, e che quindi la superficie proposta è sviluppabile. — Se poi consideriamo un' altra traiettoria ortogonale A_1 (V. fig. 5ª) distante di a dalla A, dalla relazione (5) del 2° paragrafo

Figura 5ª

si avrebbe per essa $\frac{1}{R_1} = 0$; laonde anche la A_1, e quindi qualunque traiettoria ortogonale, è linea di curvatura della superficie. Inoltre la relazione (3)'', per essere nel caso nostro $\frac{1}{R} = 0$, dà sen $\beta = 0$, qualunque sia il valore di a. Laonde quelle 2 traiettorie A ed A_1, comunque sieno distanti, hanno tutti gli elementi corrispondenti paralleli. — Inoltre, l' ultima delle relazioni (4) del 2° paragrafo nel caso proposto si riduce alla forma

$$\frac{dS_1^2}{dS^2} = \frac{(\mathrm{P} - a)^2}{\mathrm{P}^2}\ ;\ \text{d' onde}\ \frac{dS_1}{dS} = \pm \frac{\mathrm{P} - a}{\mathrm{P}}\ .$$

Infine la relazione $\Psi^2 = \Omega^2 + \Phi^2$, per essere $\Phi = 0$, diventa $\Psi^2 = \Omega^2$; e così pure si avrebbe $\Psi^2 = \Omega_1^2$ per essere $\Phi_1 = 0$.

Riunendo insieme tutti questi risultamenti si ha che le 2 linee A ed A_1, e così pure tutte le altre traiettorie ortogonali delle generatrici della superficie proposta, la quale abbiamo dimostrato essere sviluppabile, non solo sono linee di cur-

vatura di queste superficie; ma hanno pure la medesima superficie polare, e non sono altro che le sviluppanti dello spigolo di regresso $G\,G^{1}\,G^{11}\,G^{111}\ldots$ della superficie proposta.

Sarebbe pur vera la proposizione reciproca, che cioè « Se una superficie rigata « è sviluppabile, qualunque traiettoria ortogonale delle sue generatrici è eziandio « una sua linea di curvatura ».

Questa proposizione è corollario d' un teorema dimostrato dal Lancret (**). Ma noi lo possiamo dimostrare osservando che nella fatta ipotesi l' angolo Ψ di 2 generatrici infinitamente vicine è eguale all' angolo Ω di contingenza geodetica della traiettoria ortogonale proposta nel punto in cui è tagliata dalla 1ª di quelle generatrici. Laonde la relazione $\Psi^2 = \Omega^2 + \Phi^2$ somministra $\Phi = 0$; il che appunto dimostra che quella traiettoria ortogonale è pure linea di curvatura. — Alla stessa conclusione si perviene osservando che della formula (10) del 3° paragrafo

$$\delta = \frac{dS^2}{R\,\Psi}$$

il 1° membro nel caso nostro è nullo; e poichè dS non può essere nullo e Ψ non può essere infinito, dovrà essere $\frac{1}{R} = 0$: il che dimostra appunto la proposizione.

Osservazione — Nelle dimostrazioni precedenti relative alle superfici sviluppabili implicitamente abbiam supposto che la traiettoria proposta non sia in pari tempo linea di curvatura e linea geodetica. Chè se ciò fosse, allora la 3ª delle relazioni (4) del 2° paragrafo darebbe

$$\frac{dS_1^2}{dS^2} = 1 \quad ; \qquad \text{d' onde} \qquad dS_1 = \pm\, dS \ .$$

La formula (3)'' poi darebbe $\qquad \operatorname{sen} \beta = 0$.

Pertanto in questo caso gli elementi corrispondenti di 2 traiettorie ortogonali non solo sono eguali, ma sono anche paralleli. Ora questi 2 caratteri non si verificano insieme che per le traiettorie ortogonali delle superficie cilindriche. Laonde possiamo conchiudere che se una qualunque traiettoria ortogonale delle generatrici d' una superficie rigata è in pari tempo linea geodetica e linea di curvatura di questa, la superficie sarà cilindrica; e quella traiettoria, come pure tutte le altre traiettorie ortogonali, non sono altro che le sezioni rette della medesima.

(**) Rapport sur les progrés de la géométrie par Chasles — pag. 11.

Terminerò questa Memoria col fare applicazione della formula

$$d\sigma^2 = \mathrm{P}^2\,\Phi^2 + \overline{d\mathrm{P}}^2$$

dimostrata nel 1° paragrafo, e relativa al differenziale dell' arco della linea luogo geometrico dei punti d' intersezione delle generatrici d' una superficie rigata cogli assi dei circoli osculatori ad una traiettoria ortogonale di quelle generatrici. L' applicazione che voglio fare riguarda il caso in cui la superficie sia sviluppabile; nel qual caso abbiam veduto che per tutti i punti d' una qualunque traiettoria ortogonale A si ha $\Phi = 0$. Laonde avremo

$$d\sigma^2 = \overline{d\mathrm{P}}^2 \quad ;\ \text{epperò}$$

$$d\sigma = \pm\, d\mathrm{P} \quad .$$

Pertanto dicendo P' il raggio della curvatura geodetica della traiettoria A nel punto di questa che si assume per origine degli archi, e P il raggio corrispondente al punto qualunque M della medesima traiettoria, ed integrando quella relazione differenziale, avremo

$$\sigma = \pm\,[\mathrm{P} - \mathrm{P}'] \quad ,$$

supposto che l' origine degli archi σ corrisponda all' origine degli archi della A.

Questa formula comprende come caso particolare quella relativa agli archi delle evolute delle curve piane.

Pag.	Linea	Errata	Corrige
73	13	superficie proposta	linea stessa

SULLE

VARIAZIONI DI LUNGHEZZA

CHE ACCOMPAGNANO

LA MAGNETIZZAZIONE

MEMORIA

DEL PROFESSOR AUGUSTO RIGHI

(Letta nella Sessione ordinaria dell' 11 Dicembre 1879)

I. Indicazione dei lavori anteriori al presente.

I suoni che si producono quando s' interrompa, si chiuda o si inverta la corrente in un' elica, nell' asse della quale si trovano dei corpi magnetici, fecero nascere il sospetto, che nell' atto della magnetizzazione avvenissero in quei corpi degli istantanei cambiamenti di dimensione. Vari fisici giunsero a dimostrarne la realtà; ma i loro risultati sono lungi dall' essere fra loro concordanti.

Una lunga serie d' esperienze fu fatta dal Joule (1). Esso si servì d' una leva a braccia ineguali, sulla minore delle quali agiva il corpo in esame, e trovò che il ferro si allunga nell' atto di magnetizzarsi, e si raccorcia al cessare della corrente. Il raccorciamento è minore dell' allungamento, di modo che resta il ferro, dopo l' azione della corrente, con lunghezza maggiore di prima. L' acciaio dà, secondo il Joule, un diverso risultato, poichè dopo essersi allungato, meno però assai del ferro, al cessare della corrente, subisce invece di raccorciamento, un piccolo allungamento ulteriore. Però se l' acciaio è fortemente temprato non dà nessun effetto finchè non siasi magnetizzato al grado di saturazione. Al di là di questo limite la corrente lo accorcia. Sperimentando poscia su fili e sbarre sottoposte alla trazione di un peso, trovò che pel ferro dolce, l' allungamento si faceva via via minore, a parità di corrente, al crescere del peso tensore. Per una data tensione l' allungamento era nullo, e per tensioni maggiori, si aveva un raccorciamento.

(1) Phil. Mag. 1874.

Wertheim (1) trovò pure che le aste di ferro si allungano magnetizzandosi. Egli studiò inoltre le inflessioni che hanno luogo quando l' asta non occupi esattamente l' asse dell' elica, le quali già erano state avvertite da Guillemin (2). Beatston (3) trovò pure lo stesso risultato col ferro ordinario; ma il ferro rincotto, esposto all' azione magnetica, non gli mostrò nessuna variazione di lunghezza.

Qualunque siano queste variazioni di lunghezza, il volume del ferro si conserva costante. Diffatti Joule avendo racchiusa una sbarra di ferro in una specie di bulbo di vetro, munito di cannello capillare e pieno di liquido, il livello di questo non variò nell' atto della magnetizzazione. E Gay-Lussac ebbe lo stesso risultato formando il bulbo, colla capacità interna di un tubo d' acciaio che magnetizzava.

Il Wiedemann, colle sue belle ricerche sulle relazioni fra la magnetizzazione, e l' elasticità, fu condotto ad una esperienza che, a quanto asserisce Maxwell (4), sembra in opposizione coi risultati ottenuti da Joule e Wertheim. Egli trovò diffatti che una corrente che percorra d' alto in basso un filo verticale magnetizzato (per esempio col polo nord in basso) fisso alla parte superiore, e libero all' inferiore, produce una torsione di questo filo, per la quale l' estremità inferiore, vista d' alto in basso, resta girata nel senso degl' indici d' un orologio. Questa torsione insomma, si effettua in senso tale, che indica un raccorciamento nel senso della magnetizzazione.

Non meno discordanti sono i risultati dei vari sperimentatori per rapporto alle variazioni di lunghezza, di fili di ferro percorsi direttamente dalla corrente, e quindi magnetizzati trasversalmente. Joule facendo passare la corrente per un filo teso nell' asse d' un tubo di ferro, osservò in questo un accorciamento. Beatston trovò invece che al passaggio della corrente un filo di ferro si allunga. E sperimentando sopra un filo di ferro dolce circondato da un' elica, trovò che dapprima l' elica non dava alcun effetto, poscia una corrente inviata nel ferro produceva finchè durava un allungamento dopo del quale anche la corrente nell' elica poteva fare lo stesso e così di seguito; inviando quindi alternativamente la corrente e nel ferro e nell' elica, poteva ogni volta avere l' effetto indicato.

Dopo tutto ciò non sembrerà cosa priva d' interesse il riprendere in esame questioni che tanto intimamente si collegano alla teoria dei fenomeni magnetici, nei quali, per quanto sieno semplici in confronto di altri studiati nella fisica, tuttavia resta ancora molto di oscuro ed indeterminato (5).

(1) Ann. de Ch. et Phys. — 3ª Serie t. XXIII p. 305.
(2) Comp. Rend. de l' Ac. de Paris XXII.
(3) Bibl. Univ. de Genève 1846.
(4) A treatise on Eletricity V. II pag. 87.
(5) Recentemente due fisici americani A. M. Mayer e Ogden N. Rood, promisero d' occuparsi delle variazioni di dimensioni dovute alla magnetizzazione. Il primo pubblicò una memoria storica preliminare (vedi Journal de d' Almeida 1874 pag. 100), ma le memorie seguenti, per quanto mi consta, non apparvero ancora. Il Rood (Journal de d' Almeida, 1876 pag. 139), trattando delle applicazioni del pendolo orizzontale esprime l' intenzione di servirsene per misurare i cambiamenti di dimensione dei corpi magnetici. Ma neppure esso pubblicò di poi nulla su questo argomento.

II. Metodo sperimentale adottato.

Per studiare variazioni di lunghezza tanto piccole e che si manifestano in modo così brusco, mi decisi ad abbandonare assolutamente l' uso di leve. Questo genere di congegno potrà valere a rendere visibili delle lente variazioni, come quelle prodotte dal calore; ma in ogni modo nei perni e nelle congiunzioni è sempre inevitabile qualche poco di giuoco, che fa scomparire i minimi spostamenti, o fa sì che si manifestino in modo irregolare. Conveniva adunque evitare le congiunzioni a pernio, e inoltre rendere minima la massa del congegno che il filo o l' asta devono muovere al variare di lunghezza.

Credei quindi che nulla di meglio potevo fare che adottare quello stesso sistema di esilissime molle d' acciaio munite di un leggerissimo specchio, che mi servì a dimostrare e studiare le variazioni di lunghezza del vetro dei condensatori; essendo esso stato già da me descritto (1), posso ora dispensarmi dal tenerne parola, come pure dall' indicare in qual modo dalle letture fatte al cannocchiale possansi calcolare le vere variazioni di lunghezza. Dirò solo, che la piccola molla a specchio permette d' ingrandire la variazione di lunghezza, per sette od otto mila volte, ed ha inoltre la preziosa prerogativa di poter dare indicazioni istantanee. Per questa proprietà essa valse a distinguere, nel citato lavoro, l' effetto del calore dall' effetto elettrico; e nel presente vedremo, mostrerà fenomeni transitori, che sfuggirebbero ad un meno pronto mezzo di misura. L' asta, filo o sbarra metallica, che si vuol studiare, si prolunga superiormente in una grossa asta d' ottone, solidamente fissata, mentre all' inferiore porta un' morsetto che la collega alla piccola molla a specchio. È inoltre circondata da un' elica per la quale si può far passare la corrente. Ordinariamente mi valsi d' un' elica induttrice formata avvolgendo ad una canna di vetro lunga quanto l' asta che si studia e grossa 12^{mm}, due strati di filo di rame coperto di cotone del diametro di $1^{mm.}$ Essa viene fissata all' asta solo nella parte inferiore cosicchè quest' ultima la regge, conservando pur tuttavia ogni libertà per variare di lunghezza. Due fili sottilissimi servono ad introdurre la corrente nell' elica senza far ostacolo ai movimenti della sbarra. Altri due fili servono a far passare, quando occorre, una corrente attraverso alla sbarra stessa.

La ragione per la quale l' elica deve essere portata dall' asta che si studia, e non essere fissata indipendentemente, è che disponendo le cose in quest' ultima maniera, sarebbe difficilissimo mettere l' asta esattamente nell' asse dell' elica, e quindi non potrebbero evitarsi nell' atto in cui si lancia la corrente nell' elica, degli spostamenti dell' estremo inferiore dell' asta, i quali darebbero false indicazioni.

Volendo sperimentare su aste o fili di ferro o d' acciaio, prima cura da aversi è quella d' assicurarsi che sieno privi di magnetismo. Coll' arroventamento è facile

(1) Atti dell' Acc. di Bologna 1879. N. Cimento, dic.^{e} 1879.

smagnetizzare il ferro dolce; ma in quanto all' acciaio la cosa è assai malagevole, e ciò che tuttavia più conviene quando non occorre che sia temprato, è ancora l' arroventamento protratto per qualche tempo, susseguito da raffreddamento lento, durante il quale è bene che l' asta sia tenuta perpendicolare al meridiano magnetico.

III. Variazioni di lunghezza dovuta al magnetismo longitudinale.

Allungamento prodotto dalla magnetizzazione. — Le mie esperienze furono eseguite con aste di ferro lunghe circa 1^{m}, 40, e grosse 16^{mm}, 7^{mm}, 6^{mm} e 3^{mm} (1), e con aste d' acciaio di 7^{mm} di diametro. Adoperai la corrente d' 8 coppie Bunsen, variando l' intensità, coll' aggiungere nel circuito delle resistenze.

Nel momento in cui si fa passare la corrente nell' elica, si nota un istantaneo spostamento della immagine della scala nel cannocchiale, in senso tale da indicare allungamento, e ciò s' adoperi ferro dolce od acciaio. In tutti i casi dunque il formarsi della polarità longitudinale, produce un allungamento. Esso è tanto maggiore quanto più intensa è la corrente che si adopera, e qualche volta fu di 50 o 60 millimetri della scala, corrispondenti ad un allungamento effettivo di circa 7 od 8 millesimi di millimetro. Aprendo il circuito, si vede un istantaneo spostamento in senso opposto a prima, e cioè l' asta di ferro o di acciaio si accorcia. Se si adopera del ferro ben dolce e la corrente fu debole, vedesi che esso riprende la primitiva lunghezza; ma con correnti forti, e specialmente adoperando l' acciaio, resta la sbarra, al cessare della corrente, notevolmente allungata. In pari tempo essa resta come è noto, magnetizzata permanentemente. In quanto all' acciaio può darsi che all' aprirsi del circuito conservi in tutto l' allungamento subìto, ciò che spiega come possa accadere, che messa in esperimento un' asta d' acciaio già magnetizzata, con correnti non tanto intense, non si osservi allungamento di sorta. Se dopo aver fatto agire una volta la corrente si chiude e si apre alternativamente il circuito, l' asta riprende pure alternativamente le lunghezze che ebbe, durante il primo passaggio della corrente e dopo la prima interruzione. Riporto due delle molte serie di letture, fatte in varie giornate d' esperienze.

Asta di ferro di 6^{mm} di diametro

		Allung.° totale	Allung.° rimanente
Posizione iniziale della scala	137^{mm}	31	15
Chiudo il circuito . . .	168		
Apro	152		
Circuito chiuso	168		
» aperto	152		
Circuito chiuso	168		
» aperto	152		

(1) Per le aste di 16^{mm}, feci uso d' un' elica di maggiori dimensioni di quelle indicate.

Asta d' acciaio di 7^{mm} di diametro

		Allung.° totale	Allung.° rimanente
Posizione iniziale della scala	142^{mm}	18	16,5
Circuito chiuso	160		
» aperto	158,5		
» chiuso	160		
» aperto	158,5		
» chiuso	160		

Una notevolissima differenza che pure si riscontra fra ferro dolce ed acciaio è che a parità di condizioni, l' allungamento che subisce quest' ultimo è molto minore.

Il risultato delle esperienze è dunque manifestamente in opposizione con ciò che un esame superficiale della analogia coi fenomeni elettrici dei coibenti, avrebbe fatto supporre. Diffatti in quel caso dimostrai aver luogo un allungamento in direzione perpendicolare alle linee di forza; quì invece l' allungamento è nella direzione di queste. Ma a chi consideri attentamente le specifiche differenze, fra la polarizzazione elettrica e la magnetica, apparirà chiaro che quest' ultima può produrre effetti diversi dipendentemente dalle forze molecolari dei corpi. Infatti il formarsi della polarità magnetica a differenza dell' elettrostatica, implica un movimento molecolare, che conduce ad un nuovo modo di aggregazione delle molecole stesse. E come in certi corpi, la cristallizzazione e cioè la concorde orientazione delle particelle, produce aumento di volume, così potrà accadere che lo spostamento concorde degli assi magnetici delle molecole del ferro verso una data direzione (1), produca pure un aumento di dimensione nella direzione della polarità, ad onta che le forze magnetiche reciproche delle molecole tendano ad accostarle, e quindi a raccorciare il corpo in quella stessa direzione.

Relazione fra l' allungamento del ferro dolce e l' intensità della corrente. — Volendo misurare gli allungamenti prodotti con correnti di varia intensità, conviene adoperare un' asta di ferro dolce priva di magnetismo, e mandare le correnti nell' elica sempre in una direzione cominciando dalle più deboli, e aumentandone poco a poco l' intensità. Con queste precauzioni si evitano i fenomeni complicati dal magnetismo rimanente. Giunti che si sia alla corrente più forte dovrà cambiarsi la sbarra, poichè un' altra corrente più debole non farebbe più l' effetto di prima, come si dirà fra poco.

(1) Per spiegare i fenomeni della magnetizzazione ed in particolare del magnetismo rimanente, si ammette che in generale, per effetto della magnetizzazione, una molecola qualunque non si diriga col proprio asse nella direzione della forza magnetica, come farebbe se fosse indipendente dalle altre molecole, ma soltanto il suo asse ruoti di un certo angolo verso quella direzione. In altro mio lavoro non ancora giunto a compimento tratterò la questione della teoria della magnetizzazione.

Effettuate queste misure per più aste di ferro dolce, di diversi diametri, potei riconoscere che l' allungamento è in proporzione del quadrato dell' intensità della corrente, almeno finchè la corrente stessa non è tanto forte. Il rapporto fra il quadrato dell' intensità e l' allungamento, cresce alquanto per correnti intense. Il prospetto seguente riassume le misure relative ad una sbarra di ferro di 16^{mm} di diametro, circondata da una larga elica di filo. L' intensità della corrente era data da una bussola inserita nel circuito. Adoperai 8 coppie di Bunsen, e varie resistenze ausiliarie nel circuito.

Intensità	Allungamento in mm. della scala	Rapporto del quadrato dell' intensità all' all.°
12,5	4,5	34,7
14,5	6	35
16,5	7,5	36,3
18	9	36
19,5	10,5	36,2
20	11	36,3
21	12	36,7
22	13,5	35,8
26	17	39,8
31	22	43,6

Si noti che il momento magnetico della sbarra cresce meno rapidamente della intensità della corrente.

Effetto di correnti successive. — Se dopo che una corrente ha magnetizzata un' asta di ferro o d' acciaio se ne invia nell' elica una più debole e nello stesso senso, in generale non si osserva che un piccolo allungamento, od anche nulla affatto, quando la corrente stessa sia abbastanza poco intensa. Invece la corrente stessa inviata in direzione contraria alla primitiva, produce un raccorciamento dell' asta, col quale sparisce in parte quell' allungamento che rimase dopo la corrente forte. Ora si sa per le ben note ricerche del Wiedemann, che la seconda corrente, se abbia una intensità appropriata, può smagnetizzare affatto la sbarra. Ora quand' anche ciò accada non ho mai osservato che la sbarra torni esattamente alla lunghezza che aveva prima di subire qualsiasi induzione; invece essa conserva sempre una lunghezza maggiore della iniziale. Così per esempio, un' asta d' acciaio di 7^{mm} di diametro diede gli allungamenti seguenti:

Posizione iniziale della scala . . 342^{mm}
Corrente intensa nell' elica . . . 360
Aperto il circuito 358,5
Con piccola corrente inversa, capace di smagnetizzare l' asta (determinata a tentativi) . . 345

Dunque: *una sbarra smagnetizzata colla corrente, si conserva più lunga di quando non era magnetizzata.* Ciò conferma chiaramente, ciò che per altra via si era già condotti a supporre, e cioè che una sbarra smagnetizzata da una corrente è in ben differenti condizioni d' una che non subì nessuna induzione. Una stessa corrente dell' elica induttrice, la quale agisca sopra un' asta che fu dapprima fortemente magnetizzata, può dunque produrre effetti opposti secondo la sua direzione; ciò può forse spiegare la divergenza di risultati ottenuti da vari sperimentatori.

Fenomeni che si osservano nell' atto d' invertire la polarità magnetica. — Supponiamo che dopo avere inviata una corrente nell' elica, ed averla interrotta, si mandi di nuovo la stessa corrente nella stessa direzione. Se nell' asse dell' elica è posto un filo di ferro più o meno dolce, si vedrà nuovamente nel campo del cannocchiale spostarsi la immagine della scala in modo da indicare un certo allungamento, il quale sparisce aprendo il circuito. Per quanto rapido sia il moto della immagine della scala, pure si resta persuasi che essa si è semplicemente spostata nella direzione osservata. Se nell' asse dell' elica si è posta una sbarra d' acciaio temprato, l' immagine della scala potrà restare quasi assolutamente immobile al chiudersi del circuito, giacchè dopo la corrente, la sbarra restò permanentemente allungata.

Si mandi invece nell' elica una corrente in verso contrario a prima, oppure tenendo chiuso il circuito, s' inverta in esso la corrente. Osservando al cannocchiale con attenzione si vedrà distintamente nel caso del ferro dolce, che la immagine della scala si ferma press' a poco nella stessa posizione come nel caso precedente, ma nell' atto di spostarsi si avvìa in direzione opposta alla posizione nella quale poi si ferma definitivamente. E nel caso dell' acciaio temprato, invece di vedere restar fissa la scala, vedesi un rapido spostamento, pel quale per un istante la immagine di essa si fa confusa e sparisce, dopo di che essa si mostra nella stessa posizione di prima. Questi fenomeni indicano, che tanto nel ferro che nell' acciaio, *nell' atto in cui s' inverte la polarità, la sbarra si raccorcia momentaneamente.* In altre parole, la sbarra compie nell' atto della inversione, una oscillazione longitudinale, conseguenza della istantanea rotazione che devono compiere le molecole per obbedire alla nuova forza induttrice.

Per rendere evidente questo istantaneo raccorciamento nell' atto della inversione della polarità, pensai di ricorrere al seguente artifizio. Disposi entro il cannocchiale, e nel luogo ove formasi l' immagine della scala, una lastrina opaca, che nascondeva metà del campo. Levai di posto la scala, e vi sostituii una lastra di metallo con un forellino illuminato da una fiamma, in modo che, se nel canocchiale non avessi posto quella lastrina che nascondeva metà del campo, osservando in esso avrei visto un punto luminoso, immagine di quel foro. Le cose erano disposte in modo, che se l' asta si allungava, il punto luminoso non appariva, nascondendosi vieppiù dietro la lastrina opaca sopra menzionata, ed anzi il campo del cannocchiale restava assolutamente oscuro avendo avuto la precauzione di rendere buia

la camera; se invece l'asta si raccorciava anche di pochissimo, il punto luminoso appariva nella parte libera del campo del cannocchiale. Potei in tal modo constatare, che chiudendo il circuito colla corrente replicatamente in una stessa direzione, il campo ottico rimaneva oscuro; e se al contrario mandava nel circuito una corrente in senso contrario all' ultima che vi era passata, o se, nel caso in cui era in esperienza la sbarra d' acciaio, lasciando chiuso il circuito invertivo semplicemente la direzione della corrente, appariva per un istante il punto luminoso, indicando così in modo evidentissimo un transitorio raccorciamento nell' atto dell' inversione della polarità.

Influenza del magnetismo terrestre. — Sperimentando con aste o fili di ferro rincotto, mi accadde di osservare che l' allungamento prodotto da una corrente d' intensità costante, era diverso, secondo che s' inviava nell' elica in un senso, o nel senso contrario. Così per esempio inviando la corrente in un senso che chiamerò A, od in senso opposto B, e adoperando successivamente da 2 a 6 coppie Bunsen, una sbarra di ferro di 16^{mm} di diametro diede gli allungamenti seguenti:

N.° delle	Allungamenti in mm. della scala	
coppie	corrente A.	corrente B.
2	4^{mm},5	7^{mm}
3	7	9
4	10	12
5	12, 5	15
6	14, 5	17, 5

Questa differenza di effetti fu sempre visibile, anche avendo cura di adoperare aste non magnetizzate, e di sperimentare prima colle correnti deboli, e poi colle più intense. Non può dunque attribuirsi a magnetismo rimanente. Siccome la maggior lunghezza ha luogo sempre quando la polarità del ferro è nello stesso senso di quella che vi produce l' induzione terrestre, parmi che questa deve considerarsi come causa del fenomeno. Infatti l' effetto del magnetismo terrestre, può immaginarsi sostituito da quello d' una corrente costante che percorra l' elica in un determinato senso, e che quindi a seconda della direzione della corrente che veramente si manda nel circuito, vi si aggiunge o vi si sottrae.

IV. Variazioni di lunghezza dovute al magnetismo trasversale.

Accorciamento prodotto dalla corrente. Se invece di mandare una corrente nell' elica che circonda un' asta o filo di ferro privo di magnetizzazione, si mette il ferro stesso nel circuito della pila, osservansi certe variazioni di lunghezza che dipendono in modo evidente da due cause distinte. Nell' atto in cui si chiude il circuito si vede un istantaneo spostamento dell' immagine della scala nel campo del

cannocchiale, in senso tale che indica una subitanea diminuzione di lunghezza. Immediatamente dopo comincia uno spostamento in senso contrario più o meno lento a norma della intensità della corrente, che dura se non si protrae di troppo l' esperienza, sinchè non si apra il circuito. Infine nel momento dell' apertura, vedesi un istantaneo allungamento. Siccome l' allungamento continuo è certamente dovuto allo sviluppo di calore, diremo *che una corrente che percorra una sbarra di ferro, produce finchè dura, una diminuzione di lunghezza.*

È noto, specialmente per le ricerche del Villari, che una corrente che percorra un filo di ferro, vi produce una magnetizzazione trasversale, e cioè che per azione della corrente le molecole magnetiche tendono a disporsi coi loro assi in direzione perpendicolare al filo. Una corrente che passi in questo metallo deve quindi spostare le molecole nell' atto in cui comincia o s' inverte; ciò che spiega i fenomeni singolari scoperti e studiati dal Villari, che il ferro presenta con correnti interotte od invertite. Abbiamo visto che il ferro magnetizzandosi aumenta di dimensione nella direzione delle linee di forza, e siccome il volume non varia, deve aver luogo un restringimento nella direzione a quelle perpendicolare. Era dunque da prevedersi che un filo di ferro percorso dalla corrente dovesse raccorciarsi.

Per vedere quale sia la lunghezza che avrebbe la sbarra dopo il passaggio della corrente, se questa non l' avesse riscaldato, basta misurare l' accorciamento istantaneo nella chiusura, e l' allungamento all' apertura del circuito. Si trova sempre quest' ultimo alquanto minore. Si manifesta dunque anche in questo caso la così detta forza coercitiva, e l' asta conserva un certo grado di magnetismo trasversale rimanente. Chiudendo ed aprendo successivamente altre volte il circuito, il raccorciamento nell' atto della chiusura diviene eguale all' allungamento nell' atto dell' apertura, ed entrambi eguali all' allungamento osservato nell' interrompere per la prima volta la corrente. Riporto qui i risultati di alcune esperienze fatte sopra un' asta di ferro dolce di 6^{mm} di diametro ed un filo di 3^{mm}.

Asta di 6^{mm}, 4 coppie Bunsen

Posizione iniziale	270^{mm}
Chiudendo il circuito	266, 5
Nel momento dell' apertura dopo qualche secondo; spostamento da	277
a	278, 5
Chiusura del circuito; spost.° da	275
a	273, 5
Apertura del circuito ; spost.° da	279
a	280, 5
La stessa corrente inviata nell' elica dà spostamento da	285
a	336

Filo di 3^{mm}, 4 coppie Bunsen

Posizione iniziale		170^{mm}
Chiudendo il circuito		154
Nel momento dell' apertura; spost.°	da	188
	a	191
Chiusura; spost.°	da	185
	a	182
Apertura; spost.°	da	199
	a	202

Da questi numeri risulta, che l' asta di 6^{mm}, si raccorciò di 3^{mm}, 5 nella prima chiusura, e si allungò di 1^{mm}, 5 alla prima interruzione, dopo di chè si raccorciò ed allungò, chiudendo ed aprendo il circuito di 1^{mm}, 5. Magnetizzando longitudinalmente lo stesso ferro colla stessa corrente, si ebbe un allungamento di 5^{mm}, ciò che mostra quanto le variazioni di lunghezza dovute alla magnetizzazione trasversale, siano minori di quelle che accompagnano la longitudinale. Il filo di 3^{mm} presentò fenomeni analoghi, se non chè le variazioni di lunghezza furono maggiori. Ma in pari tempo il riscaldamento prodotto dalla corrente era molto più rapido.

Sperimentando con aste di acciaio si hanno effetti analoghi, ma numericamente minori, ciò che li rende meno facili a constatare. Oltre a ciò è assai più difficile poter trovare fili ed aste prive di magnetizzazione longitudinale.

Effetto di correnti successive. — Nello stesso modo che si può distruggere il magnetismo longitudinale di un' asta di ferro con una corrente inversa nell' elica induttrice di conveniente intensità e che per tal modo la corrente stessa produce accorciamento invece che allungamento; così una corrente inviata nell' asta in senso contrario a quello della corrente precedente, può produrre un allungamento in luogo di accorciamento, ciò che indica lo sparire parziale o totale della polarità trasversale. L' esperienza riesce bene con ferro ben dolce, (che tuttavia possiede forza coercitiva), di 6^{mm} circa di diametro.

Fenomeni che si osservano invertendo la polarità trasversale. — Se dopo aver magnetizzato trasversalmente un' asta di ferro con una corrente in una data direzione, si chiude il circuito in modo che la corrente abbia in essa la direzione contraria, in luogo dello spostamento ordinario della scala che indica raccorciamento, si nota una specie di oscillazione, la quale fa nascere in chi osserva l'idea che il raccorciamento stesso sia preceduto da un istantaneo allungamento. Disponendo le cose come è stato indicato pel caso del magnetismo longitudinale, e cioè sostituendo alla scala un punto luminoso nascosto nel campo del cannocchiale da

una lastrina opaca, si riesce a rendere evidente che: *nell' atto in cui la polarità trasversale s' inverte, l' asta si allunga per un istante, e si accorcia di nuovo immediatamente dopo.* Però, invertendo più volte la corrente, non sempre il fenomeno continua a prodursi. Ciò può spiegarsi ammettendo che dopo alcune inversioni, le molecole si spostino in modo che l' angolo dei loro assi coll' asse del filo di ferro, non vari o vari pochissimo. Così per esempio se dopo che passò la corrente in un certo senso, una molecola restò col proprio asse magnetico in direzione orizzontale e col polo nord a sinistra dell' osservatore, per effetto d' una nuova corrente in senso contrario, la molecola può fare un mezzo giro intorno ad un asse di rotazione verticale, finchè il polo nord giunga alla destra.

Mettendo l' orecchio presso l' asta di ferro, nell' atto in cui si chiude la corrente, si ascolta un suono simile a quello di un urto dato all' asta stessa. Se aperto il circuito lo si chiude più volte in modo che la corrente abbia sempre la stessa direzione, si ascolta sempre l' urto medesimo. Ma se invece si manda la corrente in direzione contraria, il suono che si ascolta è assai più intenso. Questa semplicissima osservazione conferma l' enunciato precedente.

V. Variazioni di lunghezza dovute all' alternarsi delle polarità longitudinale e trasversale.

Caso in cui non s' inverta la direzione della corrente. — Se dopo che un' asta di ferro o di acciaio, è stata magnetizzata trasversalmente per effetto d' una corrente che l' ha attraversata, si manda la stessa corrente nell' elica che la circonda, si vede un notevole allungamento, pel quale non solo sparisce il raccorciamento dovuto alla polarità trasversale rimanente, ma l' asta risulta più lunga di quel che era nello stato naturale. Aprendo il circuito dell' elica l' asta conserva un certo magnetismo longitudinale in causa della forza coercitiva che possiede, come pure conserva in parte quell' allungamento.

Inviando di nuovo la corrente attraverso l' asta si vede un grande accorciamento e nello stesso tempo, sparisce in gran parte il magnetismo longitudinale. L' azione della corrente nell' asta, e quello della corrente stessa nell' elica, mostrano così un antagonismo evidentissimo.

Sembra anzi che l' inviare delle correnti in un' asta calamitata, sia il miglior mezzo di fargli perdere il magnetismo longitudinale (1).

Inversioni di correnti nel filo di ferro. — Se dopo che la corrente passando nell' elica, magnetizzò l' asta di ferro longitudinalmente, si manda la corrente stessa attraverso il ferro, prima in una direzione poi nell' altra, si vede in generale nel secondo caso un nuovo raccorciamento. Riproduco quì alcune misure; nelle quali con A e B si sono indicate le due direzioni opposte della corrente, sia nell' elica che nel ferro.

(1) Wiedemann, Pogg. Ann. CXVII 213.

Corrente	chiusa	nell' elica	A	93mm
"	"	nel ferro	A	74
"	"	"	B	50
"	"	"	A	50
Corrente	chiusa	nell' elica	A	120
"	"	nel ferro	B	78
"	"	"	A	75
"	"	"	B	75
"	"	"	A	75

Si vede che coll' asta adoperata, si otteneva il massimo raccorciamento, quando la corrente s' inviava nel ferro successivamente nelle due direzioni opposte. Ciò verificai costantemente. Osservando i numeri precedenti, apparisce pure, che la corrente nella direzione B, raccorciava assai più che nella direzione opposta. Questa influenza della direzione della corrente, si verificò anche per mezzo delle correnti indotte. Infatti se mentre si mandava la corrente nel ferro, l' elica era posta in comunicazione con un galvanometro, si otteneva una corrente indotta d' intensità maggiore quando la corrente nel ferro avea la direzione B che la A. Dopo le due correnti opposte, cessava l' induzione di prodursi mandando nuovamente una corrente nel ferro. Nelle moltissime esperienze da me fatte mi accadde spesso di osservare un tal fenomeno. Esso si produce immancabilmente se si sperimenta con un' asta di ferro, che in precedenze fu fortemente magnetizzata trasversalmente.

Nell' atto in cui si manda nel ferro la corrente per la seconda volta, dopo la corrente nell' elica, vedesi la solita oscillazione dell' asta, e cioè prima di raccorciarsi, essa si allunga per un istante. Invertendo successivamente più volte la corrente, quell' oscillazione cessa di prodursi.

Magnetismo elicoidale. — Alcune aste che presentavano lunghezze diverse. dopo essere state magnetizzate longitudinalmente, inviando in esse la corrente in un senso, od in senso contrario, presentarono il curioso fenomeno che dopo essere state magnetizzate longitudinalmente in senso contrario a prima, restava pure invertita la differenza di lunghezza che presentavano passando in esse la corrente nelle due direzioni opposte.

Ecco alcune misure relative ad una di tali aste:

Corrente	chiusa	nell' elica	A	45
"	"	nel ferro	A	32
"	"	"	B	5
"	"	"	A	13
"	"	"	B	7
"	"	"	A	11

Corrente chiusa nell' elica	A	46
„ „ nel ferro	B	12
„ „ „	A	17
„ „ „	B	8
„ „ „	A	11
„ „ „	B	6

Secondo questi numeri è chiaro che dopo inviata la corrente nell' elica nella direzione A, il maggior raccorciamento si otteneva colla corrente nel ferro nella direzione B, sia poi che si cominciasse coll' inviare la corrente nel ferro in questa direzione o nell' opposta. Ora magnetizzando longitudinalmente colla corrente nell' elica nella direzione B si ottenne:

Corrente nell' elica	B	46
„ nel ferro	B	26
„ „	A	5
„ „	B	7
„ „	A	1
„ „	B	2
Corrente nell'elica	B	46
„ nel ferro	A	2
„ „	B	10
„ „	A	1
„ „	B	4
„ „	A	1

Dunque dopo aver invertito il magnetismo longitudinale, coll' invertire la corrente nell'elica, il maggior accorciamento si ebbe non più colla corrente nel ferro nella direzione B, ma colla corrente in direzione contraria A.

Se il fenomeno fosse dovuto a magnetismo trasversale rimanente, non si comprenderebbe questa inversione di effetti prodotti dall' invertirsi del magnetismo longitudinale. Esso non può spiegarsi che ammettendo nell' asta una tendenza delle molecole a disporsi coi loro assi secondo linee elicoidali, allorquando agisce l' elica induttrice. In tal ipotesi soltanto coll' invertire la polarità longitudinale s' invertono anche le condizioni delle molecole rispetto alla magnetizzazione trasversale.

Dalla direzione rispettiva delle correnti nell' elica e nell' asta risultò che, in alcune aste da me sperimentate, le molecole tendevano a disporsi secondo eliche destre; in altre invece secondo eliche sinistre. Ma non giunsi a scoprire in qual modo avea origine quella singolare tendenza, benchè, forse, sia lecito supporre, che qualche torsione accidentale delle aste non vi sia stata completamente estranea.

VI. Conclusioni.

Sarà utile riassumere i principali risultati da me raggiunti.

1.° Per effetto della magnetizzazione, ha luogo nel ferro e nell' acciaio, un aumento di dimensione nella direzione della magnetizzazione stessa.

2.° Al cessare della forza magnetizzante, persiste in parte quell' aumento di dimensione, e più o meno a norma della diversa forza coercitiva.

3.° Per aste di ferro magnetizzate longitudinalmente da un' elica che le circonda, gli allungamenti sono proporzionali al quadrato dell' intensità della corrente almeno finchè quest' intensità non è molto grande.

4.° Se dopo una corrente forte, se ne manda nell' elica una debole in senso contrario, essa produce raccorciamento; però quand' anche è tale da smagnetizzare l' asta, questa conserva una lunghezza maggiore che allo stato naturale.

5.° Nell' atto d' invertire la polarità longitudinale di un' asta, la sua lunghezza momentaneamente diminuisce, compiendo così una oscillazione longitudinale.

6.° Un' asta o filo di ferro percorso da una corrente, si accorcia nell' atto della chiusura.

7.° Nell'atto dell'apertura si allunga, ma quest'allungamento è minore dell'accorciamento iniziale, ciò che prova che il magnetismo trasversale in parte rimane.

8.° Nell' atto d' invertire la polarità trasversale, l' asta si allunga momentaneamente e fa in tal modo un' oscillazione longitudinale.

9.° Il raccorciamento prodotto dalla corrente è assai più grande se l' asta fu prima magnetizzata longitudinalmente. Essa resta in gran parte smagnetizzata, e in un' elica che la circondi sviluppasi una corrente indotta.

10.° Alcune aste di ferro manifestarono una tendenza ad assumere una magnetizzazione elicoidale, e cioè a volgere gli assi magnetici delle loro molecole, secondo delle eliche. Ciò venne indicato dai raccorciamenti prodotti da una corrente passante per quelle aste, diversi secondo la direzione di essa, e secondo il senso della precedente magnetizzazione longitudinale.

SULLA

DILATAZIONE GALVANICA

NOTA

DEL PROFESSOR AUGUSTO RIGHI

(Letta nella Sessione ordinaria dell' 11 Dicembre 1879)

Nel 1866 l' Edlund (1) pubblicò alcune esperienze, secondo le quali un filo metallico percorso dalla corrente subirebbe un allungamento, indipendente da quello dovuto al calore sviluppato. Egli deduceva la temperatura del filo, dalla sua resistenza elettrica, e ne misurava direttamente la lunghezza. Alcuni anni dopo (2) lo Streinz con altro metodo, confermò il risultato d' Edlund. Tuttavia il Wiedemann (G.) nel suo trattato, con rigorosa critica mostrò che tali esperienze non erano scevre da obbiezioni. E più tardi l' Exner (3), riprendendo le esperienze d' Edlund, giunse ad un risultato opposto a quello di questo fisico, e cioè concluse alla non esistenza della dilatazione galvanica.

Recentemente il prof. Basso, misurando al catetometro gli allungamenti rispettivi di due fili di metalli diversi, giunse pure a concludere, che se esiste dilatazione galvanica, essa è tale da sfuggire alle misure. Infine il Blondlot (4), adoperando lamine sottili di metallo percorse dalla corrente, nelle quali la dilatazione termica deve aver luogo in ogni senso mentre la dilatazione galvanica deve farsi sentire solo nella direzione longitudinale, giunse ancora allo stesso risultato.

Avendo a mia disposizione un apparecchio atto a dare indicazioni esatte ed istantanee delle minime variazioni di lunghezza d' un filo, credei non inutile sottoporre nuovamente alla prova sperimentale una questione sì importante. L' appa-

(1) Pogg. Ann. CXXIX, 15, CXXXI 387.
(2) Pogg. Ann. CL, 368.
(3) Ann. der Physik, 18, 100 (1877).
(4) Journal de Physique de D' Almeida, avril 1879.

recchio in discorso altro non è che quello stesso semplicissimo congegno di piccole molle d'acciaio, munito di specchietto, che descrissi in altro mio lavoro (1); posso quindi dispensarmi dal tenerne ora nuovamente parola. Basterà solo rammentare che le indicazioni che dà l'apparecchio sono prontissime, e possono considerarsi come istantanee.

Sperimentai sopra fili di rame di 1^{mm}, 2^{mm}, 5^{mm}, e 7^{mm}, di diametro, lunghi circa un metro e mezzo, ed adoperando la corrente di 1 a 6 coppie di Bunsen.

Se esiste dilatazione galvanica, essa deve manifestarsi d'un tratto nell'atto di chiudere il circuito, e sparire pure istantaneamente nell'atto d'aprirlo. Ciò deve distinguerla dall'allungamento prodotto dal calore. Osservando dunque i movimenti dello specchietto, con cannocchiale e scala, se la dilatazione galvanica esiste, dovrà vedersi nell'atto della chiusura del circuito, un brusco movimento, susseguito da un moto regolare e continuo nello stesso senso, dovuto alla dilatazione termica. Nel momento poi in cui il circuito venga aperto, dovrà osservarsi un brusco spostamento in senso contrario.

Ora fatta molte volte l'esperienza, non mi fu dato mai di vedere alcun spostamento rapido nella chiusura o nell'apertura del circuito, ma solo l'uniforme spostamento dovuto al calore. Eppure la sensibilità dell'apparecchio era tale che uno spostamento di mezzo millimetro della scala, corrispondeva ad un allungamento di un ventimillesimo di millimetro del filo. Per effetto del calore svolto dalla corrente col filo di 2^{mm}, 5 e con due coppie Bunsen, la scala si spostava in modo continuo colla velocità di quasi tre millimetri al secondo.

Queste esperienze, non meno di quelle d'Exner e degli altri sperimentatori che dopo si sono occupati dell'argomento, dimostrano dunque, in un modo semplice e preciso, che se esiste dilatazione galvanica, essa è lungi dall'avere il valore ad essa assegnato da Edlund e Streinz, ed anzi è tale da sfuggire anche ai più sensibili mezzi di misura.

(1) Atti dell' Acc.ª di Bologna 1879. N. Cimento dic.ᵉ 1879.

SULLA

FORMAZIONE DELL' ALBERO DI MARTE

NOTA

DEL PROF. AUGUSTO RIGHI

(LETTA NELLA SESSIONE ORDINARIA DELL' 11 DICEMBRE 1879)

Se in una soluzione di silicato potassico (vetro solubile) si lasciano cadere alcuni cristalli di solfato di ferro, in capo a qualche ora, formansi alla superficie di essi innumerevoli aghi sottilissimi pressochè rettilinei e verticali, i quali col loro insieme imitante per la forma ed il colore una piccola vegetazione, costituiscono il così detto *albero di Marte*.

La scoperta di questo fenomeno curiosissimo data da più di due secoli, poichè è dovuta a Glauber. (1).

Secondo l'analisi di alcuni chimici, queste arborescenze conterrebbero silicato di ferro, e carbonato di potassa. Esse furono studiate dal sig. Faure (2), il quale le ritenne vere cristallizzazioni, ed annunciò che i rami ascendenti formavano tutti uno stesso angolo colla verticale, angolo dipendente dalla densità della soluzione di silicato; volle anzi trovare un rapporto fra le direzioni delle diramazioni e quelle delle faccie di clivaggio dei cristalli. I signori Mure e Clomont (3) ottennero delle arborescenze con altri sali nella soluzione di silicato potassico, e cioè coi solfati di rame, di zinco, di manganese, di cadmio, e coi nitrati di calce e d'argento; come pure sostituendo al vetro solubile, sia una soluzione di saccarato di calce, sia un miscuglio agitato fortemente e filtrato, di soluzione di potassa caustica ed olio. Notarono infine che i piccoli arbusti minerali sono tutti cavi internamente; e che anzi spesso veggonsi bollicine gassose scorrere col liquido nel loro interno.

(1) L'Union pharmacéutique, juin, 1866.
(2) Figuier. — L'année scientifique, 1865.
(3) L'Union pharmacéutique, juin, 1866.

Quantunque questi fenomeni, che tutti considerarono come cristallizzazioni non abbiano a mio parere molta importanza, tuttavia per la loro eleganza e singolarità mi invogliarono a riprodurli, ed a cercarne la spiegazione; e ripetuta moltissime volte l' esperienza, sia cambiando i corpi adoperati, sia variandone le condizioni, giunsi a persuadermi che le cause del fenomeno, all' infuori della formazione d' un corpo insolubile (il silicato di ferro, nel caso dell' esperienza di Glauber), sono bensì puramente d' ordine fisico, ma che il fenomeno stesso nulla ha di comune colla cristallizzazione.

Le esperienze si eseguiscono comodamente adoperando quei sottili tubi d'assaggio tanto in uso nei laboratori di chimica. Adoperando dapprima una soluzione di silicato, ottenuta con una parte di soluzione quale trovasi in commercio, e due di acqua, ottenni le belle arborescenze verdi del solfato di ferro, verdi-azzurre dal solfato di rame, bianco-rosea e meno tardiva a formarsi col solfato di manganese, di un bel verde e di forme speciali col solfato di nichel, ed intensamente azzurre col nitrato di cobalto, e molte altre che tralascio d' enumerare. Le inclinazioni dei rami furono sempre senza regola, nè ebbero relazione veruna col titolo della soluzione silicea.

Producendo il fenomeno fra due lastrine di vetro verticali ed osservando con un microscopio di mediocre ingrandimento, disposto orizzontalmente l' estremità di un ago nell' atto in cui si forma, esso offre l' aspetto cilindrico ed a troncatura irregolare, d' un cannello di vetro spezzato; se non che, la forma della troncatura varia gradatamente nel mentre che si allunga.

Adoperando la soluzione di silicato alquanto densa, cioè senza aggiunta d'acqua, le arborescenze richiedono a formarsi un tempo assai maggiore che colla soluzione diluita al triplo; invece con soluzione troppo diluita, si fanno più prontamente, ma risultano brevi e di breve durata. Qualche volta però, ed anzi quasi sempre se si adopera il liquido concentrato, veggonsi formarsi dei rami, in modo diverso da quello osservato col microscopio. Alla superficie del cristallo lasciato cadere nel liquido appariscono delle bollicine gassose, che in parte certamente constano di aria aderente, ed in parte sono dovute ad acido carbonico, o ad altri gas generati nell' azione chimica. Queste bollicine si allontanano poco a poco dal cristallo salendo verticalmente o quasi, e trascinando dietro di loro una colonnetta che pel colore mostrasi formata da una soluzione del sale. Ogni bollicina viene così a formare un ramo della arborescenza, più o meno grosso secondo la dimensione della bolla, e più o meno rettilineo, secondo il cammino che accidentalmente percorse la bolla nel salire. Anche i rami così formati sono evidentemente cavi nell' interno, ed anzi in quelli più grossi non è raro vedere particelle estranee d' impurità scorrere col liquido nel loro interno.

In due modi dunque formansi le arborescenze: e cioè, senza bolla di gas alla sommità, o coll' aiuto di questa bolla.

In ogni caso però nell' atto in cui i rami si formano, sono evidentemente pieni di una saluzione di quel sale che si è lasciato cadere nel liquido siliceo. Dietro ciò, e dall' insieme delle mie osservazioni acquistai la convinzione che le arborescenze si formino nel modo seguente.

Il cristallo, per esempio di solfato di ferro, che si è posto, in fondo alla soluzione di silicato, si discioglie lentamente, e si riveste così d' un velo della propria soluzione. Per la reazione chimica che in pari tempo ha luogo, questo strato liquido resta separato dalla soluzione di silicato, da una pellicola insolubile. la quale però per la sua sottigliezza essendo permeabile, e forse per effetto di osmosi, non impedisce al solfato di ferro di continuare a disciogliersi in acqua fornitagli dal liquido siliceo. Bentosto, e specialmente nelle parti più elevate del cristallo, la soluzione di ferro, specificamente meno pesante di quella di silicato potassico, tendendo a salire, si allunga verticalmente in prominenze, ed affluisce dal basso all' alto. Questa vena liquida è continuamente esposta all' azione chimica del mezzo, che la solidifica all' intorno; ma nello stesso tempo pel formarsi continuo di nuove quantità della soluzione stessa, essa tende sempre ad elevarsi sull' orlo del tubetto capillare formatosi, ciò che accresce continuamente la lunghezza di questo. La diversa rapidità di formazione, e le diverse dimensioni raggiunte dalle arborescenze dipenderanno poi dall' essere in una certa proporzione, la solubilità del cristallo, la rapidità di formazione della crosta solida, la viscosità del liquido etc. In tal modo parmi debba spiegarsi la formazione dei rami, nel caso in cui alla sommità di essi non veggonsi bollicine di gaz.

L' essere troppo densa la soluzione di silicato, dovrà rendere più lenta la formazione delle arborescenze. Infatti se da una parte la differenza di densità fra la vena fluida che monta ed il liquido ambiente diviene maggiore, si accresce d'altra parte grandemente la viscosità di quest' ultimo; e ciò ehe più vale, contenendo la soluzione di silicato minor quantità d' acqua, il disciogliersi del cristallo si farà assai più lento, e forse ancora più lentamente avverrà la reazione chimica.

La formazione di arborescenze per mezzo di bollicine gassose, che ha luogo specialmente quando il liquido siliceo è assai denso, è ancor più facile da comprendere. La bollicina, simile ad una bolla di sapone, è racchiusa in un velo liquido della soluzione di solfato di ferro. Essa si eleva verticalmente, trascinando per coesione dietro di sè una colonnetta della soluzione stessa, la quale poi più o meno lentamente si solidifica all' intorno, per la reazione chimica col silicato potassico.

Per quanto ovvie siano queste spiegazioni, pure come controprova istituii le esperienze seguenti. Un cannello di vetro affilato alla parte inferiore, e colla punta incurvata verso l' alto, sta immerso nella soluzione di vetro solubile, e contiene una soluzione salina, per esempio di solfato di ferro, la quale può a volontà farsi effluire nell' interno del liquido siliceo. Se si determina l' efflusso, si vede la vena liquida ascendente solidificarsi all' intorno, ed allungarsi lentamente conservando la forma

cilindrica, se si regolò a dovere l' efflusso. La formazione dei rami senza bolla è in tal modo imitata. Se il solfato di ferro sgorga troppo rapidamente, esso forma al disopra dell' orifizio un' ampia espansione irregolare racchiusa in un velo sottile solidificato. Se in tali condizioni con un altro tubo di vetro affilato nel quale si spinge aria, si producono nell' interno di quella massa di soluzione di ferro delle bollicine d'aria, veggonsi quelle che hanno sufficiente dimensione per vincere le resistenze opposte, innalzarsi nel liquido siliceo, trascinandosi dietro una colonnetta di solfato di ferro che tosto poi all' intorno si solidifica. In tal maniera si imita la formazione di arborescenze con bollicina gassosa.

Risulta dalla spiegazione data che le arborescenze prodotte da bollicina gassossa, devono probabilmente formarsi più rapidamente, se coll' elevazione di temperatura si rende più fluida la soluzione di silicato come pure se, indipendentemente da questa circostanza, si adoperino corpi molto solubili od anche deliquescenti. Ciò trovai verificato dalle esperienze. Anzi operando a temperatura prossima a 100°, alcuni corpi presentano la formazione delle arborescenze assai rapida e quasi istantanea. Così lasciando cadere in una soluzione di silicato potassico, diluita con due volte il suo volume d' acqua, e riscaldata verso 100°, un cristallo di cloruro oppure di nitrato di cobalto, partono da esso, quasi come per esplosione delle bollicine gassose, che trascinando dietro di loro delle colonnette di soluzione del cristallo, formano istantaneamente un' arborescenza. Con nitrato o solfato d' uranio, si ha un risultato simile; ma le bolle muovonsi con minore velocità. Lo stesso dicasi adoperando una soluzione concentrata di silicato, e lasciandovi cadere un pezzetto di percloruro di ferro.

Quest' ultimo corpo presenta la particolarità di fornire arborescenze a formazione rapidissima, anche alla temperatura ordinaria, p. es. 20°, purchè però si adoperi la soluzione silicea concentrata.

I sali di cobalto sopra nominati, offrono invece il fenomeno molto lentamente alla temperatura ordinaria. Questa differenza deriva da ciò che la temperatura influisce anche sulla solubilità e sulla reazione chimica.

In queste esperienze si nota in generale che le bollicine più piccole sono quelle che si muovono più rapidamente e cangiano più spesso la direzione del loro moto e che le bolle grosse invece si muovono come a sbalzi, ed il tubetto da esse generato non risulta cilindrico, ma presenta una serie di rigonfiamenti. Spesso accade che le bolle giunte alla superficie del liquido, spinte sempre innanzi pel continuo disciogliersi del cristallo, girano alquanto rasente alla superficie e ridiscendono nel liquido. Allorchè una bolla si rompe alla superficie del liquido, vedesi poco a poco la soluzione del cristallo percorrere dal basso all' alto il tubetto lasciato dalla bolla, e accumularsi al disopra della soluzione silicea.

Come giunsi a trovare corpi che presentano la formazione istantanea, od almeno rapidissima delle arborescenze prodotte con bolle gassose, così ne trovai altri, che danno la formazione rapida delle arborescenze senza bollicine. Tali sono

il percloruro di ferro ed il solfato d' uranio, in soluzione silicea diluita al triplo, specialmente elevando la temperatura fin verso 100°; il cloruro d' antimonio in soluzione silicea concentrata ed a temperatura ordinaria, ecc. Tanto l' esperienza in discorso, come quella poc' anzi descritta coi due sali di cobalto, o con uno degli altri corpi indicati, nelle quali le arborescenze dei due generi formansi a vista d' occhio, riescono veramente interessanti a vedersi. Spesso accade anzi di vedere in pari tempo prodursi le arborescenze originate da bollicine gazose, e quelle originate senza. Il solfato d' uranio in particolare posto in una soluzione di silicato diluita e calda, è sotto questo rapporto preferibile. L' elevazione di temperatura influisce ancora sulla formazione di quelle arborescenze, che si producono lentamente. In quanto a quelle senza bollicine gassose, l' influenza del calore è varia; ma in quanto alle altre, come colla spiegazione data è facile prevedere, ottengonsi rami più alti e più grossi elevando la temperatura. Infatti le bollicine gassose col riscaldamento si dilatano, e salgono più rapidamente trovandosi in un liquido meno vischioso.

I principali fenomeni delle arborescenze simili all' albero di Marte, restano dunque spiegati, coll' azione di forze fisiche, e cioè la solubilità del cristallo, l' osmosi ecc. e delle spiegazioni stesse apparisce che a torto quelle arborescenze si considerarono come cristallizzazioni.

Terminerò coll' indicare alcune particolarità caratteristiche che ho rinvenuto nella forma e nell' aspetto delle arborescenze date da alcuni sali. Quelle che si ottengono con soluzione diluita di silicato potassico e con cristallo di solfato di rame, zinco, manganese, cobalto, hanno la forma di tanti aghi o fili sottilissimi pressochè rettilinei e verticali, come quelli del solfato di ferro; esse formansi in generale senza bolle gassose. Col solfato di Nichel ottengonsi grossi rami verdi originati da bolle gazose, da vari punti dei quali in seguito a rottura della crosta formatasi, spuntano dei rami larghi e diffusi terminati in alto da punte. L'insieme assume l'aspetto di fantastici candelabri. Col cloruro di rame, posto in una soluzione silicea assai densa, si ha un fenomeno simile; ma le diramazioni secondarie sono più lunghe e filiformi.

Col cloruro di zinco fuso ed inumidito lasciato cadere nel liquido siliceo denso, si hanno ancora dei grossi rami originati da bolle. Essi hanno color bianco lattiginoso e continuano per più giorni a variare di forma ingrossandosi e acquistando delle appendici di forma globulare, che raffigurano quasi i frutti del piccolo albero. Dai rami principali partono pure rami secondari finissimi originati senza bolla gassosa.

Ponendo in uno stesso vaso cristalli di varie specie, si ottengono delle arborescenze svariatissime e d' elegantissimo effetto. Quelle fatte nella soluzione diluita di vetro solubile non si conservano a lungo inalterate, se pure non si tolga il liquido nel quale sono formate e lo si sostituisca mano a mano con acqua; ma molte di quelle formate nella soluzione densa, (solfato di ferro, cloruro di zinco, solfato di manganese ecc.) si conservano inalterate, specialmente poi chiudendo ermeticamente il vaso che le contiene.

DELL' ABNORME SEPARAZIONE
DELLA PORZIONE SQUAMOSA DALLE ALTRE
DELL' OSSO TEMPORALE NELL' UOMO ADULTO

DI ALCUNI PARTICOLARI

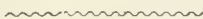
INTORNO ALLE VARIETÀ DELLE CELLULE MASTOIDEE

E DEL

FORAME DI RIVINO

MEMORIA

Del Professor LUIGI CALORI

(LETTA NELLA SESSIONE ORDINARIA DELL' 8 GENNAIO 1880)

Quantunque l' abnorme separazione della porzione squamosa dalle altre dell'osso temporale nell' adulto sia già conosciuta per tre esempi registrati da Kelch e da Otto, nondimeno essendomene capitato un quarto, ho stimato doverlo descrivere non solamente perchè egli è bellissimo e come a dire tipico, ma e perchè ho veduto che i più recenti anatomici ne' loro trattati e manuali non hanno profittato niente delle particolarità che l' anomalia ne para davanti, descrivendo l' osso temporale, e soprattutto divisando la parte che la porzione squamosa ha nella composizione dello scheletro osseo dell' orecchio esterno e dell' orecchio medio. Ed illustrando il mio esemplare non ho voluto trascurare l' occasione di esporre per digressione i risultamenti delle osservazioni che io feci, già tempo, sopra alcuni particolari intorno alle varietà delle cellule mastoidee, e di toccare infine del forame di Rivino.

Otto ha chiamato l' anomalia „ *De perpetua partis petrosae et squamosae in osse temporum separatione.* „ (1). Questa denominazione sembrami impropria; imperocchè fa presupporre che la porzione squamosa sia semplicemente disgiunta dalla petrosa, o vero che non si tratti di altro che d' essere pervia e larga in tutta la sua lunghezza e valicare anche l'angolo della incisura parietale quella sutura che G. F. Meckel chiamò squamoso-petrosa o squamoso-piramidale; la qual cosa è pur facile ad accadere, laddove la separazione, di cui parla Otto, è evenienza rarissima. Ma leggendo la descrizione e consultandone la figura ch' egli n' ha dato, chiaro apparisce

(1) De rarioribus quibusdam sceleti humani cum animalium sceleto analogiis. § 11, pag. 14. Vratislaviae, 1834.

non essere così; chè quella sutura squamoso-petrosa valica quell' angolo e discende sulla faccia esterna del processo mastoideo alla volta del suo apice, ma avanti di aggiugnerlo, essa piega anteriormente arcuando, poi ascende alla regione posteriore del poro acustico esterno. Dunque non solo dalla petrosa, ma ancora dalla mastoidea la porzione squamosa è separata. E vi ha di più che l' osservazione dell' esemplare da me raccolto ne scorge che la detta sutura, che qui non può più chiamarsi squamoso-petrosa, ma che vuol dirsi squamoso-mastoidea, non si arresta al forame auditorio esterno, ma s' insinua dentro il condotto osseo del medesimo nome, dapprima lungo la sua parete posteriore, poi lungo la superiore infino al corno anteriore della incisura del quadrante od anello timpanico. Segue da ciò che la porzione squamosa trovasi anche separata dal condotto predetto. Ond' è che a ben denominare l' anomalia deesi avere non solo riguardo alla separazione dalla porzione petrosa, ma eziandio dal quadrante del timpano, o condotto auditorio esterno e dalla porzione mastoidea. Nè qui è tutto; chè un altro difetto ha nell' epiteto *perpetua*. E di vero perchè fosse lecito così particolareggiare la denominazione, converrebbe aver trovata quella separazione in ossa temporali di vecchi decrepiti. Ora i tre esempi sopradetti fanno testimonio del contrario; chè il primo fu offerto dal temporale di un giovanetto di quindici anni, il secondo di un adulto di cui non è stata indicata l' età, il terzo di un uomo trentenne, ed aggiugnendo anche il mio, di un giovane di ventidue anni. E così essendo la cosa chi potrebbe asseverare che la separazione in discorso persisterà nelle ossa temporali de' longevi, o vero chi potrebbe negare che col volgere del tempo la sinostosi non agirà in veruna delle tre suture mentovate, od in parte le dileguerà togliendo alla porzione squamosa l' essere dalle tre altre onninamente separata, quando sappiamo che la lunga età è pur di giovamento grandissimo all' opera di cotal specie di unione? Certo che nessuno. Non è dunque esatto chiamare perpetua quella separazione, ma esatto sarà se la dirai anormale o abnorme, essendo norma che nel feto novimestre si saldi la porzione squamosa col quadrante od anello del timpano e dopo la nascita con la porzione mastoidea, ed assai tardi posteriormente con la petrosa. Per queste considerazioni, e non per istudio di novità, ho cambiato titolo all' anomalia, applicandogliene uno più conveniente, quello cioè che si legge in capo di questo piccolo scritto.

Così definita l'anomalia, ella è, quanto in sè stessa, già descritta, cioè un'abnorme o anormale separazione della porzione squamosa dalle altre dell' osso temporale nell' adulto, articolata però con queste per altrettante suture, parte squamose, parte armoniche, tutte continue, la squamoso-petrosa anteriormente continua con la fessura del Glaser, posteriormente con la squamoso-mastoidea, la quale anteriormente insinuandosi entro il condotto auditorio esterno si trasmuta nell' ultima, che io chiamerò sutura squamoso-auditoria. Non è raro trovare un qualche residuo di questa sutura del pari e della squamoso-mastoidea in teschi di adulti; sempre poi più o meno manifesta la squamoso-petrosa, che G. F. Meckel dice perdurare tutta la vita. Otto crede che l' unione si effettui mediante tessuto fibro-cartilagineo interposto. Ma

egli al par di me ha osservato l' anomalia in un teschio nel quale erano state distrutte per la macerazione le parti molli. Con la quale annotazione non voglio già dire che non possa esservi una sostanza intermedia molle, ma solo che qualificarla senza averla veduta non parmi doversi leggiermente consentire.

L' esemplare, che io posseggo dell' anomalia, appartiene ad un bel cranio formato di ossa robuste e perfettamente cresciute, nel quale la sinostosi tra 'l corpo dello sfenoide e quello dell' occipitale non si era niente operata, tutto che l' individuo, com' è stato detto di sopra, avesse 22 anni. L' anomalia è dell' osso temporale sinistro Fig. 1.ª, Tav. I. Il temporale destro Fig. 2.ª è normale ed offre pervia la porzione *e* della sutura squamoso-mastoidea *e f*, Fig. 1.ª, che circa nel mezzo di sua lunghezza ha un forellino vascolare, ed in corrispondenza del limite superiore del processo mastoideo il solchetto *k* che corre obliquo dallo indietro in avanti e dall' alto al basso, il quale sembra il vestigio di altra sutura, ed esso altresì ha un forellino consimile nel suo principio che è posteriore. Questo solco sembrerebbe indicare che l' area ossea triangolare, che gli rimane al di sotto, non fosse una pertinenza della porzione squamosa, ma un ossetto distinto spettante alla porzione mastoidea e specialmente al processo mastoideo, verificandosi così l' asserzione di T. Kerckringio (1), di Portal (2), e di altri, i quali danno a quella porzione tre punti o germi ossei. Ed il Kerckringio dimostra questi tre germi nella Fig. 3.ª, Tab. XXXVI, e scrive che uno di questi, il quale è periforme, *squamoso connectitur,* laddove gli altri due situati più di lungi, sono separati per sostanza cartilaginea da quello ed intra loro. Stando così le cose si potrebbe credere che il solco suddivisato fosse una vera sutura, o meglio un residuo della sutura che riunisce la detta area triangolare alla porzione squamosa, e che essa non a questa appartenesse, ma al processo mastoideo come erasi già sospettato. Se non che egli è molto dubbio che la porzione mastoidea abbia de' germi ossei particolari, e dato pure che li abbia, come vuole Kerckringio, in numero di tre, o vero, come pone Hallmann, di uno (3), seguendo in ciò G. Cuvier (4), G. F. Meckel (5), Spix (6), ed altri, questi germi ossei si confondono e saldano colla porzione petrosa del temporale e servono, secondo la maggior parte degli anatomici moderni, a chiudere i canali semicircolari ai quali apparterebbero, nè poco o punto congiungonsi con la porzione squamosa, di qualità che l' area o parte ossea triangolare non è uno di quei germi che siasi unito precocemente con la porzione squamosa, ma un prolungamento di questa, ed il solco non un residuo o vestigio di una sutura che siasi menomata, ma una inci-

(1) Osteogenia foetuum ecc. Amstelodami 1670, pag. 222, e Tab. XXXV-XXXVI, Fig. 3.ª.

(2) Cours d' Anat. méd. Tom. prem. Paris 1803, pag. 147.

(3) Die Vergleichende Osteologie des schläfenbems zur verein fachung der herrschenden ansichten bearbeitet von Eduard Hallmann. Hannover 1837, pag. 3 e seg. Taf. I, Fig. 1.ª *e*.

(4) Recherches sur les ossemens fossiles ecc. Nouvelle edit. Tom. cinq., II part. Paris 1824, pag. 81.

(5) Manuale di Anat. gen. descrit. e pat. del corpo umano. Versione italiana con note di G. B. Caimi. Tom. secon. Milano 1825, pag. 88 e seg.

(6) Cephalogenesis ecc. Monachii 1815. Sectio I, pag. 16.

sura più o meno estesa anteriormente tra il detto prolungamento e la porzione donde esso procede, la quale incisura io ho trovata continuamente ne' temporali di feto, ed è già stata delineata dall' Albino nelle sue Tavole della Osteogenesi, ma che egli non ha per alcun segno divisata, come non ne ha apposto veruno al prolungamento; e sì che questo è ben tagliato nella sua fazione e grande e sempre così ne' temporali di feto da esso lui rappresentati (1). Mette conto aggiugnere che, essendo egli ben formato e cresciuto nel feto, la porzione mastoidea già unita colla petrosa appena discernesi, ed il processo mastoideo rassembra un bottoncino che germogli da quest' ultima.

Nel temporale anomalo Fig. 1.ª e 3.ª, il descritto prolungamento non è superiormente distinto da verun solco ed ha il suo confine superiore esterno subito sotto la radice orizzontale dell' apofisi zigomatica, ed è applicato contro le cellule mastoidee che egli chiude esteriormente ed anteriormente, o per dire più esatto, contro le cellule del processo mastoideo grande; in una parola, è l' opercolo di queste cellule e in un medesimo la maggior parte della parete esterna di tale processo; la quale è ben grossa e compatta, specialmente nella base e nella metà superiore, gracile e squamosa nella inferiore. La sua esterna superficie è liscia e convessa, ma l' interna scabra e cavata d' alquanti alveoli che altro non sono che ciechi fondi di cellule. Di qui è manifesto che il processo mastoideo grande non è semplice formazione della porzione mastoidea o della petrosa, ma o dell' una o dell' altra e della porzione squamosa insieme. Lo che per quanto ne so, gli anatomici nelle loro descrizioni dell' osso temporale dell' uomo, e della genesi delle varie parti che quest' osso compongono, non hanno fin qui avvisato. Nondimeno si potrebbe credere che quegli anatomici, i quali alla maniera di S. T. Soemmering descrivendo il detto osso lo dividono semplicemente in due porzioni, nella squamosa cioè e nella petrosa, considerando per un' appendice della prima la mastoidea o il processo mastoideo divisato (2), avessero avuto riguardo alla suddetta composizione; ma essi nulla ne dicono, e da un altro canto la porzione mastoidea, o solamente il grande processo del medesimo nome, non può tenersi per un' appendice della porzione squamosa. stante che questa non gli somministra che il descritto opercolo, ma piuttosto vuolsi tenere per un' appendice della petrosa, accresciuta di quel poco che è il detto opercolo, o vero per una formazione indipendente.

Se il processo mastoideo grande monta sì alto con la sua superficie esteriore, non così d' ordinario coll' interna, la quale ha il suo limite superiore al fondo della incisura mastoidea o digastrica, ordinariamente unica, la quale lo separa dal piccolo o secondario od accessorio che voglia chiamarsi, descritto da Hensing (3), la

(1) Icones ossium foetus humani. Leidae Batav. 1737. Tab. III, Fig. 14.ª e 15.ª, pag. 22 e seg.

(2) De corp. hum. fab. Tom. I. Trajecti ad Moenum 1749, pag. 116 e seg. — Vedi anche Encyclop. Anat. Tom. II. Paris 1843, pag. 40.

(3) De apophysibus ossium corp. hum. observ. anat. in Vol. VI. Disput. anat. select. A v. Haller Gottingae 1751, pag. 276.

quale incisura alcuna volta manca ed alcuna è doppia, di qualità che nel primo caso quel piccolo processo s' immedesima col grande e componesi in uno, ed allora l' interna superficie di questo si estende fino al solco occipitale, che è natural confine di quello; e nel secondo caso si hanno tre processi mastoidei, il più piccolo dei quali ho veduto essere quel di mezzo. Ho creduto far cosa grata alli studiosi delle anomalie ritrarre questa varietà, che a quanto ne so, pare che nessuno abbia fin qua delineata. (Vedi Tav. I, Fig. 6.ª). All' ultimo rispetto la mancanza del piccolo processo mastoideo importa notare che essa non sempre dipende dall' allegata cagione, essendo che talvolta ha la detta incisura anche molto profonda e la superficie interna del processo mastoideo grande molto estesa e alta, e nondimeno il piccolo processo mastoideo non esiste.

Sì il grande come il piccolo processo mastoideo offrono, secondo che l' Hensing (1) e recentemente il Zoja (2) hanno notato, una struttura cavernosa o cellulare, o le cellule così dette mastoidee per divisarle dalle timpaniche che occorrono soprattutto nella parete posteriore della cavità del timpano, nella quale parete ha pure all' altezza della fenestra ovale l' adito alle mentovate cellule mastoidee e quel cavo chiamato da Valsalva *antrum sinuositatis mastoideae* (3), se però per quest' antro non debbasi intendere il complesso delle cellule anzidette (4). E alla distinzione indicata altra vuolsene aggiugnere, essendo che cellule e caverne più o meno grandi trovansi a dir vero non troppo raramente nella parte inferiore della porzione squamosa, le quali protraggonsi anteriormente aggiugnendo talvolta la radice trasversa dell' apofisi zigomatica. Queste cellule extramastoidee possono chiamarsi cellule temporali o temporo-zigomatiche. Haller già le aveva notate scrivendo che *in ima parte squamosa ossis temporum cellulae sunt quae et ipsae cum mastoideis communicant* (5). La quale asserzione è stata pur non è guari acconsentita e chiosata dal Sappey con queste parole: „ Chez quelques individus, elles s' etendent dans la partie plus inférieure de la portion écallieuse jusqu' au voisinage de l' apophyse zygomatique „ e nel paragrafo seguente soggiugne che „ l' air pénètre et circule librement dans leur cavité (6) „. Queste espressioni sono troppo assolute ed inesatte, come fia manifesto e provato più avanti.

E poichè il discorso è naturalmente caduto sulle varietà delle cellule mastoidee, tornami al fatto toccare alcuna cosa di quelle. Sulla quale materia dirò innanzi tratto che la scienza già possiede di molte buone osservazioni e antiche e moderne, le quali io verrò brevemente divisando. Morgagni nella Epistola Anatomica V. 23 e segg., ci dà contezza di tutto ciò che era stato osservato innanzi a

(1) L. c.
(2) Ricerche e considerazioni sull' apofisi mastoidea e sue cellule. Milano 1864. pag. 16.
(3) Tractatus de aure humana. Pars I. Cap. II, § III.
(4) MORGAGNI. Epist. Anat. V. 23, 24.
(5) Element. Physiol. Tom. V. Lib. XV, § XXIII.
(6) Traité d' Anat. descript. Tom. troisieme. Paris 1877, pag. 862.

lui intorno alle cellule mastoidee, ed aggiunge le sue proprie osservazioni. Scrive egli che ve ne hanno delle ripiene di una sostanza sanguinolenta e delle vuote vestite tutte intorno di una membranella che ad occhio nudo sembra esangue, ma che guardata con la lente si mostra percorsa di fine ramificazioni vascolari sanguifere. Queste sono le vere cellule mastoidee aeree, le quali ei poi distingue in *cellas et cellulas*, cioè in maggiori e minori, tenenti le prime quando l'alta, quando la media, quando l'ima parte del processo mastoideo grande, e le seconde il restante processo, estendentisi al vicino osso che sta al disopra (cellule temporo-zigomatiche?), e di quindi anteriormente verso il timpano ed il labirinto. Riporta in fine l'osservazione del Cassebohmio, secondo il quale quelle maggiori cellule si trasmuterebbero in *os compactum et solidum paucis ac parvis cavernulis in medio sive centro processus remanentibus*. Per quante ricerche io mi abbia fatte non ho potuto avere l'opuscolo di Annemann intitolato: Über die Durchbohrnung des processus mastoideus, Gotting. 1792; ma S. T. Soemmering che lo cita al proposito delle cellule mastoidee, forse ne compendia le osservazioni con queste parole: *interiora processus mastoidei cava et cavernosa, cavitati continuo nexu junguntur. Cellulae modo minores sunt et plures vel densiores, modo majores et pauciores vel rariores* (1). Parecchi autori tra i quali E. Huschke (2), Cruveilhier (3) e Zoja (4), descrivono la varietà consistente in una cavità mastoidea unica, la quale talvolta è circondata di piccole cellette con esso lei comunicanti, e la detta cavità ora trovasi da un lato solo, ora da ambidue. Una cavità mastoidea unica presuppone o che tutto il tessuto diploico siasi assorbito, e non abbia avuto effetto la formazione di veruna delle ordinarie cellule, o che queste preformate abbiano per atrofia, e per opera dell'assorbimento perdute le loro ossee pareti. La quale ultima contingenza mi è parsa possibilissima e riducibile in fatto, da poi che, secondo Hyrtl, quelle pareti possono assottigliarsi assai e divenir fragilissime e tanto da fendersi o solversi nella loro continuità, sì di per sè, come sotto gli sforzi della persona (5). E può anche accadere che se ne assorbano i sali terrei, ed esse fatte mollissime e poco coerenti si rompano forse solo per l'impeto dell'aria, e ne siano consumati i laceri avanzi dall'assorbimento. Di che sarebbe per avventura una prova il trovarsi talvolta in cellule mastoidee piuttosto grandi qualche briglia o trabecola. Di tali trabecole Morgagni vide piene le cellule mastoidee, ma piena n'era altresì la cavità del timpano, ond'egli drittamente le considerò com'esito di malattia, e per l'occupare ch'esse facevano anche la detta cavità, cagione di sordità invincibile (6). Finalmente alle varietà fin qui divisate vuolsi aggiugnere il non comunicare le cellule mastoidee tra loro se

(1) Op. cit. L. c.

(2) Encyclop. Anat. Tom. V. Paris 1845, pag. 768.

(3) Anat. descript. Paris 1858. Tom. IV, pag. 145.

(4) Op. cit. pag. 18.

(5) Vedi Lehrbuch der Anatomie des Menschen ecc. Wien 1859, e la traduzione fattane da Antonelli. Napoli 1865, pag. 262. — Nella edizione originale citata manca questa notizia.

(6) Epist. cit. 25.

non in totalità, sì certamente in parte, nè colla cavità del timpano (1), e la loro assoluta mancanza.

Parlandosi di mancanza delle cellule mastoidee non vuolsi intendere ne' fanciulli od anche ne' giovanetti che non abbiano ancora compiuto tutto il loro incremento, nei quali possono mancare, tutto che in casi certo non rari elle si trovino, anche molto prima della pubertà; ma sì negli adulti, volgenti eziandio alla vecchiezza. Di che se per innanzi alcuno ebbe mai sospetto, non mi è noto tuttavia che ne abbia fin qua addotte prove d' osservazione. Io ne posseggo due esempi, uno offertomi da una donna cinquantenne, la quale aveva i processi mastoidei di conveniente e proporzionata grandezza, e nondimeno aperti con un taglio verticale antero-posteriore in modo che rimanessero divisi in due metà, una esterna, l' altra interna, non mi porsero il menomo indizio di cellule, ma rappresentaronmi la rete diploica piena di una sostanza molle, rosso-bruna ed alquanto untuosa, somiglievole al midollo delle ossa lunghe, del quale teneva essa le veci; la rete poi era di una maglia piuttosto grossa ed i vani che la maglia comprendeva, erano piccoli. Aggiugnerò, a chi volesse saperlo, non avere questa donna in vita dato segno di verun' offesa nell' audizione. Mi ha porto il secondo esempio un uomo di trentanove anni, il quale aveva i processi mastoidei di mediocre grandezza, e che l' Ecc.mo Sig. Dott. Leone Tosetti, medico dell' appodiato di Bertalìa, mi riferì essere stato ottuso di udito. Avendoli in prima aperti nella maniera sopradetta, poi sfetteggiati mediante tagli trasversali non mi scorsero veruna cellula, nè mica contenevano tessuto diploico, ma erano tutto formati di tessuto osseo compatto e durissimo a simile di quello della porzione petrosa, e punto divisato da quello che avvolgeva i processi. Importerà notare che questo uomo era affetto da osteite condensante; imperocchè può credersi che tale affezione abbia potuto operare così fatto trasmutamento. E per verità eravi tutta la presunzione per ritenerlo, stante che in molte parti delle ossa craniensi il tessuto diploico era assai menomato ed anche scomparso, ingrossatesi le tavole ossee. Se non che accade non di rado, massimamente nelle persone attempate, trovare il processo mastoideo quasi tutto, se non tutto, trasformato in tessuto compatto solidissimo, ma d' ordinario con qualche cellula ed anche con una sola non grande, come già aveva osservato il Cassebohmio, secondo che dissi di sopra. Laonde non è senza fondamento tenere che talvolta il detto trasmutamento possa effettuarsi nell' intero processo, anche senza veruna cavità cellulare, non essendo presente una affezione morbosa, alla quale si possa accagionare il trasmutamento. Noterò all' ultimo che anche il processo mastoideo piccolo nei due casi narrati era privo di cellule e nella donna avea tessuto diploico, nell'uomo era tutto di tessuto osseo compatto, come il grande. Frequentemente incontra che in questo piccolo processo manchino le cellule, quantunque al di sopra di esso lui nella porzione mastoidea restante e in corrispondenza della base della piramide o

(1) Morgagni. ibid.

rocca petrosa ne occorrono anche di grandi, e che essendovi queste cellule, esso si mostri tutto formato di osso compatto senza che abbia uno stato morboso.

Se non che in questi casi il tessuto osseo compatto non suol essere uniforme come quello che avvolge il processo, ma divisato eziandio quanto a sè stesso, e innanzi tratto pel coloramento, essendo temperato di bianco e di livido, o vero di giallognolo, o vero di rossigno simile a cinabro assai dilavato nell' acqua. La parte colorata è la sostanza diploica molle, indurita e fatta ossea, la quale sostanza è quanto il midollo nelle ossa lunghe, nel seno della quale svolgonsi organi produttori di sostanza ossea. La bianca altro non è che la rete diploica ossea, la quale, come tutti sanno, è formata di una maglia più o meno grossa comprendente i vani che danno ricetto a quella, ed avente qua e là nei nodi certe dilatazioni di varia grandezza, che sono come isolette solide, e ritraggono la figura delle capsulette o corpuscoli microscopici contenenti le cellule ossee, i processi delle quali capsulette o corpuscoli sarebbero formati dalla maglia della rete. Questa rete diploica però è assai velata e oscura e in certi luoghi appena è che possa discernersi; anzi talvolta non discernesi affatto quando in un punto quando nell' altro ed anche estesamente. I vani infine della rete rimanendo, non servono poi che da semplici fori o canaletti per il passaggio de' minimi vasi sanguigni nutrizii. Gli esempi che ho delineati nella Tav. II, mostrano, se mal non mi appongo, ad occhio la cosa. La Fig. 7.ª Tav. II rappresenta il processo mastoideo sinistro in una donna di quarantasette anni aperto nella solita maniera. Nessuna cellula mastoidea apparisce, e solo nell' apice ha qualche cellula diploica. Il restante è tutt' osso compatto, misto di livido e di bianco, il quale è reticolato e soverchiato da quello che è molto più abbondante, vedesi tutto pertugiato da esilissimi forellini vascolari. Nell' altro lato le cellule mastoidee sono benissimo formate. Più compatto e tinto di rossigno è il tessuto interno *u* del processo mastoideo destro ritratto della Fig. 8.ª, ma presso che di simile aspetto, appartenente ad un uomo di cinquantaquattro anni, nel quale è anche in parte manifesta la sutura squamoso-mastoidea. In corrispondenza però dell' opercolo o processo opercolare mastoideo il tessuto osseo è bianco ed esangue, e simile a quello delle tavole dell' osso, e nella parte più larga dell' opercolo o processo mentovato sono aperte due cellule *r,r*, una anteriore più grande, l' altra posteriore molto più piccola che monta alquanto più alto, separate tra loro da un sottile setto osseo. La maggiore è alveolare: lo che indica che da principio erano più cellule; delle quali sonosi consumate le pareti, e se n' ha un vestigio nei rialti onde li alveoli sono distinti. Offre nella parte superior-anteriore un forame che è l' adito ad un canale lungo quasi undici millim., il quale mette capo nella cavità del timpano. Questo canale che suol essere brevissimo tanto da non aversi che in conto di una semplice apertura, è quello che il Sappey ha proposto di chiamare petro-mastoideo (1), ma che io a scanso di contese e per fuggir

(1) Op. cit. Tom. trois, pag. 861-62.

taccia d' ipotetico chiamerei masto-timpanico, denominazione più confacente, siccome quella che non esprime altro che il fatto, e non guarda punto il sito, nè il modo di sua formazione, e toglie via la questione se la porzione mastoidea si svolga per uno o più germi ossei particolari, o vero provenga dalla porzione petrosa. Nell' altro processo mastoideo aveva presso a poco la medesima disposizione. Un terzo esemplare dimostra, Fig. 9.ª Tav. II, come il trasmutamento del processo mastoideo in osso compatto possa aggiugnere ad un grado tale da non più distinguersi dallo esterno che l' avvolge, ma non tutto e solamente nella sua parte superiore. Nella inferiore apparisce una macchia del colore di terra gialla chiara, divisata per compattezza ed omogeneità in due porzioni, una superiore minore *u*, l' altra inferiore alquanto maggiore *v*, nella quale si avvisa ancora la struttura del tessuto diploico, la cui sostanza molle si è indurita. Hannovi cellule, ma solo nella parte interamente trasmutata in osso compatto e solido indistinto dal corticale, le quali cellule *r*, & sono rade, più o meno lontane tra loro e rassembrano isolette nel seno di quello, per forma che ho creduto chiamarle cellule insulari discrete o solitarie. Meritano considerazione le tre cellule inferiori, una delle quali che è la più grande, trovasi nel mezzo, ed è manifestamente composta di due apertesi l' una nell' altra per la scomparsa del sepimento che dividevale: le due altre più piccole sono situate anteriormente a poca distanza dal meato auditorio esterno e vicinissime tra loro, massime a rispetto dell' altre, ed esse altresì formate dalla unione e confusione di minori per la medesima cagione. Esaminandone l' interna superficie la scorsi coperta d' una sottile membranella tutta continua, o vero senza alcuno spiraglio o forame pel quale esse comunicassero con altre che fossero più profonde e per il loro intermedio con la cavità del timpano: in una parola la membranella era un sacco perfettamente chiuso. Staccandola con diligenza e non facendo essa resistenza, tratto un piccolissimo punto del fondo delle cellule, vidi subito essere quella fatta da un esile legamento attaccato alla membranella ed insinuato entro un esile pertugio, e conobbi che il legamento era un fascettino di piccoli vasi sanguigni nutrizi continui coi minimi rami diramati per essa. Nulla trovai dentro il sacchettino della membranella, ma qualcosa di assai tenue avea dovuto contenere che uscì inosservato in quella che io l' apriva. Il processo mastoideo dell' altro lato offriva cellule ben formate e grandi. In fine il soggetto di quest' osservazione fu un uomo di cinquantatrè anni.

Cellule mastoidee tutte chiuse o senza verun commercio con altre, insulari come dissi, ho pur rinvenute altra volta ne' processi mastoidei di un uomo sessantenne, se non che erano esse piene di una molle sostanza bianca calcare o terrea. Altrove però me ne sono occorse di nulla contenenti che abbia potuto cadermi sott' occhio nell' aprirle, e cioè nella restante porzione mastoidea, ma soprattutto nella parte inferiore della porzione squamosa. Queste cellule insulari, temporali o temporo-zigomatiche però, corrispondenti talvolta ai gioghi od eminenze mamillari soprapposte, di rado erano solitarie, ma di solito confluenti o agminate. Ne ritraggono due esempi

le Fig. 10.ª e 11.ª Tav. II. Nella Fig. 10.ª appariscono le cellule temporo-zigomatiche partite come in due provincie, posteriore *y* e anteriore *z*, dal tessuto diploico *v*. Le cellule della provincia posteriore *y* comunicano con quelle del processo mastoideo e della restante porzione omonima: quelle della provincia anteriore *z* situate al di sopra della parte posteriore della cavità glenoide sono grandi e soprapposte e separate da sottili tramezzi, che ne tolgono la comunicazione tra loro, salvo che tra le due superiori, la maggiore delle quali e la inferiore sono molto profonde ed estese fin presso il canale pel muscolo tensore della membrana del timpano e la porzione ossea della tuba Eustachiana, o vero fin verso la sutura squamoso-petrosa. Introdotto del mercurio dentro queste cellule ed agitato e presso, egli non è passato nel tessuto diploico retroposto, e per conseguente nella provincia posteriore, e neanco nella cavità del timpano. Distaccando la dura madre dalla tavola interna della porzione squamosa, incontrava una certa resistenza in corrispondenza della cellula maggiore; il quale sforzo veniva da tenacoli fibrosi della detta meninge accompagnati da minimi vasi sanguigni che entravano in forellini esilissimi. Per quanto io facessi affin di vedere se questi avessero comunicazione con la membranella sopannante quella cellula, tutto fu indarno; ma ciò che non mi fu dato di quivi chiarire, ebbemi ben aperto e posto fuor d' ogni dubbio il secondo esempio preso dall' osso temporale destro di una donna di sessantotto anni. Nel luogo occupato dalle cellule insulari confluenti o agminate descritte, ne occorrono in questa donna due z^2 Fig. 11.ª Tav. II ed una terza z^3 nella radice trasversa dell' apofisi zigomatica, la quale cellula, com' è chiaro, è insulare solitaria. Quelle due cellule z^2 sono separate da un sepimento osseo non completo e dalle temporo-zigomatiche della provincia posteriore *y* per il largo tramezzo *x* di tessuto osseo compatto e solido simile a quello delle due tavole ossee della porzione squamosa. Nel fondo della cellula posteriore è scolpito un piccolo forellino che mi ha permesso l' introduzione di una setola, il quale è adito ad un canaletto, che mette capo nella cavità del cranio presso la sutura squamoso-petrosa. Per questo canaletto s' insinuava il tessuto fibroso della faccia esterna della dura madre con piccoli vasi sanguigni che andavano a diramarsi nella membranella circonvestiente quelle due cellule, e formante un sacco chiuso che nulla capiva, come nelle cellule temporo-zigomatiche insulari confluenti, dimostrate nel primo esempio. Era altrettanto nella cellula insulare solitaria z^3.

E qui si domanderà se tutte le cavità che possono trovarsi o nella porzione mastoidea o nella squamosa s' abbiano a considerare come cellule: alla quale domanda subito rispondo che no, poichè possono in queste parti formarsi delle cavità dipendenti da cagioni diverse da quelle che producono quelle cellule, e sono morbose. Quantunque elle siano per avventura conosciute, nondimeno vo' riferirne un esempio offertomi da una fanciulla di tredici anni, impubere, affetta di tubercolosi generale, e morta per meningite tubercolare acuta. Apertone i grandi processi mastoidei, li trovai provveduti di cellule ben formate e capaci *r*, *r*, Fig. 12.ª, 13.ª, 14.ª

Tav. III. Nel sinistro rinvenni un grosso tubercolo che quasi tutto occupavalo, passato a degenerazione caseosa, il quale si era formato l' ampia cavità *t*, *t*, Fig. 12.ª e 13.ª a spese delle cellule, due delle quali pur rimanevano integre inferiormente ed anteriormente presso l' apice del processo. La detta cavità poi nel lato esterno era bipartita da una cresta ossea sigmoide in modo che la maggior parte di esso lei rimaneva posteriore ed inferiore, ed era triangolare, e vestita da una grossa membrana iperemica; la minore era superior-anteriore, reniforme e alveolare nella sua esterna parete, e pur essa vestita di una membrana simile. Nel lato interno non avea nessuno scompartimento, ed era più piccola e di figura simile alla minore anzidescritta, coperta pure di una crassa membrana iperemica, irregolare nella superficie e piena di pori vascolari. La sostanza tubercolare era aderentissima ad esso lei e con esso lei immedesimata, di qualità che ne riceveva un vestimento, essendo che aveva avuto suo principio dal tessuto connettivo sottoposto. Poniam caso che il tubercolo si fosse trasmutato in grasso e fosse stato assorbito, o vero che macerato il teschio, e disfattesi e dileguatesi le parti molli per la macerazione, avessi allora esaminata l' interna struttura del sopradetto processo mastoideo, sarebbemi occorsa quell' oltragrande cavità che avrei presa per una cellula, laddove essa non era da estimarsi tale, ma conseguenza di malattia, una cavità patologica. Ma non può dirsi altrettanto di quelle cellule che ho chiamate insulari discrete o solitarie, non aventi verun commercio con altre, stante che nessuna condizione morbosa accompagnavale, a cui fosse dato recarne la formazione. Elle erano cavità o cellule fisiologiche così solitarie e come isole infino dal principio per essere loro frapposto tessuto osseo compatto, o diploico molto fitto, come già si vide, e come me ne ha convinto l' osservazione fatta sull' osso temporale destro di una fanciulla di otto anni nella quale erano già bell' e ben formate le cellule mastoidee. Contemplando la Fig. 15.ª Tav. III, si rappresenta in z^3 una piccola cavità che è una cellula temporo-zigomatica in rudimento, situata al di sopra del confine posteriore della cavità glenoide: al davanti di questa cellula scorgesi l' indizio di un' altra. Il lungo tratto di osso compatto *x*, la separa totalmente dalle cellule corrispondenti alla parte superiore della base della piramide petrosa. Nel processo mastoideo poi occorrono cellule *r*, *r*, più grandi nella parte inferiore che nella superiore, separate in anteriori e posteriori da una colonna verticale di tessuto osseo compatto e solido.

Per le quali cose è chiaro e manifesto non potersi quelle cavità considerarsi come anormali o patologiche, ma essere vere cellule mastoidee o temporo-zigomatiche insulari solitarie od insulari agminate, non aventi cioè verun commercio con altre nè colla cavità del timpano. Il quale fatto conviene con la questione, se le dette cellule comunichino sempre insieme o tutte o in parte e con la detta cavità: la quale questione fu già risoluta negativamente da Morgagni, il quale poi non le trovò piene di una sostanza molle, ma vacue (*inanes semper*) (1), e forse così anche

(1) Epist. Anat. V. 23 e seg.

il Vieussens, il quale nel suo trattato sulla struttura dell' orecchio poneva che l'adito timpanico di quelle cellule fosse ognor chiuso dalla membrana mucosa del timpano, non altrimenti che spesso avviene per rispetto a' pertugi mediante i quali esse comunicano insieme; e congetturava che l' aria in esso loro passar potesse per i pori della detta membrana (1). Ma ponendo da banda quest' ipotesi, dico che essendo non di rado dubbia, e mancando tuttavia la loro comunicazione reciproca e con la cavità del timpano, non è lecito affermare asseverantemente come certi fecero e fanno ancora, tra' quali recentemente pure il Sappey (2), che l' aria circola liberamente nelle cellule mastoidee, come di sopra ho riferito, e che da ciò sia dato, trapanando i processi mastoidei, poter restituire l' udito a chi l' abbia perduto per stenosi, ed occlusione della tuba Eustachiana. Fa maraviglia come uno dei principali anatomici del nostro tempo voglia tornare in onore queste dottrine, immemore dei dettati dell' anatomia, e degli esperimenti, le più volte non riusciti a buon fine, della pratica chirurgica. Ma non è mio intendimento di trattare di questo, e passerò oltre dicendo che le cellule solitarie o insulari, tutto che non abbiano commercio con le altre, qualora non siano piene di una molle sostanza, debbono avere il medesimo ufficio che hanno le comunicanti tra' loro e colla cavità del timpano, le quali quantunque non siano essenziali all' apparecchio dell' organo dell' udito e per conseguente alla funzione auditoria, nondimeno debbono avere il poter di trasmettere come in generale le ossa craniensi, e di ripercuotere le onde sonore e rinforzarle. Il quale uffizio pur hanno, oltre agli altri, a parer mio, ad avere certe cavità, lontane, a dir vero, dal detto apparecchio, ma situate intorno al tragitto che fa l' aria per giugnere alla tuba Eustachiana, vo' dire l' antro d' Higmoro, i seni frontali e sfenoidali, le quali cavità io assomiglierei a que' vasi vuoti che gli antichi nascondevano, secondo che abbiamo da Aristotele e Vitruvio, nelle pareti o nel suolo dei teatri ed altri edifici acciò che risonassero. Questo rapporto che non sembra essere stato avvertito da' fisiologi, ho stimato dover significare, essendomi parso non indegno della loro attenzione.

Se io mi fossi proposto d' illustrare le varietà delle cellule mastoidee, qui sarebbe il luogo di aggiugnerne la dimostrazione con parecchie altre figure; ma siccome il mio proposito è stato di rischiarare alcuni particolari delle medesime semplicemente, così mi passerò di questa trattazione, e mi limiterò a dirne alcuna cosa rispetto al piccolo processo mastoideo. Il quale per le più volte merita veramente questo nome, ma talvolta forma una grande bolla prominente al di dietro del grande, nel quale caso la incisura digastrica è assai poco indicata e profonda, ed il grande è quasi solo ridotto a quella sua porzione coperta dall'opercolo o processo opercolare mastoideo della porzione squamosa. Un esempio me ne è occorso in una donna di trentasette anni, nella quale aperti i processi mastoidei col solito taglio verticale antero-posteriore, trovai particolarmente a sinistra Fig. 16.ª e 17.ª Tav. III, che

(1) Part. II, Chap. II.
(2) Op. cit. L. c.

la maggiore cellulosità era nel piccolo, e la minore nel grande, il quale era in gran parte pieno di tessuto diploico. Le cellule del piccolo erano tre molto capaci, l'anteriore delle quali era maggiore ed oblunga e comunicava colla maggiore del grande, situata in alto, al di sopra della quale anzi che cellule, avea una rete diploica piena di sostanza molle giallognola, di qualità che le cellule occupavano più il piccolo processo mastoideo che il grande. Le tre grandi cellule sopradette in fine mettevano nel cospicuo foro * delineato nel segmento di questo temporale nella Fig. 17.ª, il quale foro era il principio del canale masto-timpanico comunicante con la cavità del timpano. Ed essendomi fermato sopra questo esempio, non ho inteso di dire che cellule si trovino nel piccolo processo mastoideo sol quando è anomalamente ingrandito a quella misura; chè pur se ne incontrano in esso lui quando ha mediocre grandezza ed è veramente piccolo, ne' quali casi però spesso mancano, e non contiene che tessuto diploico, o vero è tutto formato di tessuto compatto e solido. Ma basti de' particolari intorno alle varietà delle cellule mastoidee e temporo-zigomatiche, e ripigliamo la descrizione della porzione squamosa anormalmente separata dall' altre dell' osso temporale.

Oltre dunque il processo opercolare mastoideo due altri processi ella ci presenta, uno che io chiamo auditorio, e l' altro timpanico. Leggiamo nei libri di anatomia, anche recentissimi, che il meato auditorio esterno osseo è formato da un prolungamento del quadrante od anello timpanico. Quest' asserzione è stata consacrata, come verità, nella scienza senza il debito esame. Infatti guardando la Fig. 4.ª Tav. I, si vede chiaramente che il detto quadrante non si prolunga a mo' di tubo, chè pur dovrebbe così conformarsi nel suo prolungamento qualora il meato ne fosse interamente una produzione, ma si prolunga a mo' di doccia, la cui parete anteriore è completa e ripiegata nel suo margine superiore in ispecie di piccola tegola avente la concavità nel suo lato inferiore, e la cui parete posteriore da prima alta, ma non tanto quanto la precedente, va abbreviandosi o calando via via che si reca esternamente al bordo anteriore del processo mastoideo grande. A convertire questa doccia in tubo o in imbuto manca una gran parte della parete posteriore e della superiore. Ora questa parte delle due pareti è somministrata dal processo che ho chiamato auditorio della porzione squamosa, il quale processo *c* Fig. 1.ª, 2.ª, 3.ª Tav. I muove e dalla parte superiore del margine anteriore del processo opercolare mastoideo, e dall' orlo inferiore della porzione squamosa e precisamente da quel piccolo spazio che Albino nella spiegazione delle sue Tavole illustranti la osteogenia chiamò *margo* (1) e che ne' primissimi tempi dell' ossificazione presenterebbe un germe osseo distinto, chiamato epitimpanico, o serrale da Serres che fu primo a indicarlo (2). Ha una figura triangolare colla base allo esterno, coll' apice troncato internamente, ed è leggermente concavo nella sua faccia esterna e liscio, convesso nella interna, nella parte superior-posterior della quale appaiono delle cellule tim-

(1) Op. cit. pag. 22.

(2) Origine et développement des os par A. Rambaud et ch. Rénault. Paris 1864, pag. 128.

paniche. La sua unione colla doccia prolungata dal quadrante del timpano è una sutura armonica continua posteriormente con la squamoso-mastoidea. Il processo descritto fu pure veduto dall' Otto, ma non ne conobbe tutta l' estensione, poi che scrisse che esso semplicemente *ex parte posteriorem pori acustici externi parietem plenum integrumque reddit* (1); ma, come si è veduto, ne forma anche quasi del tutto la parete superiore.

Il processo timpanico *d* della porzione squamosa Fig. 3.ª Tav. I è situato internamente, e al di sopra del processo opercolare mastoideo e dell' auditorio. Corrisponde al *margo eminens* di Albino (2), ed è formato da una lamina o cresta orizzontale leggiermente arcuata, estesa dall' estremità posteriore del confine interno del lembo squamoso all' orifizio interno del canale pel muscolo tensore della membrana del timpano, ed ha la sua maggiore larghezza che è nel mezzo, di otto a nove millim. Donde muove dalla tavola vitrea o interna della porzione squamosa, sono aperti, massime posteriormente, alcuni piccoli forellini vascolari. La sua faccia superiore leggiermente convessa è liscia nella metà esterna, un po' scabra nella interna, alla quale soprapponesi una lamina molto più estesa *h*, essa altresì arcuata, o in ispecie di volta, della porzione petrosa, cotal che le due lamine si uniscono tra loro per una sutura simile alla squamosa, la quale è evidentemente parte della sutura squamoso-petrosa sopradescritta. Queste due lamine, cioè il processo timpanico *d* e la lamina *h*, data dalla porzione petrosa, compongono la parete superiore o celata del timpano, *lacunar tympani,* detto da Hyrtl *tegmentum* (3). Gli anatomici dicono che il *lacunar tympani* è formato semplicemente dalla lamina *h* della porzione petrosa: ben è chiaro che questo insegnamento non è esatto, poichè si è veduto che alla composizione di quello contribuisce eziandio una parte, a ver dire piccola, il processo timpanico *d* della porzione squamosa. In fine la faccia inferiore di questo processo è occupata da cellule timpaniche *q*, la posteriore delle quali è molto grande ed alveolare nel suo fondo e prolungata entro la porzione squamosa posteriormente fino in corrispondenza della radice esterna od orizzontale dell' apofisi zigomatica. Noterò all' ultimo che il processo timpanico è costituito dalla sola tavola interna della porzione squamosa, ma dalla esterna il processo auditorio ed in gran parte pure semplicemente dall' esterna il processo opercolare mastoideo. Ond' è manifesto essere quivi quasi al postutto manchevole la detta tavola interna, la quale è poi supplita in parte dalla interna della porzione mastoidea, e dal lato esterno della parete interna della cavità del timpano per forma che questa cavità si è meritamente paragonata ad un' ampia cellula, o ad un seno non dissimile nella sua formazione da quelli che mettono capo nelle fosse nasali.

In tutti i trattati di Anatomia che mi sono noti, sta scritto che la parete esterna della cavità del timpano è formata dalla membrana e dal quadrante o anello del

(1) Op. cit., pag. 16.
(2) Op. cit. pag. 23, Fig. XVI, *m*.
(3) Op. cit., pag. 232, 521. — Nella traduzione pag. 258, 262 e 599.

medesimo nome. Ma al di sotto del processo timpanico sopradetto ha un piccolo spazio, o particella *q* * della porzione squamosa, il quale pure è parte di questa parete, e dietro cui ascende e nascondesi la parte superiore del martello, e che nella descrizione di quella parete non vuol essere trascurato. Rispetto poi alla membrana del timpano, debbo notare che nell' uomo affetto da osteite condensante, la trovai perforata da ambidue i lati presso a poco in quel punto in cui Rivino pose il forame che da lui si nomina, cioè al lato posteriore del manico del martello presso la parte superiore del quadrante timpanico o la testa di quell' ossetto. Se non che il forame che io vedeva, era patentissimo e circolare, con margine calloso, ed accompagnato da un abbondantissimo catarro purulento della mucosa del meato e della membrana sopradetta, iperemica ed infiammata, laddove il forame di Rivino è cosa impercettibile situato in una certa ineguaglianza „ *prope mallei caput; quae, immisso per tubum flatu, hiatum monstravit apertum, qui toties connivendo disparuit, quotiescumque flatus remitteret. Admisit autem et tubum et stilum in meatum auditorium libere, mirumque fuit quam arcte circa stilum rursus educendum sese applicarint fibrae, sphincterem quasi repraesentantes, atque ideo aperturam illam exemto stilo penitus claudentes* (1) „. Certamente questa descrizione non si confà con quanto io osservava, poichè il forame era visibilissimo, nè mutava, e lasciavasi leggermente e senza costrizione attraversare da uno specillo di certa grossezza, nè, levato lo specillo, chiudevasi. In una parola, non era il forame di Rivino, ma una perforazione prodotta da un' ulcera; un caso simile a' narrati da Fabrizio Ildano e da altri o se vuoi anche a quelli di W. Cheselden e F. Vv. Stokausen, i quali hanno dimostrato non venir meno la facoltà dell' udire essendovi una soluzione di continuo nella membrana del timpano ed hanno determinato i Chirurghi preferire l' apertura di questa membrana alla trapazione de' processi mastoidei nella sordità prodotta da invincibile chiusura della tuba Eustachiana. Ma un forame tale quale fu descritto da Rivino, o come altri dicono tra l' interruzione del quadrante del timpano e la testa del martello, esist' egli normalmente? Io confesso che avendolo più volte cercato, non l' ho mai potuto incontrare. Già fino dall' annunzio della scoperta di quel forame, Ruischio (2) e Morgagni (3) non l' ebbero trovato mediante l' osservazione diretta, nè cogli esperimenti; imperocchè iniettando il mercurio o per la tuba Eustachiana, o per il meato auditorio esterno, il liquido metallo o non la trapassava, o trapassandola, si era esso fatta manifestamente la via, e ne manco senza violenze potè l' ultimo fare passare una setola. Nondimeno e nel passato secolo e nel principio del presente fu lunga e iterata contesa presso gli Anatomici intorno alla sua esistenza, una parte ammettendola e l' altra negandola, e la prima particolarmente per il rispetto di spiegare quella facoltà che certi hanno di fare uscire il fumo del tabacco per il meato auditorio esterno, quasi che a spiegazione

(1) Disput. Anat. select. cit. Vol. IV, pag. 334.
(2) Thesaur. Anat. VIII, n. VI.
(3) Epist. Anat. V. 15 seg.

d' una eccezione abbisogni creare una regola, cioè porre di norma un forame nella membrana del timpano. Hyrtl nella sua anatomia descrittiva dice essere anomalia oltre modo rarissima la presenza del detto forame, ed aggiugne che Huschke l' ha trovato nel centro della detta membrana (1). Questo anatomico però in una sua lunga ed erudita nota sul forame di Rivino (2) si accosta a quelli che tengono non essere alcuna normale apertura nella membrana del timpano sì de' bambini come degli adulti, ma essendovi qualora non sia acquisita, egli è di avviso s' abbia a considerare come un effetto d' incompiuta formazione, poichè spesso ha incontrato ne' teneri feti la membrana aperta verso l' alto, e mancare eziandio affatto nel principio, in cui il meato auditorio esterno e la tuba Eustachiana non fanno che un forame (prima fessura branchiale), il quale a poco a poco si allunga in tubo, che la membrana del timpano poi divide in porzione cutanea e porzione faringea. A conforto di che reca egli in mezzo le osservazioni di Fleischmann, il quale ha trovato normalmente il forame di Rivino in alcuni mammiferi come la Talpa Europaea, il Vespertilio murinus, e il ferrum equinum. Fin da quando io era dissettore principale di anatomia ad insinuazione di un mio venerato e amatissimo maestro, il Prof. Michele Medici, istituii non poche ricerche sulla membrana del timpano in cadaveri di uomini adulti e di feti, chè allora n' aveva io dovizia, per vedere se pure in quella scoprissi un forame, e dopo lungo faticare io non riuscii che a risultamenti negativi. Non lascierò di avvertire che nelle prime ricerche che io feci in quel tempo, su embrioni di nove a tredici settimane e su feti quadrimestri e quinquemestri, levando la membrana di Kerckringio (3) tesa davanti a quella del timpano e non troppo a lei aderente, mi accadde talvolta di vedere massimamente in feti fra il terzo e 'l quarto mese un forellino presso a poco nel luogo ove Rivino lo ponea, pel quale forellino era penetrato dell' aria, che in ispecie di bollicina scorrea sotto la membrana del timpano pressa che fosse; ma tale forellino ben presto ebbi conosciuto essere effetto di rottura venuta nel distaccare la membrana Kerckringiana sudetta, la quale era più strettamente adesa alla circonferenza e superiormente e posteriormente che al centro della membrana timpanica. E variando modo di preparazione mi apparve tal altra volta una fenditura trasversale leggiermente arcuata in alto presso l' incisura o interruzione del quadrante timpanico; nella quale fenditura introducendo un sottile specillo ottuso, e dolcemente spingendolo andava fra gli strati della membrana fin presso al suo centro, ma non usciva nè esternamente nè dentro la cavità del timpano. E ripetendo le ricerche non tardai ad accorgermi che quella fenditura era prodotta da dissezione mal proveduta, essendo che essa proveniva parte dall' avere tagliato troppo vicino alla

(1) Op. cit. pag. 520. — Nella traduzione 598.

(2) Enciclop. Anat. Tom V, pag. 759. Nota 2.

(3) Op. cit. pag. 221. Questa membrana di Kerckringio è grossa più dell' altra, e veduta al microscopio trovasi formata d' epidermide sostenuta da un tessuto connettivo percorso da vasellini sanguigni.

interruzione del suddetto quadrante lo strato esterno della membrana ed il periostio della faccia esterna della porzione squamosa continuo con lo strato medio di quella; parte da distaccamento de' strati mentovati, e parte in fine da un po' di smovimento della porzione squamosa medesima. Ma adoperando con più cautela ed evitando i detti inconvenienti, nessuna fenditura appariva. Ho recentemente rinnovate quelle ricerche su tre embrioni circa di quell' età, e sopra un feto quadrimestre, ed esse non mi hanno risposto diversamente che prima.

Quanto ai mammiferi sopradetti, io ho cominciato le mie osservazioni sopra un individuo adulto del ferrum equinum, di poi le ho proseguite sopra molti del murinus; nè mai mi è venuto di comprovare le asserzioni del Fleischmann: nessun forame ho potuto scorgere, per quanta diligenza mi abbia usata e per quanto io abbia cercata la membrana del timpano con occhi armati anche d' acutissime lenti. In alcuni teschi dell' ultimo vespertilione nominato, spogli delle parti molli e secchi, e ne' quali avea conservata integra quella membrana, mi è apparso, non però costantemente, al di sotto del centro di esso lei e verso la parte posteriore un leggiero infossamento che simulava un forame, e che fatto di introdurvi una setola, e lievemente spinta, non mai è riuscita in cavità, e quello era cieco e manifestamente prodotto dall' essicazione e in una dallo stiramento del manico del martello. La qual cosa mi ha indotto a sospettare che il Fleischmann abbia forse istituito le sue osservazioni su teschi consimili, ne' quali quello infossamento avrà per le dette cagioni e per la sottigliezza eziandio della membrana potuto anche fendersi nel suo fondo, e presentare un pertugio. E già a tutti è conosciuto che una sottile membranella, tesa anche lassamente, seccandosi, si solve spesso nella continuità, massimamente dove la tensione si opera con forza maggiore. Io adunque tengo che quelle due specie di Vespertilioni non abbiano naturalmente perforata la membrana del timpano, e che il forame che dicono avervi veduto, sia al postutto un forame fattizio od acquisito.

Nella Talpa Europaea la particolare disposizione dell' orecchio esterno mi ha resa alquanto faticosa la ricerca; nondimeno ho alla perfine conosciuto non essere pure nella membrana del timpano di esso lei verun forame. Tutti sanno che questo insettivoro manca di conca, ed ha un lungo meato auditorio esterno, il quale è parte osseo e parte cartilagineo, e questo è lungo il doppio circa di quello e molto più stretto, e la sua cartilagine termina come in un padiglione o imbuto a simile di quello di una trombettina da fanciulli, il quale padiglione si applica al meato osseo. Questo è molto più largo e, forma una dilatazione o intumescenza inferiore situata a non grande distanza dalla linea media della base del cranio, la quale intumescenza o dilatazione è direi quasi in ispecie di quella bolla che appellano timpanica, ma non così prominente e nulla partecipante della formazione della parete inferiore della cavità del timpano, ma tutta riservata all' orecchio esterno, e così dovea essere non essendo la lamina ossea ond' è formata, che esterno prolungamento del quadrante timpanico, quale appunto si è la porzione ossea del

meato in discorso. E quel quadrante circoscrive un' apertura molto ampia ed obliquissima, chiusa da una proporzionata membrana che è quella del timpano. Per quanta diligenza abbia adoperato nell' esaminarla, non mi è mai venuto fatto di scoprirvi alcun forame; e pensando che i miei occhi non fossero sufficienti, l' ho anche fatta esplorare ad occhi giovani acuti quali sono quelli de' miei assistenti, ma il loro guardare, tutto che sollecito e attentissimo, è stato pur niente a trovarvi un forame. Ma dond' è che lo si è ammesso? Io sospetto che ciò sia avvenuto per avere prese certe parti per quel che non sono, vale a dire che il meato osseo essendo così inferiormente dilatato come ho detto, siasi significato per bolla timpanica, ed una particolare piega circolare che or ora descriverò, della membrana sopannante il meato auditorio cartilagineo, siasi considerata come membrana del timpano perforata.

Aprendo dalla parte inferiore il meato auditorio secondo la sua lunghezza e allontanando i lembi del taglio, occorre nella parete superiore della porzione cartilaginea di esso meato una eminenza longitudinale bacilliforme e dura, la quale occupa il quarto esterno di quella parete, a lati della quale eminenza hanno due lacune o concavità che forse tengono luogo di conca. Alla estremità interna della descritta eminenza comincia una cresta formata dalla membrana interna del meato, estesa fino al limite tra il meato cartilagineo e l' osseo. La quale cresta alla metà circa del suo corso è divisa, e quanto più si accosta al suo termine, si fa posteriore descrivendo un tratto di spirale continuo con un anello, o vero diaframma pertugiato nel centro, posto al suddetto limite; il quale anello quivi restringe molto sensibilmente il lume del meato cartilagineo, e l' adito alla cavità molto più ampia del meato osseo. Io non saprei spiegare in altro modo la pretesa esistenza di un foro costante nella membrana del timpano della Talpa, se non ponendo che siasi preso per membrana del timpano quel diaframma, essendosi precedentemente significato per bolla timpanica la dilatazione od eminenza inferiore del meato osseo. La disposizione poi che ho descritta dell' orecchio esterno della Talpa, non solo ha il vantaggio d' averne fatta conoscere la cagione di un errore, ma eziandio di farne meglio comprendere perchè la Talpa pur mancando di conca abbia un udito finissimo e intenda distintamente romori o suoni debolissimi e direi quasi insensibili. G. Cuvier reca ciò alla grande estensione ed obliquità della membrana del timpano (1) e C. G. Carus aggiugne alla grandezza de' canali semicircolari (2). Non si può menomamente dubitare che queste non siano cagioni efficacissime al producimento del fenomeno; ma non è certo senza grande importanza anche la particolare disposizione del meato auditorio esterno. La lunghezza e strettezza della porzione cartilaginea di esso congiunta alla piega o cresta suddescritta debbono far sì

(1) Leçons d'Anatomie comparée. Tom. II, pag. 496. Paris an. VIII. — Non diversamente nella edizione di Bruxelles 1836. Tom. I, pag. 579, e nel Regne animale, édition accomp. des planches gravées. Mammiferes texte, pag. 157.

(2) Traité d'Anat. comparée. Tom. I. Paris 1835, pag. 466.

che le ondazioni sonore dell' aria entratevi dentro corrano più veloci e in un medesimo ingagliardiscano siccome quelle che da luogo infinitamente più capace qual' è quello dell' atmosfera passano ad altro fuor misura strettissimo qual' è quella porzione del meato. Senza che partendosi per ragione della cresta quasi in due correnti più strette, e ripercotendosi tra le pareti non solo velocitano maggiormente il loro corso, ma eziandio si rinforzano, di qualità che posto ch' elle fossero debolissime, non iscemate, anzi aumentate giugneranno entro il meato osseo, il quale essendo più largo opererà ch' elle perdano di lor prestezza e gagliardia, riducendosi alla debolezza che avevano innanzi, o vero se i suoni furono forti, rintuzzandone l' impeto, acciò che non ne riceva offesa la membrana del timpano.

I fautori della esistenza di un forame nella membrana del timpano aggiungono d' averlo veduto in quella altresì di altri mammiferi, cioè della pecora, del cervo e della volpe, se non che egli n' avvertono ch' esso ora ci è ed ora non ci è. La quale circostanza pel nostro fatto rende le loro asserzioni inattendibili, ed è a credere che quelle tutte volte che il forame occorre, sia fattizio o vero acquisito. E qui hanno loro compimento le osservazioni da me fatte ad illustrare i tre argomenti discorsi in questo scritto, per le quali osservazioni parmi sia manifesto:

1.° Che l' abnorme separazione della porzione squamosa dalle altre dell' osso temporale nell' adulto è stata mal definita da G. Otto, il quale la chiamò impropriamente separazione perpetua della porzione squamosa dalla petrosa:

2.° Che ne' Trattati di Osteologia e di Osteogenesi la porzione squamosa del temporale non è stata sufficientemente descritta rispetto l' estension sua e la parte ch' ella ha nella composizione dello scheletro osseo dell' orecchio esterno e medio:

3.° Che nella porzione squamosa oltre il processo zigomatico voglionsi considerare altri tre processi, cioè l' opercolare mastoideo od opercolo mastoideo, il processo auditorio e la cresta o processo timpanico:

4.° Che non è del tutto esatto dire che la porzione mastoidea è formata interamente da un germe osseo proprio, o prodotta dalla porzione petrosa; chè alla sua composizione concorre anche la porzione squamosa, in piccola parte a vero dire, limitandosi alla metà anteriore della faccia esterna del grande processo mastoideo, chiusa o formata nella corteccia esteriore dall' opercolo o processo opercolare mastoideo:

5.° Che neppure è esatto il dire che il meato auditorio esterno osseo è prolungamento del quadrante del timpano; chè esso meato è per massima parte formato superiormente e posteriormente dal processo auditorio della porzione squamosa:

6.° Che fra il detto processo auditorio e quel prolungamento del quadrante timpanico ha una sutura, che io chiamo squamoso-auditoria, continua da principio con la squamoso-mastoidea, la quale sutura squamoso-auditoria non è troppo raro incontrare ne' cranî degli adulti:

7.° Che neanco è esatto il dire che la parete superiore o volta o *lacunar tympani* che voglia chiamarsi, è costituita da una lamina ossea della faccia ante-

riore della porzione petrosa, la quale lamina è chiamata da Hyrtl *tegmentum;* chè è formata esternamente, bensì in piccolissima parte, eziandio dalla cresta o processo timpanico della porzione squamosa:

8.° Che spessissimo hanno due processi mastoidei, uno grande e l'altro piccolo, separati da una più o meno profonda incisura mastoidea; ma alcuna volta ha il solo processo mastoideo grande; altra volta i due processi mastoidei s'aggua-gliano quasi nella grandezza, e sono separati da una incisura appena indicata; e finalmente il processo mastoideo può essere triplice, e i tre processi sono divisi da due incisure mastoidee:

9.° Che sì nel grande come nel piccolo processo mastoideo possono trovarsi cellule o caverne mastoidee, ma spesso mancano nell'ultimo, laddove nel primo per le più volte occorrono:

10.° Che le cellule mastoidee soggiacciono a varietà di numero, di grandezza, di sito, di commercio o comunicazione reciproca, e colla cavità del timpano e colle cellule della parte ima della porzione squamosa (cellule temporali o temporo-zigomatiche); e possono non esserci affatto: nel quale caso non ne tiene sempre luogo il tessuto diploico come nei teneri fanciulli; ma talvolta un tessuto osseo compatto e solido simile a quello che avvolge esternamente i processi, o vero un tessuto osseo compatto, in cui s'avvisa ancora la struttura del diploe, avente la sostanza molle ch'esso comprendeva, trasmutata in ossea, o vero un misto, cioè una parte di questo ed una di quello:

11.° Che ne' casi prefati possono pure aversi cellule a dir vero scarse, non confluenti, ma discrete, od aversene una sola alveolare in alto, la quale mette capo nell'antro Valsalvano della cavità del timpano per un forame o canale detto non troppo esattamente dal Sappey petro-mastoideo, e che a scanso di contese chiamerei piuttosto masto-timpanico:

12.° Che quelle scarse cellule discrete possono mancare di comunicazione tra loro e colla cavità del timpano, e mostrarsi come isolette solitarie nel seno di quel tessuto compatto e solido, di qualità che ho creduto doverle contrassegnare colla denominazione di cellule mastoidee insulari solitarie:

13.° Che in queste cellule insulari solitarie o si contiene una sostanza molle biancastra pultacea ed anco calcare o terrea, o vero un fluido o vapore tenuissimo il quale sfugge alla osservazione aprendole:

14.° Che non tutte le cavità che occorrono nei processi mastoidei hanno il significato di cellule mastoidee avuto riguardo alla loro origine; chè possono esservene di prodotte da cagioni morbose, come l'ampia cavità del grande processo mastoideo sinistro della fanciulla di 13 anni, cavità occupata e formata da un grosso tubercolo andato a degenerazione caseosa:

15.° Che agguagliandosi nella grandezza i processi mastoidei grande e piccolo può accadere che in questo le cellule siano grandi e capaci e numerose, e in quello scarsissime e quasi nulle:

16.° Che la comparsa delle cellule mastoidee non ha età determinata, avendo trovato ch' elle mancavano da tutti e due i lati in una donna cinquantenne, e che ben capaci erano ne' grandi processi mastoidei della suddetta fanciulla di 13 anni, e a destra semplicemente in altra fanciulla di 8:

17.° Che cellule o caverne non s' incontrano solamente ne' processi e nella porzione mastoidea non che nella cavità del timpano, ma eziandio nella parte inferiore della porzione squamosa del temporale, estese in avanti al disopra del poro acustico esterno, e della parte posteriore della cavità glenoidea, e sino in corrispondenza della parte esterna della radice trasversa dell' apofisi zigomatica; le quali cellule, atteso il posto o la regione che occupano, vogliionsi chiamare temporali o temporo-zigomatiche:

18.° Che queste cellule temporo-zigomatiche possono essere distinte in due provincie una anteriore e l' altra posteriore, separate fra loro o da tessuto diploico o da tessuto osseo compatto e solido: nel quale caso la provincia posteriore sola può comunicare con le cellule mastoidee, specialmente anteriori, laddove le anteriori non ne hanno in verun modo facoltà, e sono cellule temporo-zigomatiche insulari, talvolta circoscritte ad una sola (insulare solitaria), ma d' ordinario sono più di una e confluenti o vero agminate:

19.° Che ogni volta che mi sono incontrato in esse, l' ho trovate vuote non già nello stretto senso della parola, ma nel senso ch' esse non contenevano una sostanza molle o tale ch' ella potesse cadere sotto i sensi aprendole, ma fluida e vaporosa, come le cellule insulari solitarie mastoidee, la quale sfuggiva all' osservazione:

20.° Che tutte le divisate cellule comunicanti o non comunicanti fra loro, e colla cavità del timpano, vuote che siano, debbono agire per risonanza, non altrimenti che altre cavità più lontane situate sul tragitto dell' aria che si reca per la tuba Eustachiana alla cavità del timpano, vo' dire l' antro d' Higmoro, e i seni frontali e sfenoidali:

21.° Che finalmente l' esistenza di un forame normale nella membrana del timpano dell' uomo e dei mammiferi non è niente comprovata dall' osservazione; anzi è al postutto rigettata, e qualora occorra, esso è un forame, per quanto ho scorto, fattizio o prodotto da preparazione non troppo provveduta, o vero acquisito o patologico.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. 1.ª Osso temporale sinistro di un giovine di 22 anni, nel quale è rimasta separata la porzione squamosa dalle altre ond' è composto.

Fig. 2.ª Osso temporale destro del medesimo giovane. Amendue queste ossa sono rappresentate dalla faccia esterna.

Fig. 3.ª e 4.ª L'osso temporale dimostrato dalla Fig. 1.ª, ove si vede la porzione squamosa separata dall' altre e rappresentata dalla faccia interna, laddove quelle, già tutte insieme conglutinate, si affacciano col loro lato esteriore.

Fig. 5.ª Porzione squamosa ritratta dalla Fig. 3.ª veduta in modo che bene apparisca il processo auditorio.

Fig. 6.ª Osso temporale destro di una donna trentenne delineato dalla parte inferiore, nel quale occorrono tre processi mastoidei, separati da due incisure mastoidee.

Tavola II.

Fig. 7.ª Rappresenta il grande processo mastoideo sinistro di una donna di 47 anni aperto con un taglio verticale antero-posteriore, nel quale processo mancano le cellule, e in luogo loro trovasi sostanza ossea compatta e solida costituita dal reticolo diploico, e dalla sostanza molle in esso contenuta, trasformata in ossea.

Fig. 8.ª Grande processo mastoideo destro di un uomo di 54 anni aperto come nella precedente figura, nel quale era anche manifesta la porzione posteriore della sutura squamoso-mastoidea. Si vede che in corrispondenza dell'opercolo mastoideo il processo è formato di tessuto osseo compatto e solido, simile a quello della corteccia, cavato in alto da una cellula mastoidea alveolare, e nel restante da un tessuto osseo compatto, nel quale s' avvisa ancora la struttura del diploico, ma più trasformato che nella Fig. 7.ª

Fig. 9.ª Grande processo mastoideo sinistro di un uomo di 57 anni, aperto nella solita maniera, il quale processo apparisce superiormente formato di tessuto osseo compatto e solido simile al corticale del processo, e nella parte inferiore altresì

formato di tessuto osseo compatto e solido, ma colorato in giallo, e mostrante inferiormente anche la struttura diploica. Cellule rade occorrono semplicemente nella parte superiore, le quali non comunicano tra loro nè colla cavità del timpano e sono come isole nel seno del tessuto compatto simile al corticale, e sono cellule insulari solitarie.

Fig. 10.ª Cellule del grande processo mastoideo, e cellule temporali o temporo-zigomatiche parte comunicanti con le precedenti, e parte senza comunicazione coll'une e colle altre; le quali ultime cellule sono anteriori, da me chiamate cellule insulari agminate. Lato destro

Fig. 11.ª Cellule mastoidee anteriori del grande processo mastoideo, e cellule temporo-zigomatiche, le anteriori delle quali sono insulari, posteriormente appaiate e comunicanti per un pertugio con la cavità craniense: anteriormente ve ne ha una solitaria compresa nella radice trasversa dell'apofisi zigomatica. Lato destro.

Tavola III.

Fig. 12.ª e 13.ª Processo mastoideo grande di una fanciulla di 13 anni diviso col solito taglio in porzione esterna ed interna, rappresentanti oltre le cellule un'ampia cavità che racchiudeva un tubercolo. Lato sinistro.

Fig. 14.ª Cellule molto capaci del grande processo mastoideo destro della fanciulla anzidetta.

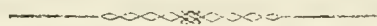
Fig. 15.ª Cellule del grande processo mastoideo destro di una fanciulla di 8 anni.

Fig. 16.ª e 17.ª Queste due figure dimostrano come nel lato sinistro il piccolo processo mastoideo agguagli il volume del grande, ed esso quasi solo contenga cellule molto capaci, le quali comunicano per un ampio forame o canale, Fig. 17.ª, da me chiamato masto-timpanico, e da Sappey petro-mastoideo, coll'antro Valsalvano della cavità del timpano.

Le figure di queste tre Tavole rappresentano gli oggetti di grandezza naturale, e in tutte le medesime lettere indicano le particolarità medesime.

A, porzione squamosa dell'osso temporale — *B*, quadrante timpanico, e doccia auditoria nella quale prolungasi — *C*, porzione petrosa — *D*, porzione mastoidea.

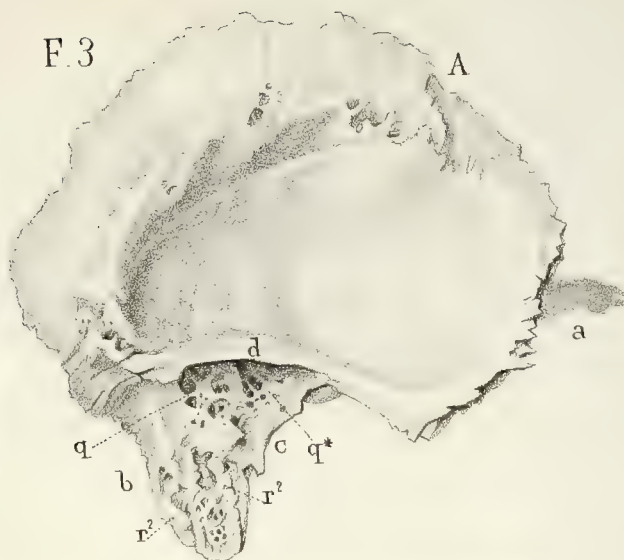
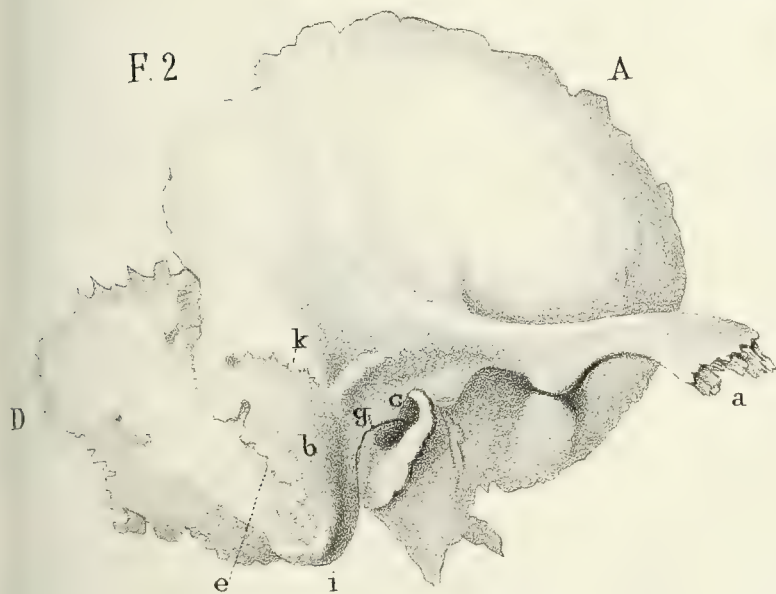
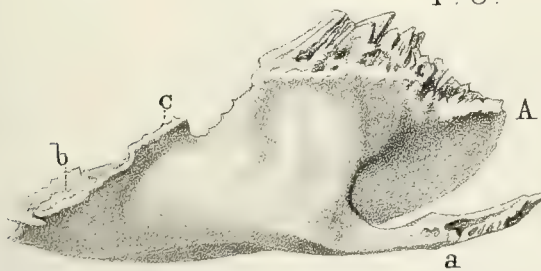
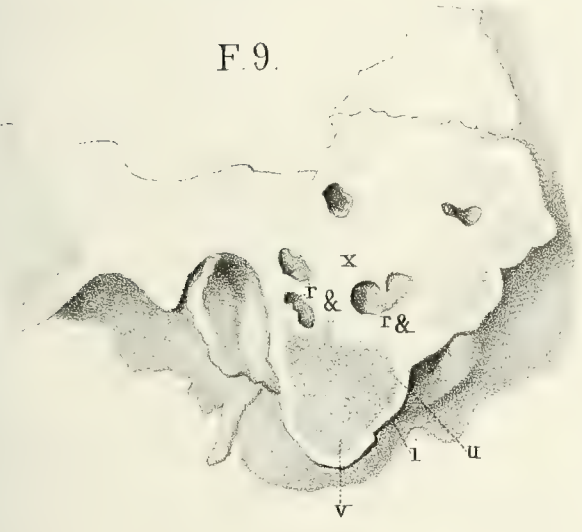
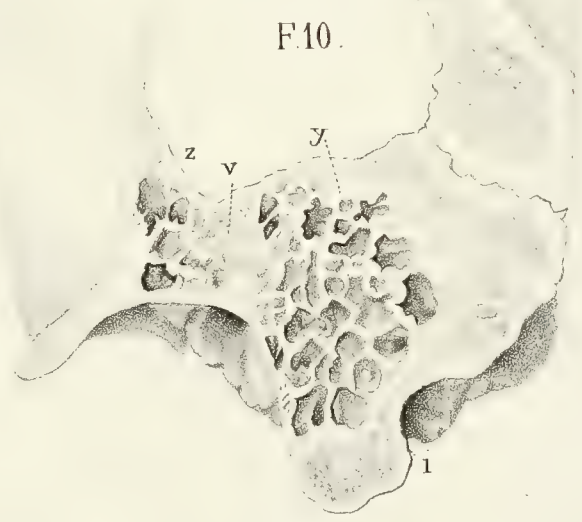
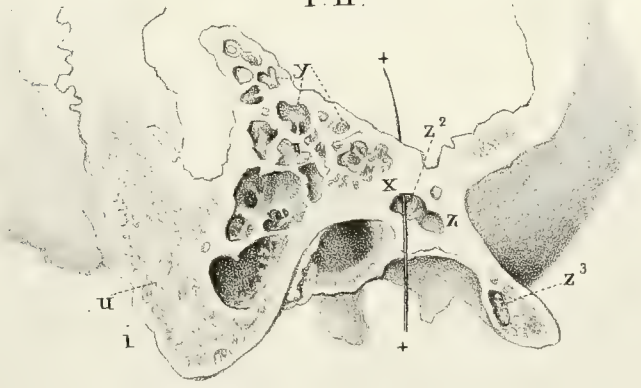
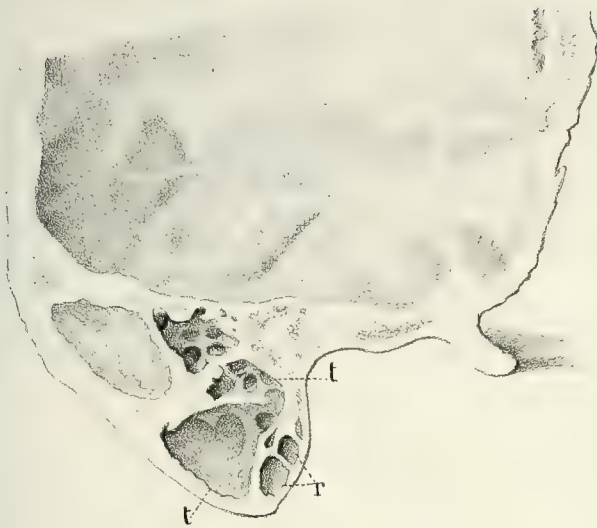
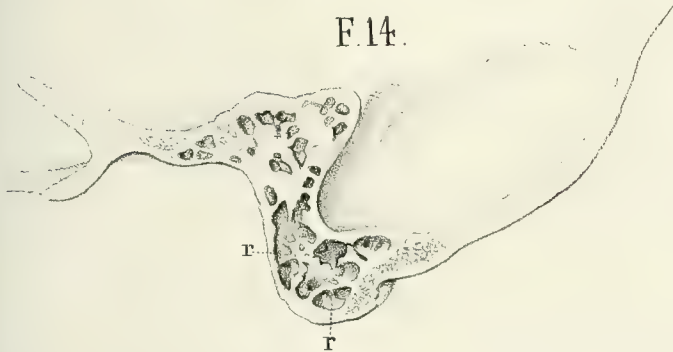
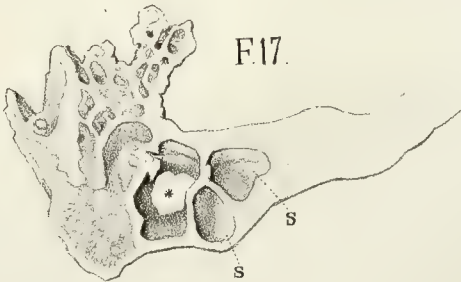
a, Processo od apofisi zigomatica — *b,* processo opercolare mastoideo, od opercolo mastoideo — *c,* processo auditorio — *d,* cresta o processo timpanico — *e, f,* sutura squamoso-mastoidea, cioè *e* porzione posteriore, *f* porzione anteriore della detta sutura — *g,* sutura squamoso-auditoria continua con la porzione anteriore della precedente — *h,* lamina ossea della porzione petrosa, chiamata da Hyrtl *tegmentum*, la quale lamina in un con la cresta o processo timpanico della porzione squamosa compone la parete superiore o volta o *lacunar* che si chiami, della cavità del timpano — *i,* grande processo mastoideo — *k,* solco incostante che sem-

brerebbe limitarlo esteriormente e formare dell' opercolo mastoideo un ossetto distinto dalla porzione squamosa (vedi il testo pag. 123) — *l*, processo anomalo frapposto al grande e al piccolo processo mastoideo, e che può chiamarsi processo mastoideo medio, il quale qui è il più piccolo dei tre — *m*, processo mastoideo terzo o piccolo — *n*, incisura mastoidea anomala — *o*, incisura mastoidea ordinaria — *p*, solco occipitale — *q*, cellule timpaniche occupanti il piccolo spazio *q* * della porzione squamosa sotto il processo o cresta timpanica; il quale spazio appartiene alla parete esterna della cavità del timpano — *r*, cellule del grande processo mastoideo, delle quali cellule appariscono in r^2, r^2, de' ciechi fondi nella faccia interna del processo opercolare mastoideo — *s*, *s*, ecc. cellule del processo mastoideo piccolo molto capaci per essere egli quasi eguale al grande in volume, le quali cellule per il largo forame * delineato nel segmento della Fig. 17.ª comunicavano con la cavità del timpano — *t*, *t*, *t*, ampia cavità del processo mastoideo sinistro, la quale era occupata da un tubercolo (vedi Fig. 12.ª e 13.ª) — *u*, tessuto osseo compatto e solido riempiente il grande processo mastoideo, nel quale tessuto più o meno si avvisa la struttura del tessuto diploico — *u* *, cellule diploiche — *v*, tessuto diploico — *x*, tessuto osseo compatto e solido simile allo esterno che avvolge il grande processo mastoideo, nel quale tessuto occorrono cellule mastoidee scarse, e le cellule insulari discrete o solitarie *r*, &, — *y*, *z*, cellule temporali o temporo-zigomatiche distinte in due provincie, posteriore *y* comunicante con le cellule del grande processo mastoideo, ed anteriore *z* separata dall' altra o per tessuto diploico *v*, o per tessuto osseo compatto e solido *x*, simile a quello delle due tavole della porzione squamosa: le cellule della porzione *z* sono dunque insulari confluenti o agminate — z^2, due cellule insulari, nella posteriore delle quali ha un forellino in cui si è introdotta una setola +, +, il quale forellino comunica con la cavità del cranio — z^3, cellula insulare solitaria chiusa nella radice interna o trasversa dell' apofisi zigomatica — *, *, Wormiano mastoido-occipitale.

C. Bettini dis.ᵗ

Lit. G. Wenk.

C. Bettini dis.° Lit. G. Wenk.

C. Bettini dis.e

Lit. G. Wenk

SULLE

FORME COLLINEARI E RECIPROCHE

NELL' ORDINARIA GEOMETRIA

MEMORIA

DEL PROFESSOR FERDINANDO ASCHIERI

(Presentata nella 3ª Sessione Ordinaria 20 Novembre 1879)

1. Scopo di questa nota è la posizione dei principii della OMOGRAFIA o COLLINEAZIONE, e della CORRELAZIONE, o RECIPROCITÀ delle forme fondamentali di 2ª e 3ª specie —, seguendo una via (per quanto a me consta) non ancor tenuta da altri, e che mi è parsa facile, e molto addatta per l' insegnamento della *Geometria Projettiva.*

Per l' intelligenza di quanto si espone, basterà ritenere (col Sig. Cremona) « *projettive*, due forme fondamentali di 1ª specie che si deducano l' una dall' altra, « elemento per elemento, con un numero finito di OPERAZIONI (*projezioni,* e *sezioni*); « ed inoltre, converrà ritenere, che la *Corrispondenza*, fra gli elementi di due di « tali forme projettive, è determinata, quando siano fissate tre coppie di elementi « *corrispondenti*: cioè: fissate le dette coppie, ogni elemento dell' una forma ha « sempre il medesimo *corrispondente* nell' altra, qualunque sia il SISTEMA DI OPE- « RAZIONI (variabile in infinite maniere) con cui dai tre elementi fissati della prima « forma si passa ai corrispondenti dell' altra ». Finalmente, converrà avere in mente la teoria della trasformazione polare rispetto ad una CONICA, e ad una QUADRICA.

2. Ciò posto; cominciamo, pel nostro scopo, a dimostrare il seguente Teorema:

Con un numero finito di Operazioni (proiezioni da un centro o sezioni con un piano), si può passare in infinite maniere differenti da ogni vertice di un quadrangolo (Q), o lato di un quadrilatero (q), ad un rispettivo e fissato vertice di un altro quadrangolo (Q'), o lato di un altro quadrilatero (q').

Dim. — Siano A, B, C, D i vertici di (Q), ed A', B', C', D' ordinatamente i vertici di (Q') che si debbono dedurre da quelli di (Q) con projezioni e sezioni, e siano inoltre i quadrangoli (Q) e (Q') giacenti rispettivamente nei piani π, e π'. Prolunghiamo i lati AB, e CD ad incontrarsi in E, e così $A'B'$, e $C'D'$ ad incontrarsi in E'; e sopra un piano σ, passante per E', projettiamo A, B, C, D da un punto arbitrario O di EE', otterremo, per projezioni, rispettivamente, i punti A_1, B_1, C_1, D_1, e le A_1B_1, e C_1D_1 concorreranno in E'. Le A_1A', e B_1B' si taglieranno così in un punto O_1. Ora da O_1, e sopra un piano σ' passante per $A'B'$, projettiamo i punti A_1, B_1, C_1, D_1 otterremo i punti A', B', C_2, D_2 rispettivamente; e le $A'B'$, e C_2D_2 concorrono in E', onde le $C'C_2$, e $D'D_2$ si taglieranno in un punto O_2.

Da O_2 e sopra il piano π' projettiamo i punti $A'B'C_2D_2$ otterremo rispettivamente per projezioni i punti $A'B'C'D'$ come si voleva.

Se poi (Q) e (Q') giacessero in uno stesso piano ω, basterebbe projettare uno di essi da un punto fuori di ω, e tagliare con un nuovo piano ω_1; e si sarebbe con ciò ricondotti al caso precedente.

Essendo, infine, a, b, c, d, i lati del quadrilatero (q) che debbono condurre con projezioni e sezioni ordinatamente ai lati a', b', c', d', di (q'), avremo ottenuto lo scopo, quando con projezioni e sezioni si passi dai quattro punti ac, ad, bc, bd ordinatamente, ai quattro punti $a'c'$, $a'd'$, $b'c'$, $b'd'$.

Il teorema è dunque completamente dimostrato.

Questo stesso teorema si può dimostrare in base al seguente

Lemma — *Dato in un piano ω un punto O, due punti A, ed A' allineati con O ed una retta s di punti S, si può, con un numero finito di operazioni, passare, dagli elementi O, A, S, rispettivamente agli elementi, O, A', S, e con quelle operazioni si passerà da ogni altro punto M di ω. considerato appartenente al sistema O, A, S, ad un punto M' di ω, appartenente al sistema O, A', S; essendo M ed M' allineati con O.*

Dim. — Infatti da un punto O' fuori di ω, e sopra un piano ω' passante per s, projettiamo il sistema O, A, S, otterremo rispettivamente i punti (projezioni) O_1, A_1, S. Le rette $A'A_1$, ed OO_1 si segano in un punto O''. Projettando ora da O' il sistema di punti O, A, S ed M del piano ω, tagliando con ω', e projettando poscia da O'', si ottiene il sistema di punti O, A', S, M', in modo che M ed M' sono, come A ed A', allineati con O: il lemma è così dimostrato.

3. Si può osservare che si passa anche, colle operazioni indicate, da una retta m del primo sistema ad una retta m' di ω appartenente al 2° sistema, per modo che le rette m ed m' si segano in un punto di s. Inoltre variando comunque il punto O' ed il piano ω', dal punto M si passa sempre, con le analoghe operazioni, al medesimo punto M'; poichè M' è l' intersezione della retta OM, con quella che unisce il punto A' col punto ove AM sega la retta s.

Ogni punto M del piano ω determina così un punto M' dello stesso piano, con una legge costante di costruzione; e viceversa: M' determina in modo ana-

logo il punto M; e lo stesso dicasi per ogni retta m di ω. Abbiamo posta, in altre parole, una *particolare corrispondenza* fra gli elementi del piano ω, essendo *corrispondenti* due elementi che come M ed M', oppure m ed m', si determinano reciprocamente con costruzioni regolate da una legge costante.

4. Il lemma ora dimostrato ci porge il principio dell' OMOLOGIA delle figure in un piano ω. O è il *centro* ed s è l' *asse* dell' OMOLOGIA. Conducendo da O'' un piano ω'' parallelo ad ω, e projettando da O', e sul piano stesso ω, l' intersezione di ω'' con ω'; si otterrà la *retta limite* r appartenente alla figura dei punti M. E similmente projettando da O' con un piano ω''' parallelo ad ω; e da O'' projettando la retta $\omega'''\omega'$ sul piano ω otteniamo l' altra *retta limite* q'.

Le due rette r, e q' sono parallele fra loro, perchè parallele ad s. La loro costruzione si può fare indipendentemente dal centro O' di projezione e dal piano ω' di sezione; infatti per avere p. es. un punto R di r, basta condurre da O una parallela alla retta $M'A'$, e dove questa sega la retta AM si ha un punto R di r. Ponendo in questo modo l' *omologia piana*, si possono con essa dimostrare quei teoremi sui triangoli, e così sui quadrangoli, e quadrilateri, che danno, *la definizione delle forme armoniche,* quindi ricavare la teoria delle forme fondamentali di 1ª specie, *projettive,* e la teoria delle *coniche*. In una parola si può, a mio parere, colla posizione di tal lemma, fondare un metodo puramente geometrico e rigoroso, per le teorie preliminari dell' ordinaria Geometria projettiva. — Permesse queste brevi disgressioni, ritorniamo alla dimostrazione del teorema del N. 2, in base al lemma ora posto.

5. Supponiamo dapprima che i quadrangoli considerati (Q) e (Q') siano in uno stesso piano ω. Le rette AA', e BB' si segano in un punto O, e le AB, ed $A'B'$ in un punto S; per S e nel piano ω conduciamo una retta s, e col *centro* O di *omologia*, coll' *asse* s, e colla coppia AA' di punti corrispondenti, costruiamo la figura omologica di (Q).

Otterremo un nuovo quadrangolo, di cui A', B', C_2, D_2 sono i vertici. Indi colla coppia di punti corrispondenti C_2C', con un centro O_1 di omologia sulla retta $C'C_2$, e coll' asse $A'B'$, passeremo dai punti A', B', C_2, D_2, ai punti A', B', C', D_3.

Ora la retta $A'D_3$, sega la retta $C'D'$ in un punto D_4; quindi coll' omologia di centro A', di asse $B'C'$ e di cui D_3D_4 è una coppia di punti omologhi, passeremo dai punti $A'B'C'D_3$ rispettivamente ai punti A', B', C', D_4; e finalmente col centro C' di omologia coll' asse $A'B'$, e colla coppia D_4D' di punti corrispondenti, passeremo dai punti $A'B'C'D_4$ ai punti A', B', C', D' rispettivamente; epperò saremo passati anco con un numero finito di projezioni e sezioni dai vertici A, B, C, D di (Q) rispettivamente ai vertici $A'B'C'D'$ di (Q'). Se poi (Q) e (Q') fossero situati in piani differenti, basterà projettare uno di essi sul piano dell' altro e saremo ricondotti al primo caso. — Il teorema enunciato, è quindi anche in questo modo dimostrato.

6. Ciò posto, riteniamo le seguenti definizioni:

Due forme fondamentali di 2ª specie si diranno COLLINEARI, *quando si deducano l' una dall' altra, elemento per elemento, con un numero finito di projezioni da un centro e sezioni con un piano.*

E invece chiameremo:

RECIPROCHE *o* CORRELATIVE *due forme fondamentali di 2ª specie, che si deducano l' una dall' altra, elemento per elemento, con un sistema polare rispetto ad una* CONICA, *ed un numero finito di operazioni.*

Così due sistemi piani *omologici,* sono COLLINEARI.

In due forme COLLINEARI, *o* RECIPROCHE *le forme fondamentali di 1ª specie, fra loro corrispondenti sono* PROIETTIVE.

In generale poi si dimostra facilmente, il teorema:

Due forme fondamentali di 2ª specie, ciascuna composta di 4 elementi della stessa natura (tre qualunque dei quali non appartenenti alla stessa forma fondamentale di 1ª specie) sono COLLINEARI *o* RECIPROCHE; *e il passaggio dagli elementi dell' una forma, agli elementi che si vogliano corrispondenti nell' altra si può fare in infinite maniere differenti; però fissate una volta le 4 coppie di elementi che si debbono corrispondere, la corrispondenza fra gli altri elementi delle forme indefinite a cui appartengono le due date, è interamente determinata; cioè, qualunque sia la trasformazione polare, ed il sistema dell' operazioni usate, ogni altro elemento dell' una forma ha sempre lo stesso corrispondente nell' altra.*

Con questo teorema si vengono a porre i due principii della COLLINEAZIONE od OMOGRAFIA e della RECIPROCITÀ, o CORRELAZIONE, *delle forme fondamentali di 2ª specie,* o in altre parole, si vengono a stabilire le *trasformazioni lineari* per le forme stesse.

7. Vogliamo ora stabilire gli stessi principii per le forme fondamentali di 3ª specie, ossia pegli *Spazi ordinarii*, vale a dire composti di punti e di piani. — A tal fine, assunto un punto fisso O e un piano fisso π, e due punti fissi A A' allineati con O, possiamo per ogni punto M fuori della retta AA', costruire il suo corrispondente nell' Omologia sul piano MAA', avente per centro O, per asse l' intersezione di MAA' con π, ed essendo *corrispondenti* i punti AA'. Il punto M' si dirà la *projezione* del punto M nello spazio, o viceversa M la projezione di M'; od anche il punto M' è il *corrispondente* di M nell' *Omologia solida*, di cui O è il *centro*, π il *piano* ed AA' una coppia di elementi corrispondenti, che determinano l' omologia stessa, o il sistema delle projezioni sullo spazio.

Anche qui si ha il Teorema:

Con un numero finito di projezioni di spazio, e in infiniti modi differenti, si può passare da cinque punti A, B, C, D, E, (quattro qualunque dei quali siano i vertici di un tetraedro), o da cinque piani α, β, γ, δ, ε, (quattro qualunque dei quali siano le faccie di un tetraedro), ordinatamente ad altri cinque punti, A', B', C', D', E' analoghi, o ad altri cinque piani analoghi α', β', γ', δ', ε'.

Infatti coi punti AA', come corrispondenti, con un centro O sulla retta AA',

e con un piano π di omologia passante per la retta intersezione dei piani ABC, $A'B'C'$, facciamo la projezione di A, B, C, D, E otterremo i punti A', B_1, C_1, D_1, E_1 come projezioni. Sia O_2 il punto intersezione di B_1B', con C_1C'. — Col centro O_2, con un piano di omologia passante per A' e pel punto comune alle B_1C_1, $B'C'$, essendo inoltre B_1 B' punti corrispondenti, facciamo la projezione dei punti A', B_1, C_1, D_1, E_1 otterremo i punti (projezioni) A', B', C', D_2 E_2. Col piano di omologia $A'B'C'$, con un centro O_3 sulla retta D_2 D', e colla coppia D_2D' di punti corrispondenti, facciamo la projezione dei punti A', B', C', D_2, E_2, otterremo per projezioni rispettivamente i punti $A'B'C'D'E_3$. Il piano $E'D'C'$ seghi la retta $A'E_3$ nel punto E_4. Col centro A' col piano di omologia $B'C'D'$, e colla coppia E_3, E_4 di punti corrispondenti facciamo la projezione dei punti A', B', C', D' E_3, ed otterremo i punti A', B', C', D', E_4. La retta $C'E_4$ seghi la retta $E'D'$ nel punto E_5; le projezioni dei punti A', B', C', D', E_4 saranno i punti A', B', C', D', E_5 se si prenda il punto C' come centro, il piano $A'B'D'$, come piano di omologia, e i punti E_3E_4 come corrispondenti.

Finalmente se si projettano i punti ultimamente ottenuti, col centro D', col piano $A'B'C'$ di omologia, e colla coppia E_5E' di punti corrispondenti, si ottengono i punti $A'B'C'D'E'$. Così per le forme di punti il Teorema è dimostrato. In quanto alle forme di piani, basterà passare con successive projezioni, nel modo ora indicato, dai cinque punti:

$$\alpha\beta\gamma\,,\quad \alpha\gamma\delta\,,\quad \alpha\delta\varepsilon\,,\quad \beta\gamma\varepsilon\,,\quad \beta\delta\varepsilon\,,$$

ai cinque punti

$$\alpha'\beta'\gamma',\quad \alpha'\gamma'\delta',\quad \alpha'\delta'\varepsilon',\quad \beta'\gamma'\varepsilon',\quad \beta'\delta'\varepsilon'$$

rispettivamente; che passeremo anche con quelle operazioni dai cinque piani α, β, γ, δ, ε ordinatamente ai cinque piani α', β', γ', δ', ε'. Il Teorema è dunque completamente dimostrato.

8. Poniamo ora le seguenti definizioni:

Due forme fondamentali di 3ª specie, si diranno COLLINEARI, *quando si deducano l' una dall' altra, elemento per elemento, con un numero finito di projezioni di spazio.*

Due forme fondamentali di 3ª specie, si diranno invece RECIPROCHE *o* CORRELATIVE, *quando si deducano l' una dall' altra, elemento per elemento, con una* TRASFORMAZIONE POLARE *rispetto ad una* QUADRICA, *ed un numero finito di projezioni di spazio.*

Risulta subito facilmente, che:

In due forme collineari o reciproche, due forme fondamentali di 1ª specie fra loro corrispondenti, sono PROIETTIVE.

In due forme COLLINEARI, *le forme fondamentali di 2ª specie fra loro corrispondenti, sono* COLLINEARI; *e in due forme* RECIPROCHE *le forme analoghe sono pure* RECIPROCHE.

È inoltre facile dimostrare il teorema:

Due forme fondamentali di 3ª specie, ciascuna composta di cinque elementi della stessa natura (punti, o piani), sono o collineari, o reciproche, e in infinite maniere differenti si può passare dagli elementi dell' una forma a quelli che si fissano corrispondenti nell' altra; ma fissate una volta le cinque coppie di elementi corrispondenti, la corrispondenza, fra gli altri elementi delle forme indefinite a cui appartengono le due date, è interamente determinata, cioè: qualunque siano le costruzioni, ogni elemento dell' una forma ha sempre il medesimo corrispondente nell' altra.

Abbiamo in questo modo posti i principii dell' Omografia, e della Reciprocità *anche per le forme fondamentali di 3ª specie.*

DI UN NUOVO
UNCINO OSTETRICO ARTICOLATO E DECOLLATORE

PREMESSAVI LA STORIA GENERALE DI ALQUANTI MEZZI MECCANICI PRINCIPALI

ADOPERATI FIN QUI PER RECIDERE LA TESTA AL FETO MORTO
NELL'UTERO MATERNO

MEMORIA

DEL DOTTORE CAV. FERDNANDO VERARDINI

ACCADEMICO PENSIONATO

(Letta nella Sessione ordinaria del 4 Dicembre 1879)

Signori,

Nella Sessione delli 13 Novembre 1873, V' intrattenni con una mia dissertazione d'argomento ostetrico, la quale poco stante m' onoraste di pubblicare fra le Memorie di quest' Accademia nell' anno medesimo al Tomo IV, Serie terza, pagina 379 e seguenti; uscì tuttavia al pubblico in seconda edizione, con note ed aggiunte, nel Bullettino della nostra Medico-Chirurgica Società il successivo anno, e fu pure voltata in francese, testualmente, dall' onorevole Sig. Dott. *V. Dubois,* ed inserita nel Giornale della R. Società di Scienze Mediche e Naturali di Bruxelles, fascicolo d' Agosto 1874; finalmente la si accolse in esteso compendio nel gran Dizionario d' Enciclopedia Medica Italiana che si pubblica periodicamente in Milano. Quella dissertazione portava per titolo: „ di una nuova Leva articolata e decollatrice „ di cui ne offersi il disegno, e presentai il primo esemplare in acciaio; da allora in avanti se ne occuparono della mia Leva i principali Giornali scientifici Italiani ed Esteri, ed ho il conforto soavissimo di poter affermare oggi che la critica mi tornò veramente benevola ed anzi lusinghiera.

Gli appunti che quasi concordemente vennero fatti alla mia Leva ostetrica si riducono ai seguenti: che la spesa d' acquisto era non lieve e quindi non alla portata del maggior novero degli esercenti; ch' era forse un po' troppo massiccia ed in alcuni casi sembrava di non facile applicazione; che certamente in molti incontri non potevasi adoperare la congegnatura per la decollazione, avendo la Leva alla sua cima un diametro di meglio che tre centimetri; che dovendosi esercitare molta forza, probabilmente le articolazioni non avrebbero resistito ad una valida trazione e potevan cedere; nè so d' altri.

Ebbene, nel corso di questi anni e prendendo argomento dalle fattemi osservazioni, ho corretta la mia Leva e così m' affido d' averla condotta a quel punto che debba e possa servire in molte pratiche circostanze e come realmente ha servito nelle mani di varii Ostetrici, in particolar modo in quelle del Prof. *Giustino Mayer*, pur troppo da poco tempo mancato ancor giovane alla vita e nel momento in cui l' Arte e la Scienza sarebbero state da Lui ancora avvantaggiate, non che del chiarissimo *Balocchi,* il quale, come alla nota posta nella ristampa della mia Memoria così meco se n' espresse: „ la sua magnifica Leva ecc. mi sembra mirabilmente destinata nelle ristrettezze pelviche ecc. può essere anche con profitto applicata nei casi di rivolgimento, quando estratto il tronco la testa non esca per essere estesa; a quest' oggetto l' ho provata sul cadavere. „

Dico adunque, seguitando, che la mia Leva l' ho resa più sottile, più elegante senza ch' abbia perduto di sua necessaria robustezza, anzi dichiaro che n' ha acquistata di maggiore per avervi fatto adattare nella di lei faccia dorsale una molla, la quale, fermata ch' è a viti, presta più sostegno alle falangi e s' oppone maggiormente a che cedano, se mai, alle resistenze le quali potrebbero incontrarsi, a meno che non fossero veramente eccezionali e non solite a verificarsi ne' casi ove la mia istessa Leva può essere usata con profitto.

Soggiungo poi e richiamo all' attenzion Vostra, Signori, che nel contesto della mia citata Memoria aveva già posta chiaramente l' avvertenza che *solo in alcune particolari eventualità* avrebbero potuto gli Ostetrici giovarsi della congegnatura che quasi per un dippiù aveva unito alla mia Leva, o quella d' una molla che poteva essere spinta all' infuori e servire da guida per adattarvi uno *sverzino* od altro, a raggiungere anche lo scopo di decollare, ove fosse occorso, il feto morto nella matrice; in oltre in nota alla seconda edizione posi queste parole: „ Intendo poi di fare costruire un semplice decollatore, separato dalla Leva e col medesimo ben facile meccanismo con cui essa si articola. Avrà questo la particolarità di potersi così adattare assai meglio degli altri decollatori e per le ragioni toccate da me superiormente. Con questa nota *prendo data* della mia idea già comunicata da me all' artefice. „

Di tal guisa intendeva provvedere sì bene ed in parte, alla spesa per l' acquisto della Leva istessa e, quello che più a me premeva, di giovare alla pratica, facendo separatamente costruire: una semplice *Leva articolata* la quale per questa specialissima sua particolarità poteva riuscire un eccellente istrumento in casi particolari: ed un *Uncino*, pur' esso *articolato*, che fosse accessibile in parti anche assai ristrette e nelle quali altri analoghi mezzi avrebbero fatto difetto per la loro costruzione; fermo sempre nell' idea madre d' introdurre un istrumento retto e di poterlo indi curvare a seconda che ne corresse l' uopo.

Aveva impertanto fatto conoscere pur io nelle or ricordate pubblicazioni, che la mia Leva, per le ragioni da me discorse, essere non poteva appropriata alla decollazione in que' casi ove per la sua necessaria larghezza non l' era permesso d' insi-

nuarsi, e quindi che necessitava far costruire un ordigno separato che avesse unicamente il fine di decapitare il morto feto.

Se ben veggo parmi adunque che la osservazione fattami per lo passato in ordine a ciò non fu mai giusta, ed amo di credere che non si ripeterà più affatto, tenuto conto che avranno gli Ostetrici quest' esplicite mie dichiarazioni e conosciuto il mio nuovo Uncino; e lo desidero tanto più perchè m' è stata ripetuta anche in un pregevole lavoro e recentissimo del Sig. *Pierre Thomas*, Parigi 1879, che porta per titolo: „ des methodes, des procédés, des appareils et des instruments employés pour pratiquer l' embryotomie „. Per fermo, alla pagina 94, dopo aver tenuto discorso della mia Leva, esaminandola poi nel rapporto di eseguire anche la sezione del collo fetale così s' esprime. „ Sous ce point de vue, nous pensons que les dimensions qu' il presente seront souvent un obstacle á son emploi. „

Risposto di tal guisa succintamente agli appunti critici e fatta ragione innanzi a Voi del valore reale della mia Leva, non che delle modificazioni eseguitevi, come potete accertarvene esaminando il nuovo esemplare che avete innanzi, in adempimento della promessa datavi ed a raggiungere gli espressivi miei intendimenti, Vi presento oggi adunque il mio nuovo Uncino ostetrico decollatore, costruitomi dagli egregi nostri Lollini; i quali v' hanno posto attorno tanto interesse da essere riuscito veramente eccellente e degno lavoro di sì reputati Artisti, che onorano il nostro Paese.

Innanzi però ch' io Ve lo descriva permettetemi di premettere alquante considerazioni storiche le quali, a mio credere, mirano a raffermarne l' intrinseca sua utilità e valgono a rendere aperto il concetto che mi determinò a farlo costruire, pel confronto che se ne trae cogli altri già conosciuti; così operando ho in animo di rendere ancora un servigio non iscarso agli studiosi le ostetriche discipline. Nel ciò fare, avverto, che non m' attengo ad una classificazione puramente cronologica, bensì ebbi riguardamento al relativo meccanismo degli strumenti principali che ho creduto nominare o descrivere; di cotale maniera, divisi per gruppi, parvemi ne risultasse meglio il loro valore speciale.

Chi amasse poi avere una maggiore e molto estesa e particolareggiata cognizione degli apparecchi e degli strumenti, non che dei metodi usati a praticare la decollazione o l' embriotomia, ricorra all' Opera del chiarissimo *Thomas*, che poc'anzi citai, e troverà largo campo e fertilissimo per le sue ricerche.

Posto ciò, entro direttamente a svolgere il mio argomento, ponendo tuttavia la generica avvertenza che la pratica applicazione degli Uncini in ostetricia rimonta ad epoca assai lontana e costituiscono i primi strumenti adoperati per estrarre il feto; a tenore però che progredirono i perfezionamenti meccanici, a mano a mano scaddero essi d' importanza. Si adoperarono gli acuti e gli ottusi; i primi, com' è ben naturale a ritenersi, non furono posti in opera che ne' casi nei quali il feto era morto (e sono sempre temibili) ed alloraquando ogni altro mezzo era riuscito

insufficiente; i secondi, nelle speciali circostanze in cui il feto era morto od ancora vivente.

Non intendo io però, Signori, di tenervi adesso discorso di tutti gli Uncini od apparecchi che furono proposti fin qui; ma limito le mie ricerche all'esposizione di quelli che precipuamente furono in varie epoche immaginati per decollare il feto morto, qualora non riusciva fattibile l' estrazion sua in causa di presentazioni anormali e nelle quali non era praticabile la di lui versione.

Ippocrate, ne viene riferito che si valesse d' una specie di strumento del quale armava il suo pollice, conosciuto col nome di *Ferramentum unguis* e forse se ne serviva a maniera d' un Uncino e con esso cercava d' afferrare il collo del feto ed indi lacerarne le vertebre. (1) Secoli appresso ed ai nostri giorni, 1849, fu questo procedimento imitato e perfezionato dal *Didot* di Liegi, che inventò il suo *doigtier* (2), col quale munisce l' indice, a sommità appena un po' curva e se ne vale appunto per troncare gli attacchi legamentosi, o fibro-cartilaginosi delle ossa del cranio, allontanarli ed estrarli; di questo *ditale* ne porgo anche il disegno perchè poco conosciuto, (Vedi Tav. 1.ª, Fig. I) e per la stessa ragione, e per utile corredo di questo mio povero studio, così mi comporterò per altri strumenti che v' andrò in esso nominando. (3)

Dichiarato questo, continuo il mio discorso e rendo manifesto che il romano *Celso* fino dai tempi di *Augusto* e di *Tiberio*, per vincere le difficoltà che si offrono al Chirurgo nelle presentazioni del feto per la spalla, ricorda l'uso della decollazione, che eseguivasi mediante un Uncino tagliente nel margine concavo. (4)

Questo Uncino fu, molto di poi, modificato dal *Levret* e pure dall' olandese *Wan-horne*, il quale, a detta del chiarissimo *Balocchi*, lo ridusse alla sua più semplice espressione. (5)

L' Inglese *Ramsbotham*, padre, fece costruire un' Asta lunga e robusta, terminata alla sua estremità inferiore da un manico in legno, la parte superiore della quale

(1) Nella traduzione d' Ippocrate del *Littré*, Parigi 1853, Tom. VIII, pag. 481, vi si legge al § « Foetus mort, excision, ferræment dont on arme le pouce »... Le pouce est armé d' un ferrement pour separer les epaules du cou.

(2) Vedi, Hyernaux. « Traité pratique de l' art des accouchements ». Anno 1866, pag. 845

(3) A bella opportunità mi piace ricordare che il Langenbeck e Giuseppe Corradi, in alcune gravi chirurgiche operazioni, si giovano d' un *ditale* per tenere aperta la bocca de' loro operandi; aggiungo che l' illustre nostro Rizzoli ne ha pur esso uno analogo a quello del Didot, e se ne vale in alcune circostanze dopo l'operazione della cistotomia, siccome rilevasi dalla sua Memoria inserita nel *Bullettino* di questa Medico-Chirurgica Società, fascicolo di Gennaio 1879, pag. 25. La prima falange però del suo *ditale* è più lunga e nella sua faccia palmare v' è incavata una solcatura la quale s' adatta al conduttore, e sicuramente così percorre la strada per entrare in vescica, e pe' commendabili fini da Lui annoverati.

(4) Vedi, Celso, Libro VII, Cap. XXIX. Lugduni Batavorum, apud Sam. et Joan: Luchtmans 1875, pagine 412, 413. Per avere un' idea degli strumenti antichi si consulti il Sorano che ha un suo « Uncinus attractorius curvatus », e l' Albucasis.

(5) Vedi, Balocchi. Ostetricia ecc., 4.ª edizione. Milano 1871, pagina 783, che ne reca anche il disegno.

è curva a modo d' Uncino, ed in essa curvatura, nel suo bordo superiore vi fece scorrere una lama molto tagliente. (1)

Lo *Jacquemier*, imitando quest' idea, pose due coltelli embriotomi nella curvatura del suo Uncino; lame che rimangono nascoste in una guaina; così il *Simpson.* (2) Questi strumenti, conviene far conoscere che possono servire e come Uncini e come mezzi taglienti.

Anche il *Davis*, (3) pensò ad un coltello nascosto conformato pur esso a due branche, le quali s' articolano fra loro siccome il forcipe Inglese.

Venne indi il *somatomo* nascosto di *Baudelocque,* nipote, descritto e figurato dal *Boppe* (4) ed il decapitatore di *Luigi Concato,* il quale, alloraquando era, com' ei lasciò scritto, maestro in Ostetricia, il 16 Gennaio 1857, presentò alla Società dei Medici in Vienna, (5) un istrumento a forma d' Uncino smusso e cannellato, composto d' una lama tagliente e convessa e d' una guaina mobile; la lama tagliente è spinta dal basso in alto nella cannellatura dell' Uncino mediante un' asta terminata in basso da una vite. Si afferra il collo del feto fra l' Uncino e la concavità della guaina, poscia si fa montare in alto la lama tagliente sul collo per sezionarlo. Questo strumento, di cui presento il disegno, (Vedi Tav. 1.ª, Fig. II) al dire degli Ostetrici (6) stringe il collo, ma non vale a troncarlo.

Anche lo *Scanzoni* (7) ha un suo decapitatore, composto d' un Uncino cannellato e d' una lama tagliente, che agisce a mo' di Leva di primo genere; ma non riesce bene perchè la forza s' esercita sopra un cortissimo braccio di Leva, e la resistenza sopra uno assai lungo.

Pure il nostro *Massarenti* fece costruire un *vertebrotomo* a forma d' Uncino che ha dentro di sè una spina, la quale termina con un *esfogliatore* ed ha connessa una vagina scorrevole che deve chiudere il vuoto spazio lasciato dall' Uncino e difendere così le parti materne nell' atto dell' operazione. (8) Questo *vertebrotomo*, in pratica, pare che non sia interamente riuscito al suo fine, in quanto che (lo dirò colle parole del suo egregio Assistente e mio carissimo cugino e collega Dott. *Leopoldo Golinelli*, non avendo io particolare conoscenza dello strumento): „ la strettezza

(1) Vedi, Ramsbotham. « The principle aud practice of ostetric medicine aud surgery ». London 1841. Aggiungo che in Inghilterra Roberto Lee fu partigiano pur esso della decollazione che eseguiva con un comune coltello lungo e tagliente.

(2) The Obstetric Memoirs aud contributiou. Edimburg 1855, pagina 153.

(3) Vedi, Davis. « The principles of Practice of Obstetric Medicine ». London 1841.

(4) Vedi, Pierre Thomas, op. cit., che alla pagina 24, in nota, dice la tesi di Boppe essere stata stampata a Parigi nel 1833. Il Velpeau afferma invece che la tesi stessa del Boppe fu pubblicata nel 1826; locchè ho verificato erroneo.

(5) Vedi, *Gazzetta Medica Italiana*, Lombardia, n. 19 delli 11 Maggio 1857, pagina 153.

(6) Vedi, Lazarewitc. Cours d' accouchements. Charkou 1879, V. 2, traduzione dal Russo.

(7) Vedi, figura e descrizione nel Wüzburger medicinische Zeitschrift. Würzburg 1860, pag. 172.

(8) Vedi, Massarenti. *Bullettino delle Scienze Mediche di Bologna*, Serie V, Vol. I, pag. 36, e Corradi Alfonso, dell' Ostetricia in Italia dalla metà del secolo scorso fino al presente; Commentario ecc. Bologna 1874, pag. 768.

della lama esfogliatrice, la quale divide bensì in piccolo tratto le parti molli del collo del feto, penetra nelle ossa vertebrali, le rompe, le frattura, ma l'apertura fatta riesce sempre di un piccolo diametro e non giunge per questo a dividere totalmente la colonna vertebrale col suo apparato legamentoso, di guisa che fallisce lo scopo dell'operatore. „ (1) L'egregio *Golinelli* ne loda però l'idea e crede possibile nello strumento una modificazione tale da renderlo atto a compiere per bene l'opera sua.

Finalmente noterò lo *endotomo* del *Mattei*, (2) l'*embriotomo* di *Tarnier* e di *Lazarewitch* (3) non che il *fetotomo*, molto ingegnoso ed utilissimo in pratica, del *Rizzoli* (4), che consiste in un coltello a punta ottusa, la di cui lama nel suo margine tagliente è ricoperta da una guaina, la quale mediante un bottone può essere condotta entro il manico per quel tratto che si desidera rimanga essa all'infuori. Introdotto il coltello in vagina col tagliente ricoperto dalla guaina, viene esso posto contro la parte fetale che si vuole incidere; allora ritirata la guaina quanto può occorrere perchè rimanga scoperto il tratto di tagliente che nella circostanza speciale può abbisognare, collo stesso si eseguisce l'incisione che si desidera; ciò ottenuto, si difende nuovamente il tagliente scoperto della lama spingendo in alto la guaina, ed allora se ne ritira con sicurezza il coltello. (5)

Fin qui de' più valutabili Uncini schiacciatori, taglienti, e vertebrotomi a lama tagliente; ora farò accenno di quelli a sega, e credo, se non erro, di poter affermare che il primo di questo genere lo facesse costruire il già da me nominato *Jacquemier* nell'anno 1861, ed è un Uncino entro del quale si muovono due seghe, l'una per tagliare, l'altra per sezionare la colonna vertebrale; (6) quest'Uncino è stato molto encomiato dall'illustre *Tarnier,* il quale così ne parla: „ De tous les instruments á rachiotomie, le crochet de *Jacquemier* est le plus parfait. Malheureusement cet instrument est assez compliqué et d'un prix elevé. „

Poscia viene l'Uncino sega di *Vander Eecken,* formato di due tubi protettori le parti materne, e di una sega a catena, descritto e riprodotto da *Hyernaux,* opera citata, alle pagine 896 e 897; l'altro di *Kilian* (7); l'Uncino sega *Mathieu;* quello del lodato *Tarnier;* i quali tutti fra loro hanno molta analogia e le differenze non le dirò certo sostanziali sì bene d'apparenza.

(1) Vedi, *Bullettino delle Scienze Mediche,* fascicolo d'Agosto 1872.

(2) Vedi, Mattei. Memoire sur des nouveaux instruments pour opérer l'embryotomie. *Bull. de l'Acc. de Medicine de Paris,* 1864.

(3) Vedi, Thomas, op. cit.

(4) Vedi, Collezione delle sue Memorie pag. 480, V. 2.

(5) Meritano anche considerazione le forbici embriotome dell'Asdrubali, dello Smellie, del Dubois e del Rizzoli; queste ultime sono assai lunghe e curve nel piatto. (Vedi Dubois, embryotomie. Dict. de Med. t. XI, 1835, e Rizzoli, collezione delle sue Memorie, op. cit.)

(6) Vedi, *Bull. de l'Acc. de Médecine de Paris,* pagina 157 dell'anno 1861.

(7) Nell'Armamentorim Lucinae novum. Bonn 1856, Tav. XLV, Fig. 1.ª è rappresentato l'uncino del Kilian.

Furonvi Ostetrici i quali invece della sega pensarono d' adattare ai loro Uncini, delle funicelle di seta o di canepa, e pare ne fosse primo lo *Heyerdahl* di Bergen in Norvegia, come risulta esaminando il periodico „ The Dublin Quarterly Journal „ delle Scienze Mediche, Maggio 1871. V' è detto precisamente che lo *Heyerdahl* inventò questo meccanismo fino dall' anno 1855, e si compone d' un' asta metallica pervia, impiantata in un manico, lunga 35 centimetri; l' estremità superiore n' è curva a formare circa un terzo di circolo. Si passa nello strumento un filo metallico e vi si fa un nodo che chiuda l' orificio superiore del tubo; questo filo è spinto fuori dell' asta per mezzo d' un bottone che scorre nel manico. Passato che sia l' Uncino attorno il collo del feto, si fa sporgere il filo metallico ed a questo vi si aggruppa una funicella di canepa; *sverzino*. Indi si ritira lo strumento e così lo *sverzino* rimane attorno il collo del feto; con moti di va e vieni lo si distacca dal corpo.

Ammisi in modo dubitativo che questo metodo fosse stato usato primamente dal norvegino, in quanto che taluno ritiene, e con non disprezzabile fondamento, che se ne giovasse invece innanzi tutti *Filippo Boyer;* tal' altro il *Braun.* (1)

Certa cosa però si è che la divulgazione di questo processo la si deve attribuire al *Pajot* più che ad altri; ed è incontrastabilmente noto il suo Uncino, il quale, massime in Francia, è presso che da tutti adoperato. (2)

Questo processo degli Uncini portalacci o funicelle, fu imitato da *Faye,* da *Hoffmann,* da *Mathieu,* da *Vaust* di Liegi, (3) (Vedi Tav. 1.ª, Fig. III) e dal nostro egregio ed onorevole collega il Dott. *Belluzzi* (4); i quali tutti diedero alla pratica congegnature a loro particolari per attorniare il collo dei feti morti e distaccarne

(1) Vedi, Braun. Trattato completo d' Ostetricia, tradotto da Giustino Mayer. T. 3, pagina 193, del 1825.

(2) Intorno questo proposito è degna d'essere conosciuta una Lettera del Pajot scritta allo spettabile dott. Leblond, secretario degli « Archives generales des Medicine, Paris 1865 » nella quale dopo essersi lamentato della critica fattagli da un Belga, che non nomina, autore di un Trattato d' ostetricia, *arrichito* di descrizioni ecc., dichiara: « Si Ph. Boyer m'a devancé dans l'emploi de la *serscission,* je recueillerai du moins la gloire d' avoir fait une decouvert dont la priorité, cette fois, ne saurait m' être contestée par personne. J' ai decouvert votre Traité d' accouchements *enrichi* une parle. » Da questa satirica espressione se può dedursene che il Pajot si tenne offeso di sapersi dall'anonimo postergato al Boyer, si può tuttavia desumerne che forse non aveva sufficienti ragioni da sostenere il suo assoluto primato; quindi su ciò rimane un' incertezza, la quale non è affatto allontanata.

(3) Il Vaust adoperava dapprima il suo *crochet mousse* unicamente per abbassare il feto, applicandolo alle inguinaglia e portandovi un laccio; dopo se ne servì eziandio a portar mezzi detroncativi sul collo del feto, sicchè fuvvi aggiunto l' appellativo di Uncino decollatore. — Mi sono interessato di questi particolari perchè io pure, con qualche altro scrittore di cose ostetriche, aveva dichiarato nella citata Memoria sulla mia Leva articolata decollatrice, che il Vaust aveva pur esso fatto costruire un *Uncino articolato;* la qual cosa non è a secondo del vero. Ho voluto quindi correggere l' errore, ed a maggiore convincimento ho portato eziandio il disegno dell' Uncino ottuso del Vaust, che mi procurai da Liegi. Si vegga anche il *Journal des Sciences Medicales de la Societé R. de Bruxelles, cahier d'Avril, 1853.*

(4) Vedi, Belluzzi. *Bullettino delle Scienze Mediche* di Bologna, Serie V, Vol. 15, pag. 366.

le teste, e ciò nelle circostanze in cui è necessario ricorrere a tale grave operazione; congegnature che sono note e ricordate con lode e riportate con figure in Opere classiche di Ostetricia; laonde non trovo motivo di venirne ora ad una particolareggiata descrizione, bastandomi per la Storia d' averle debitamente menzionate e poste nel gruppo che loro spettava.

Toccherò bensì appena di sfuggita, e presento anche il disegno, d' un istrumento decollatore del Dott. *Chiarleoni* (Vedi Tav. 1.ª, Fig. IV) perchè si differenzia alquanto dagli altri. Consiste in una cannula Uncino, foggiata ad un dipresso come il decollatore di *Braun,* la quale è tronca verso il suo estremo uncinato, e precisamente lungo la parte discendente della curva, dove si adatta un pezzo d'acciaio pieno, che è tenuto in posto, fisso ed in giusto rapporto colla cannula, da una funicella di canepa, o di seta, la quale passando in un anello praticato nella porzione invaginata del pezzo da rimettersi, viene a fissarsi ad una tacca posta nell' estremo libero della cannula-uncino stessa. Il pezzo rimesso s' invagina nella cannula mollemente per modo che con tutta facilità può essere staccato da questa ed il suo capo libero è foggiato a bottone lievemente rigonfio e rotondato. (1).

Anche il lodato *Golinelli,* nella citata sua dissertazione, propose pel decollamento del feto l' uso d' alcuni fili ritorti di ferro o di rame ricotto, servendosi d' un comune serranodi, oppure dell' aiuta-forcipe del *Joulin,* e potè accertarsi che ambidue quei fili sono sufficienti a distaccare il tronco fetale e ne fu molto encomiato dall' illustre nostro e compianto Prof. Comm. *G. B. Fabbri* che assistette a diverse sue esperimentazioni. Debbo aggiungere sì bene che il *Golinelli*, molto assennatamente e prudentemente, modificò il becco dell' aiuta-forcipe *Joulin*, procurando che i suoi margini acquistassero una certa grossezza e fossero bene arrotondati per facilitare l' escursione dei fili metallici entro il medesimo e per togliere la causa più comune della loro rottura. (2)

Pur tutto questo avendo posto in sodo, m' incombe successivamente di rendere manifesto che furono inventati eziandio degli apparecchi misti per eseguire la decollazione e cioè: embriotomi-coltelli, i quali possono servire anche come embriotomi-sega, valga ad esempio l' Uncino di *Hubert* di Lovania; ed embriotomi a cui si possono ben anco adattare *sverzini,* oppure fili metallici.

Sonovi finalmente Uncini che agiscono per pressione e dilaceramento, come l' *auchenotomo* di *Carlo Braun* (3) modificato dal *Lazzati,* ed altri ne' quali v' è stata collegata una funicella che vale a separare del tutto le parti già schiacciate. Que-

(1) Chiarleoni. Sei casi di decollazione preceduti da poche riflessioni su cotale operazione. Pagine 20 e 21; Torino 1876.

(2) Anche il Barnes, ha uno schiacciatore a filo metallico e se n' è servito non solo per amputare facilmente il braccio del feto fuori uscito dall'utero, ma eziandio per decollarlo. (Vedi pag. 108, op. cit. del Thomas).

(3) Vedi, Braun. Compendium der operativen gynoekologie und Geburts Kunde, Wien 1866, pagina 108.

st' ultimo processo è recentissimo ed il relativo apparecchio fu presentato nella Seduta del due Aprile 1879 alla Società di Chirurgìa in Parigi dal più volte nominato chiarissimo *Tarnier,* chirurgo capo di quella Maternità. Ne è inventore l'egregio *Pierre Thomas,* che nella sua citata Opera alla pagina 128 ne porge anche la figura; mi compiaccio di riprodurla (Vedi Tav. 1.ª, Fig. V) per estenderne in Italia la conoscenza e perchè l'apparecchio offre, a detta del suo inventore le seguenti utili particolarità che trascrivo: „ En resumé, notre méthode mixte d' embryotomie nous parait avoir sur celle de *Braun* les avantages que: 1.° les parties maternelles ne risqueront pas d' être lésées soit par le crochet, soit par la ficelle scie; 2.° l' operation sera moins penible pour la femme et pour l' accoucheur; ella sera plus et plus rapide. Les trois experiences faites sur le fontôme par les éléves de M. M. *Budin* et *Champetier* de Rèbes, ont trés-bien reussi. „

Annoto pure che il *Valle* nella sua Opera d' ostetricia (Volume 3, del 56) si giovò d' Uncini a mo' di forcipe, affinchè la testa oltre che d' essere afferrata, come dice il nostro celebratissimo *Alfonso Corradi,* op. cit., fosse anche compressa o potesse meglio passare per lo stretto del bacino; v' ha eziandio annoverato il *divisore cefalico* del *Joulin,* il quale però, a mente anche del *Balocchi,* op. cit., non pare sia molto da raccomandarsi ai pratici, pella cattiva riuscita che fece in mano del suo medesimo Autore; il quale d' altronde candidamente affermò d' avere traforato l' utero in un caso in cui l' applicò.

Di presente, a completare la mia disamina e quindi condurmi al termine di questo mio studio, non mi rimane che di far accenno di coloro, i quali pensarono e riuscirono sì bene a far costruire Uncini decollatori ch' avessero la proprietà di potersi articolare e possedessero il massimo, assoluto, incontestabile vantaggio d' essere insinuati retti, ed indi d' assumere una curva a guisa d' Uncini; la quale idea madre, come dichiarai altra volta, mi pare e la confermo davvero, la perfezione del meccanismo pel fine a cui si vuole giungere; tutto ciò per la facile ragione che di tale maniera possono essere introdotti questi strumenti in parti molto ristrette e fra le quali non potrebbero di certo insinuarsi od applicarsi Uncini stabilmente curvi, avessero pure una minima curvatura.

Ebbene, su questo terreno forse le mie osservazioni addivengono più interessanti, in quanto che rettifico cose non ancora, ch' io mi sappia, ben determinate.

Nell' antica, ma classica Opera del *Paré Ambrogio,* del XVI secolo, sventuratamente forse perchè antica poco consultata se bene tradotta da *I. F. Malgaigne* nel 1840, edizione di Parigi, ho trovato alla pagina 704 descritti due Uncini curvi ed uno appuntito; ve n' ha tuttavia disegnato, ed io Ve lo presento Signori (Vedi Tav. 1.ª, Fig. VI), un quarto che s' articola come le forbici, o meglio come qualche forcipe, e se ne valeva il *Paréo* per afferrare il collo del feto e schiacciarlo non solo, ma ben' anco per abbracciarne talvolta la testa rimasta che fosse entro l' utero, stringendola fra le branche, le quali, superiormente, sono formate a sette, e così l' estraeva.

Il *Kidd,* (1), colla mira di penetrare fra parti assai ristrette, pensò di giovarsi d' una sciringa elastica, munita del suo *mandarino* ed indi piegarla a tenore dei casi e con questa scorta guidar poi una funicella. Rimane ben chiaro che questo mezzo non può nel maggior numero delle volte riuscire.

Eziandio il *Delore* nella Sessione del 2 Luglio 1878, all'Accademia di Parigi presentò un Uncino a lama flessibile, come di fioretto, lunga 30 centimetri, al fine di poterla poi curvare in varii sensi; se ne vede il disegno alla pagina 680 del „ Bulletin de l' Accademie de Medecine, n. 27 „. Or bene, nell' antico strumento del *Paréo* e nei recenti del *Kidd* e del *Delore,* se non m' inganno, parmi di scorgere ideati dei tentativi di giovarsi: nel primo, d' una articolazione; negli altri di ordigni elastici, molto imperfetti però, da applicarsi retti ed indi tentarne una flessione. Imperfezione a dir vero poco compatibile negli ultimi nominati Ostetrici perchè mostra che non erano dessi al corrente de' progressi già fatti in proposito dalla Scienza pur da loro professata e come risulta da quanto scendo ad esporre.

Per fermo, il chiarissimo Professore di Clinica ostetrica di Liegi, *Adolfo Wasseige* (al quale m' è caro dichiarare da questo luogo dato alle Scienze, che Gli sono unito con particolari vincoli d' altissima stima e di amicizia, e ne feci di Lui onorevole menzione anche nella mia Memoria sulla Leva) aveva inventato e reso di pubblica ragione fino dall' anno 1864 un Uncino articolato decollatore, al quale nel 1876 arrecò modificazioni e principalmente cercò di rendervi meno prominenti i rialzi che si formavano nella parte superiore ed esteriore, massime quando era curvato, e come avvisai in quella mia istessa Memoria e come risulta dalla figura che ne presentai. Rialzi che non potevano a meno di arrecare disturbo e danno all' operanda, i quali ora per le recatevi modificazioni sono resi meno sensibili (Vedi Tav. 2.ª, Fig. I); m' auguro però che ciò non sia a scapito della necessaria robustezza negli articoli di cui si compone lo strumento medesimo; il quale è ritenuto a tutt' oggi il migliore di questo genere.

Poscia viene lo *Stanesco* che nel 1869 fece costruire un tubo terminante con dodici falangi mobili che s' articolano stirando una sega a catena la quale trapassa l' interno dello strumento, ed allora acquista la forma uncinata; ritirando il tubo, rimane attorno al collo la sega or detta, e così s' eseguisce la decapitazione. (2)

Pur pure il Dott. *Michele Scibelli* di Napoli, nell' anno 1873, pubblicò un articolo che ha per titolo: „ Estrazione del feto vivo o morto con un nuovo Uncino ostetrico articolato acuto-ottuso „ e di questo ne porse eziandio la Figura ch' io riproduco qui nella Tav. 2.ª, Fig. II, anche perchè si vegga la molta rassomiglianza che offre con un antico e poco conosciuto strumento d' un egregio nostro collega di Toscana, al quale, e credo giustamente, attribuisco il *primato in genere* dell' attuazione d' un Uncino che si articolasse e come tra breve accennerò.

(1) Vedi, *The Dublin Medical Journal, may 1871.*

(2) Vedi, pagina 88, opera citata del THOMAS.

Eziandio lo *Hyernaux* di Bruxelles, anch' esso nell' anno 1875, imitando gli antecessori e giovandosi in ispecie del meccanismo della mia Leva articolata, (Vedi Tav. 2.ª, Fig. III), fece costruire un Uncino che si curva, di cui ne offro medesimamente alla Tav. 2.ª, Fig. IV, il disegno. (1)

A compiere l' esposizione degli Uncini articolati decollatori non rimarrebbe adesso che a descrivere e presentare il mio nuovo istrumento e così sdebitarmi inverso di Voi e dei Colleghi tutti della impromessa che or sono cinque anni ne feci.

Trovo però necessario di rendere prima manifesto, a comprovare il primato che dissi poco sopra appartenere ad un nostro collega d' Italia relativamente agli Uncini ostetrici articolati, il dimostrare che spetta adunque al Dott. *Giambattista Bellini*, toscano, Chirurgo ed Ostetrico rinomatissimo nell' Arcispedale di S. M. Nuova di Firenze. (2)

Di vero, esso nell' anno 1847 pubblicò una Memoria che porta per titolo: „ di un Nuovo Oncino articolato per estrarre le teste voluminose dall' utero e dalla scavazione

(1) Sopra questo Uncino veggasi la mia Nota inserita nel *Bullettino* nostro delle Scienze Mediche, fascicolo di Settembre 1875, e gli *Annales de la Societé Medico-Chirurgicale de Liege, cahier d'Aout et Septembre*, pag. 306, ed ancora il *Giornale della Società Medico-Chirurgica* di Bruxelles, Ottobre anno medesimo; non che la pagina 380 e successive dello stesso Giornale e sempre dell' anno 1875.

(2) A bella e sicura addimostrazione della sua molta abilità e del suo sapiente chirurgico ardimento, toccherò di sfuggita che il 27 Giugno 1828 esportò dalle vie naturali in certa Ravanello quasi per intero l' utero e con esito felicissimo; chè la donna dopo 43 giorni dall' operazione uscì guarita dallo Spedale di Rovigo, ove il Bellini in quel tempo era Chirurgo Primario. Il pezzo scirroso tagliato fu della periferia di nove pollici e lo si conserva nel Museo d' Anatomia Patologica di Firenze a cui lo porse in dono, accompagnandolo con Lettera in data 15 Luglio 1828; fin d' allora aveva adoperato il suo Oncino articolato. Di questa sua importantissima operazione ne diede poi esatto conto in una erudita Memoria che lesse nella Seduta del 3 Settembre 1829 alla nostra Medico-Chirurgica Società. Memoria intitolata: « Estirpazione parziale d' un utero scirroso, idropico e collegato colla vescica orinaria, formante ernia nascosta nel canale vulvo-uterino, 1829 » e che fu inserita negli Opuscoli della Società stessa, Vol. VII, pagina 43 e seguenti dell' anno medesimo, corredata d' una Tavola addimostrativa. In esso lavoro tessè fedelmente pur anco la storia generale di que' Chirurghi i quali ebbero innanzi a Lui il nobile coraggio di levare porzioni od anche tutto intero l' utero, e per primo cita il Wrisberg di Gottinga che l' attuò nel 1787. (Commentatio de Uteri mox post partum naturalem resectione non laetali; Göetting). Annovera indi il Monteggia che la suggerì fino dall' anno 1794 e l' Osiander che la mise in pratica il 5 Maggio 1801 per cancro dell' utero asportandone il collo; dice che il Langenbeck estirpò l' utero dall' ipogastrio e con esito prontamente letale; non tace, finalmente dirò, il caso dell' Ostetrico di Guy' s Hospital, il Blundel; il quale, pochissimo tempo innanzi a Lui, e cioè nello stesso 1828, felicemente levò per intero l' utero ad una donna, risanandola; unico caso, Ei nota, di totale estirpazione di questo viscere coronata da buon risultamento. — Pongo poi da ultimo, per opportuna avvertenza sul proposito, che l' egregio collega di Torino, Giuseppe Prof. Berruti, il quale accolse ed immediatamente pubblicò nel suo Giornale l' *Indipendente*, fascicolo 33.° del 25 Novembre 1879, la comunicazione epistolare del Braxton-Hicks, che Gli ricorda il Blundel, forse per temenza dimenticasse di annoverarlo fra i primi Chirurghi che eseguirono l' estirpazione della matrice, sarà ben pago di poter rispondergli nel suo promesso lavoro sull' *isterovariotomia cesarea*, che la cosa era da noi ben conosciuta e che da tempo non breve un confratello Italiano aveva a quell' Inglese attribuito lealmente il merito della estirpazione totale dell' utero e con esito felice, e questi fu Giambattista Bellini di Toscana emulo di lui.

del piccolo bacino, ed anche le teste normali ove sia difetto dei diametri, degli strati, attaccate al feto o disgiunte „ e la dedicò, unitamente al disegno del suo strumento, all' Accademia Giuseppina di Vienna.

Nell' anno 1850 la ripubblicò in Firenze, ed in seguito di pazienti ricerche mi venne fatto, coll' aiuto del ragguardevole Collega Prof. *Augusto Michelacci,* Direttore degli Stabilimenti Ospitalieri riuniti di quella dotta e gentile città, d' avere nelle mani la ricordata Memoria, la quale fa parte di una Miscellanea, esistente nella Biblioteca di esso Spedale, nel Volume 167; di che ne so e ne saprò a Lui perenne gratitudine.

Ho la grata soddisfazione impertanto di presentarvi oggi, Signori, il disegno dell' Uncino articolato del *Bellini,* (Vedi Tav. 2.ª, Fig. V), e tuttavia, in nota, la descrizione di esso che tolgo dalla sua stessa Memoria. (1).

Pel che incontrastabilmente ne discende che il *primato in genere* dell' avere fatto costruire un Uncino articolato ostetrico, appartiene al nostro *Bellini*, e sono ben lieto d' avergli potuto in forza di favorevoli circostanze rivendicare questo merito. Sento però il debito di dichiarare che Esso si giovava del suo istrumento più particolarmente per eseguire l'estrazione parziale o totale dell'utero, o delle teste fetali rimaste nel suo interiore, e ciò fino dall' anno 1828, unendovi al bisogno anche il suo cucchiaio tagliente e distaccante; mentre l' illustre *Wasseige* francamente pose, e pel primo, nelle mani de' Chirurghi Ostetrici il suo Uncino articolato a giovarsene *particolarmente* per dividere il capo dal tronco del morto feto entro le viscere materne; di che ne riscosse giuste lodi, le quali non Gli ponno certo venir meno per la storica

(1) « Il nostro Oncino doppio articolato è composto precipuamente di due mezzi cilindri (Figura V e VI) lunghi dieci pollici circa, che riuniti per un pernio verso la metà, compongono un solo cilindro, fissato inferiormente in un manico (Figura I e II) portante superiormente un corpo rotondo articolato, dalla faccia anteriore del quale (Figura III, lettera *L*) spuntano due rampini a sufficiente distanza fra loro, i quali alloraquando si vogliono porre in azione s' elevano con alzare una cannula (Figura VII) che fascia tutto il detto cilindro, nella quale questo scorre (Figura I e II): e si mantengono elevati con ispingere in alto un pomoletto che trovasi presso al manico (Figura I, lettera *B*), il quale innalza uno stile (Figura VI) trascorrente nell' interno del mezzo cilindro destro (Figura detta). Infissi poi che essi rampini siano nell' oggetto che s' intende estrarre, ritirasi in basso la cannula, indi il pomoletto conducente lo stile (Figura VI e V, lettere *L R*) ed in facendo questo, scatta e volge allo ingiù (Figura II) per una molla nascosta nel mezzo cilindro sinistro (Figura III, lettera *H*) il corpo rotondo (Figura III, lettera *L*) e conseguentemente volgono allo ingiù anche i rampini (Figura II), i quali per mantenere immobili in questa pronazione, hanno d' uopo che venga spinto in alto nuovamente il suddetto pomoletto, il quale, obbliga come dicemmo già, lo stile (Figura VI) a portarsi in su e fissa, in qualunque posizione trovisi, il corpo rotondo oncinato detto. Così, a presa fatta, reso immobile il ridetto strumento, può il chirurgo con sicurezza ripromettersi che verrà, senza accingersi alla perforazione della testa ed allo spappolamento del cervello, ad operare l' estrazione. Nasce qualche accidente per cui convenga meglio sospendere? si libera il corpo rotondo uncinato con tirare a sè cannula e stile (Figura V, lettera *S T*), indi si rialzi il detto corpo rotondo uncinato, collo spingere all' insù la detta cannula e mantengasi in quest' ultima posizione elevata il ridetto corpo rotondo uncinato col premere in alto, col mezzo del pomoletto lo stile (Figura II, lettera *G V*) che di sì fatta guisa l' uncino è bell' e rimosso, ha già lasciata la presa, ne esce. »

osservazione che in onoranza d'un egregio connazionale ho avuto la bella opportunità di pubblicare.

Ora alla perfinita fommi a descrivere l' Uncino ostetrico articolato che mi appartiene e dirò in succinto che: si compone d'una robusta asta metallica, rotonda e pervia internamente, grossa come il mignolo della mano d'un adulto; la quale asta s' impianta ed attraversa un manico d' ebano quadrangolare e n' esce a forma di vite all' estremità sua inferiore per circa due centimetri. Su di essa porzione a vite vi s' innesta un pomo mobile, a due prolungamenti laterali, al fine d' agire su di esso con sicurezza e facilità per le ragioni che vengono poc' appresso.

L' istrumento (di cui presento il primo esemplare in acciaio, non che il disegno Vedi Tav. 2.ª. Fig. VI, Lettera *A)* è lungo cent. 40; ventinove l' asta, undici il manico, e nel centro di questo d' ambo i lati maggiori, che sono piani, vi si trova un indice indicativo la curva dell' Uncino qualmente è applicato. Nella faccia poi interna, superiormente, a due centimetri dall' inserzione metallica, v' ha un forame ovalare dal quale esce uno *sverzino,* lungo circa 80 centimetri che si può a piacimento attorniare sul manico medesimo.

Il mio Uncino è retto, meno una dolce e quasi insensibile piegatura verso la sua estremità, la quale termina con nove articolazioni, o falangette, l' ottava delle quali è appunto un po' curvata, e ciò per facilitare l' introduzione dello strumento; chè se fosse affatto affatto retto, facilmente potrebbe ben anco urtare contro le pareti fetali o materne e danneggiarle; n' ebbi prova non dubbia la prima volta che esperimentai sul cadavere con un modello in ottone; pel che m' indussi a far eseguire la lieve ripiegatura dianzi accennata. L' ultima falange è fenestrata e può scostarsi dalle altre col mezzo che verrò dicendo.

Posteriormente nell' asta dell' Uncino vi si vede una molla che mediante due piccole viti rimane ferma ed incastrata nel dorso delle sette falangi inferiori, lasciando libere le altre due superiori.

Dissi che nella parte inferiore del manico esisteva un pomo con prolungamenti e ch' era movibile; ebbene, girando appunto il pomo stesso s' obbliga l' estrema parte del mio Uncino, o la composta d' articoli, a piegarsi proprio proprio come le falangi d' un dito della mano, e s' ottiene una curva uncinata, colla quale si possono esercitare eziandio delle trazioni sul collo fetale o sopra altre sue parti, quali ad esempio le inguinaglia, la bocca, le piegature al cubito ecc.

Il perchè poi l' Uncino è obbligato ad incurvarsi nella sua cima, sta in ciò che nell' interno della cannula v' ha una verga in acciaio, formata pur essa in alto ad articolazioni, ch' è ferma saldamente nell' interno del manico.

Dopo applicato l' istrumento e volendo recidere il capo del feto morto, lo si consegna nelle mani d' un Assistente qualunque, indi si cerca coll' indice l' estremità fenestrata dell' Uncino, che riscontrasi subito senza difficoltà, e colla scorta del dito già introdotto s' insinua in essa il rampino d' un asticella o guida metallica, montata sopra manico d' ebano (Lettera *B)* e si tira all' ingiù l' asticella medesima.

Allora la prima falange, ch' è aderente alla sua vicina solo mediante un' intaccatura a molla, si scosta ed esce fuori dalle parti naturali della donna insieme a porzione dello *sverzino* che v' è assicurato nella sua parte interna.

Eseguito ciò, si fa riprendere allo strumento la sua forma retta, girando la rotella in senso contrario a quello per cui s' ottenne la curvatura, e nell' estrarlo rimane in posto l' altro capo estremo della funicella e quindi attorniato con essa il collo fetale. Con movimenti alterni di va e vieni accuratamente praticati, attorcigliandosi l' Operatore un po' di *sverzino* attorno le dita, od adattando ai due capi di esso i manichi che ho fatto costruire a guisa di quelli del *Giffré* (Lettere *C C'*) in brevissimo tempo e con sicurezza e senza lesione alcuna delle parti materne si ottiene il detroncamento del collo del morto feto. Invece della funicella, ma servendosi di essa, si può, un che il voglia, far passare una sega a catena od altro mezzo meccanico attorno il collo fetale per separarlo dal tronco, servendo anche egregiamente il mio Uncino come porta lacci.

Seguendo le tradizioni della nostra Scuola relative all' Ostetricia esperimentale, che fanno capo ad *Antonio Galli,* al *Baroni,* al *Rizzoli* indi a *Giambattista Fabbri,* l' ho messo varie volte alla prova il mio Uncino sul morto corpo di donna nel di cui ventre aveva collocato cadaveri di feto a termine, procacciatimi per gentilezza del chiarissimo amico il Prof. *Ciaccio*, e postili nelle più difficili posizioni per la spalla mi riuscì sempre facile l' introduzione dell' istrumento e l' applicazion sua, non che il detroncamento del capo mediante lo *sverzino,* il quale giammai mi fallì e si mantenne saldissimo.

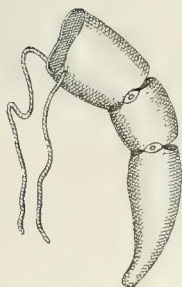
Le accennate esperimentazioni le feci nella camera mortuaria del nostro Spedale Maggiore in presenza dell' illustre nostro *Rizzoli,* dell' egregio e ragguardevole collega *Medini,* degli Assistenti dello Spedale Dott. *Giuseppe Soldati,* Dott. *Caramitti,* Dott. *Ramlot*, Dott. *Elio Galiani,* non che di alquanti studenti e praticanti, e l' esito riuscì felicemente. Per cui non dubito affermare che un risultato eguale si deve certo ottenere eziandio sulla donna viva; ed è cio che ardentemente m' auguro e spero.

A maggiore schiarimento però delle prove fatte, credo tuttavia cosa necessaria di brevemente quì descriverle.

Il cadavere era di donna sui cinquant' anni, ben conformato e conservato, morta per vizio di cuore. Aveva bacino a proporzioni normali. Aperto il ventre con taglio longitudinale, spostate in alto ed ai lati della cavità addominale le intestina; levato l' utero ed il fornice vaginale, messo un feto femmina a termine, bene sviluppato in diverse posizioni, come dirò, collocando le parti fetali nell' atteggiamento che conserva il feto alloraquando trovasi entro l' utero, si cucirono le pareti addominali e si addivenne alla prima esperimentazione.

Posizione del feto a presentazione della spalla destra a dorso anteriore.

Introdotto l' indice della mano destra in vagina per sentire le parti fetali, e trovato il collo del feto, dietro la scorta dell' indice tenuto verso la cavità cotiloidea

F. 1.

Didot

F. 2.

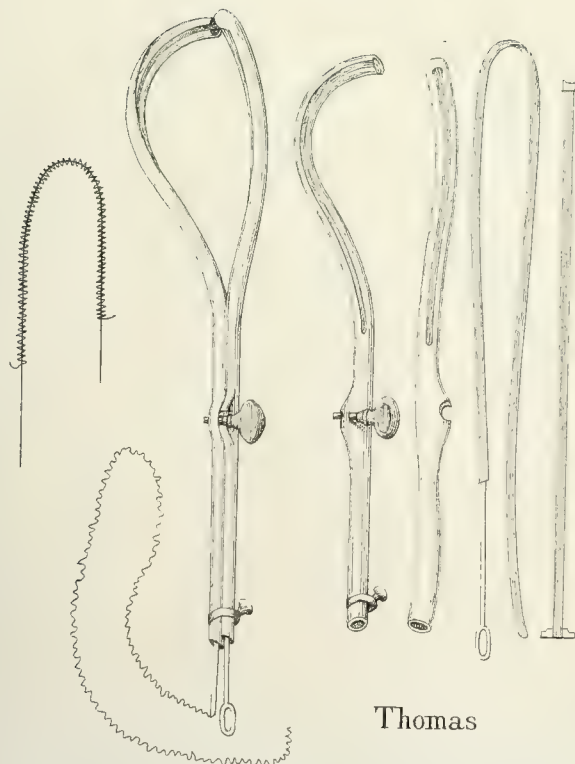
Concato

F. 3.

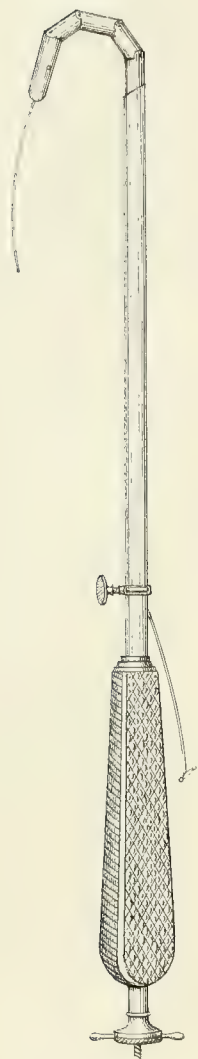
Vaust

F. 4.

Chiarleoni

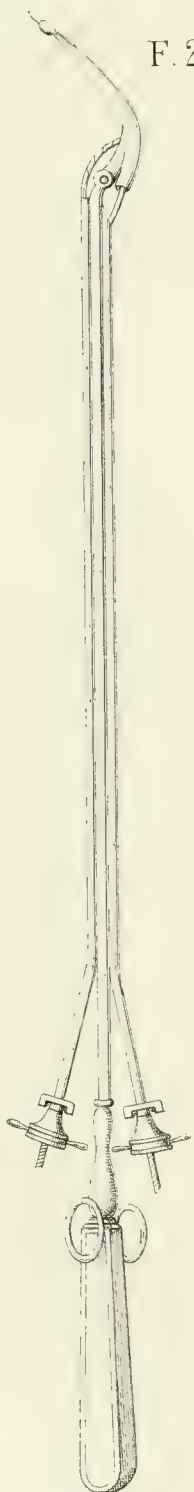
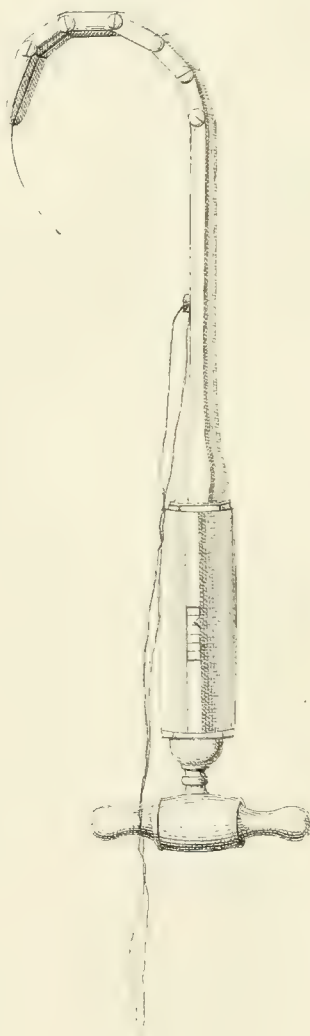
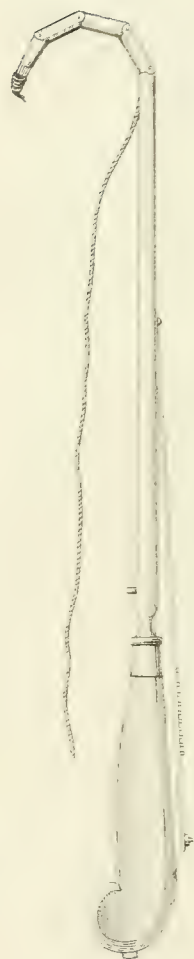
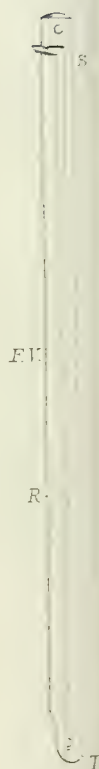
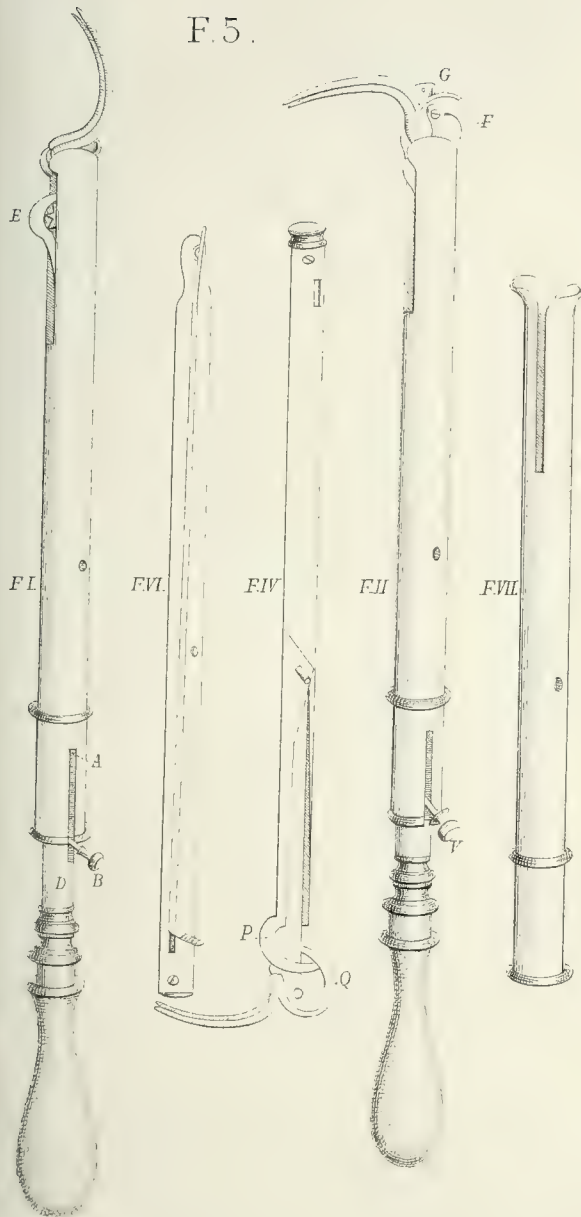
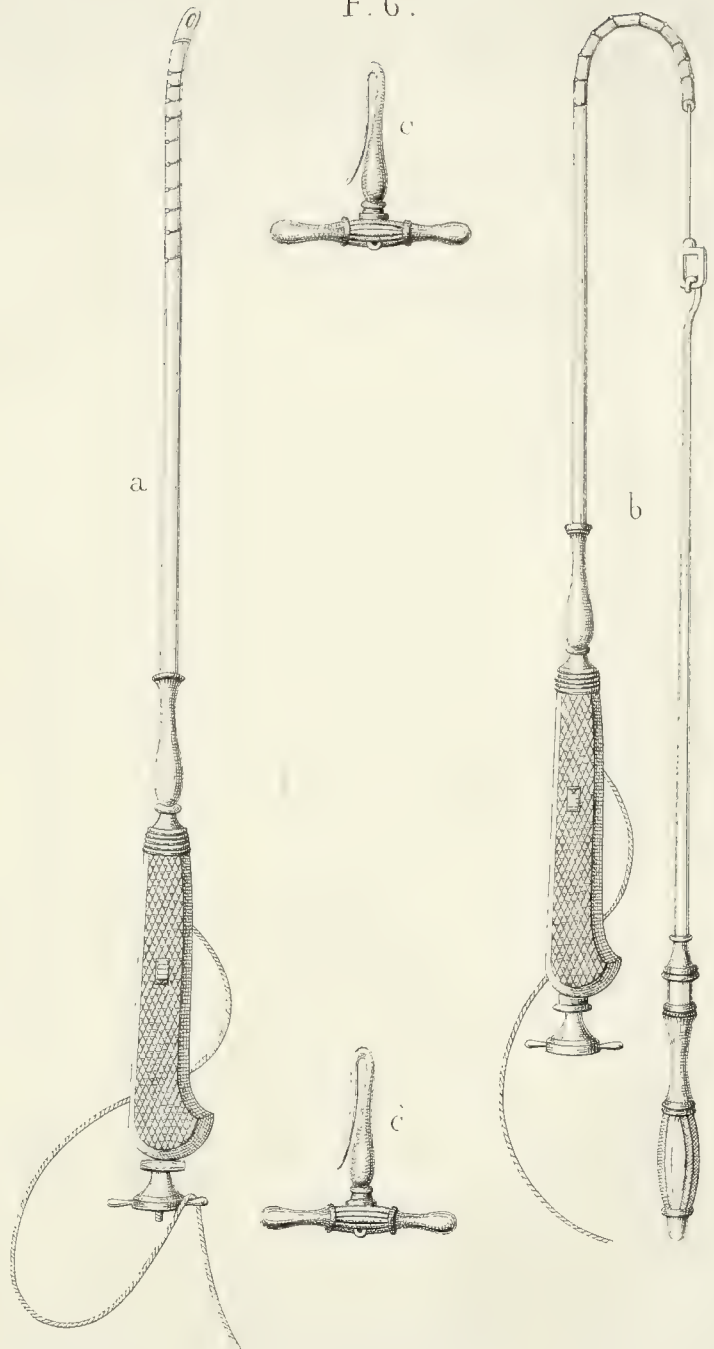
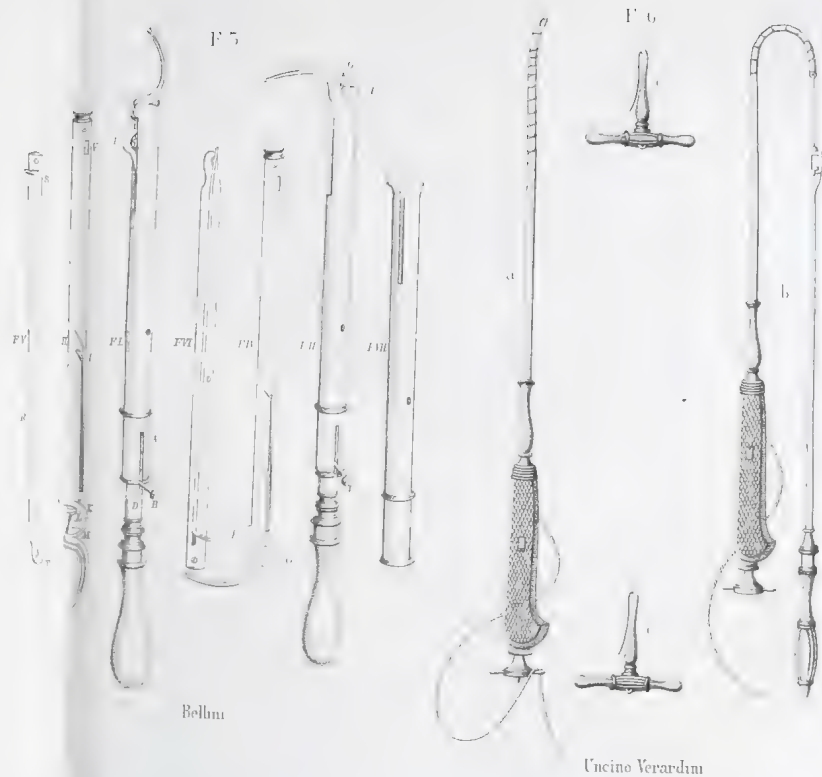
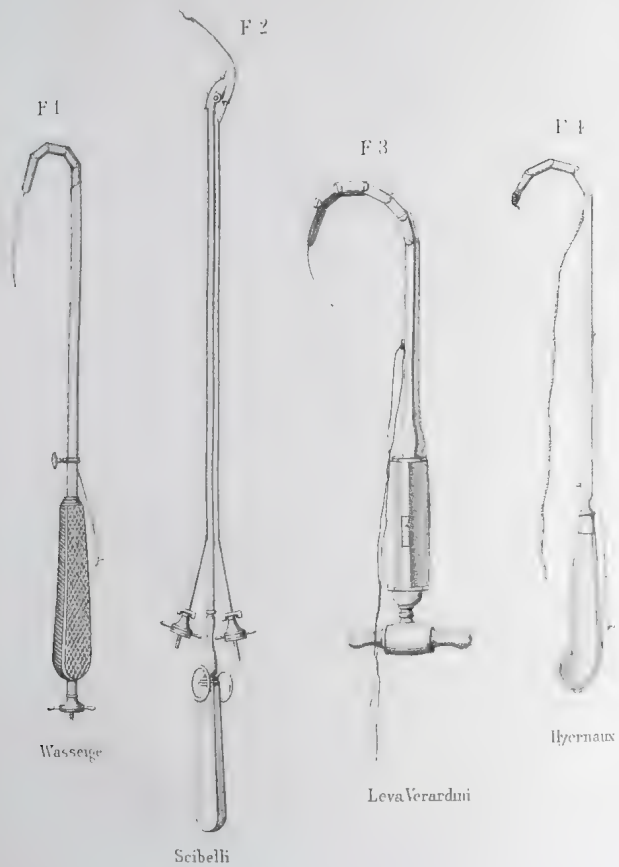
F. 5.

Thomas

F. 6.

Parè

C. Bettini inc.

Bellini

Uncino Verardini

C. Bettini inc.

destra, s' introdusse l' Uncino retto rasente la faccia palmare di esso indice e sotto il pube. (1) Arrivati alla parte posteriore del collo del feto e sorpassatala, si tenne fisso l' Uncino e si girò la rotella per curvarlo. Così si abbracciò perfettamente il collo fetale; indi s' introdusse l' indice della mano sinistra, che avvertì subito l' estremità dell' Uncino decollatore, e con lievi trazioni esercitate sul manico dello strumento si rimase sicuri della presa fatta.

Allora, affidato l' Uncino ad un Assistente, colla destra armata dell' asta a rampino, si afferrò facilmente l' occhiello della prima falange e tirando in basso la si trascinò fuori dalla vulva insieme a porzione di *sverzino.*

Raddrizzato lo strumento, si ritirò affatto, ed allora l' altro capo della funicella si presentò dall' altro lato del collo fetale. Colle dovute regole e con moti di va e vieni se ne recise prestamente il collo e lo *sverzino* trovossi intatto.

Una seconda esperimentazione fu eseguita il giorno successivo dal lodato e ragguardevole *Medini,* Chirurgo Primario in questo Spedale, presenti i già da me nominati colleghi, e riuscì pur essa felicemente.

Fu posto altro feto femmina in presentazione della spalla destra a dorso posteriore. Si tennero le stesse regole e manovre usate nella prima esperienza, colla differenza che in questo caso l' Uncino dovette penetrare fra il mento ed il petto e compiere cosi un giro opposto. Anche in questa difficile posizione l' azione dello strumento fù veramente *brillante,* come se n' espresse il chiaro Operatore.

Verificata così l' efficacia del mio nuovo Uncino articolato decollatore, riepilogo le cose principali sparse nel contesto di questo mio qualsiasi lavoro e ne deduco:

1.° che la mia Leva ostetrica articolata decollatrice massime per le modificazioni fattevi, ho fede sia addivenuta sempre più utile alla pratica, ne' casi in cui può essere raccomandata, e di averla resa più semplice, più elegante e meno costosa, una volta, in ispecie, che si voglia privarla del mezzo decollatore di cui può andare fornita:

2.° che fatta una storia generale dei precipui meccanismi immaginati fin qui per decapitare il feto morto nell' alvo materno, o mutilarlo a seconda dei casi speciali, li ho divisi in varii gruppi e cioè: Uncini acuti ed ottusi; uncini embriotomi, vertebrotomi; embriotomi a forbice, a sega; embriotomi che agiscono per pressione; embriotomi od uncini misti, cioè a pressione ed a sega; a fili metallici ed a pressione; finalmente ad uncini porta lacci, curvi ed articolati:

3.° che di questi ultimi (che sono i più importaati, a mio vedere, perchè si possono insinuare retti ed indi curvare) a seconda di giustizia ne ho, *in genere,* attribuito il primato al nostro Italiano *Giambattista Bellini,* di Toscana; il quale fino dall' anno 1828 immaginò un Oncino articolato di cui se ne serviva anche per estirpare l' utero in parte od in totalità, affetto da scirro o da speciali malattie;

(1) Il mio Uncino sia per renderlo sempre più innocuo nella sua applicazione, sia ben anco a preservarlo dal contatto degli umori che colano dalle pudende, sarà ottima cosa guernirlo d' una guaina di *baudruche* sottile, e come consigliai per la mia Leva articolata.

e che al *Wasseige*, Clinico di Liegi, si deve il merito particolare d' essere stato primo ad ideare, *determinatamente*, un Uncino articolato per la decollazione del feto morto entro l' utero materno:

4.° che ho corretto un errore storico da me e da altri condiviso, o quello di avere dichiarato l' Uncino del *Vaust*, pur esso di Liegi, che fosse da porsi nella classe degli articolati, mentre non lo è, e serve solo come porta-lacci:

5.° che a sdebitarmi di mia impromessa, fatta cinque anni or sono, ho presentato il mio nuovo Uncino ostetrico articolato decollatore, il quale spero abbia in sè particolari qualità da dover' essere bene accolto dai Colleghi e preferito, in ispecie: per potersi insinuare retto e nei luoghi più riposti, ed essere suscettibile di una curvatura tale da poter convenientemente servire ad abbassare il collo (e così varie parti del feto, qualora tornasse il conto di farlo) e ad abbracciarlo con maggiore sicurezza di non ledere minimamente le parti materne, e pure d' essere in grado di raggirarvi facilmente attorno lo *sverzino* di cui è fornito, od altro mezzo meccanico, al fine di staccarlo dal tronco fetale assai meglio degli altri:

6.° che, seguendo le tradizioni della nostra Scuola bolognese, ne ho rassicurata la pratica utilità, mediante pubbliche esperimentazioni eseguite sul cadavere e nelle più difficili presentazioni per la spalla, le quali riuscirono sempre perfettamente al desiderato intento, e come risulta dalla fattane descrizione di esse.

Per le quali tutte cose ho la fondata speranza che i miei studî torneranno non inutili o sgraditi, e m' auguro, Signori, particolarmente, l' efficace Vostra approvazione.

DUE RARE ALTERAZIONI DI FEGATO

RELAZIONE

DEL PROF. CESARE TARUFFI

(Letta nella sessione ordinaria 29 Gennaio 1880)

Fra i vari preparati interessanti d' Anatomia-patologica, che abbiamo conservati nel 1879 (1), due hanno richiamato maggiormente il nostro esame per la natura insolita dell' alterazione, ed anzi d' uno possiamo dire, per la novità del prodotto morboso rispetto alla sede, perciò a preferenza degli altri crediamo opportuno il dare una breve descrizione di questi.

Oss. I. Degenerazione colloide del fegato.

Il chiarissimo Dott. Mori, medico primario in Cesena, inviò il 23 febbraio 1879 al nostro Laboratorio il fegato d' una bambina, accompagnato da notizie cliniche scritte dal Dott. Carlo Rigoni, Assistente all' ospedale di quella Città, coll' invito di pigliare in esame il fegato suddetto.

Dalle notizie cliniche risulta che il fegato apparteneva ad una bambina, che contava appena due anni, la quale aveva perduto il padre, operaio nelle miniere di zolfo, per ileo-tifo, essa però possedeva la madre, donna sana per ogni riguardo, ma poverissima.

Questa raccontava che la bambina fino dalla nascita mostravasi piccola ed infermiccia, e che ad un anno d' età cominciò ad avere il ventre tumido, colle vene sotto-cutanee manifeste. Più tardi la pelle andò assumendo una tinta giallo-terrea e la bambina scadeva ogni giorno più nella nutrizione, quantunque poppasse avidamente e mangiasse ancora altri alimenti. Per tale stato di cose il Dott. Mori l' accolse nell' ospedale ai primi d' ottobre dell' anno 1878.

(1) La nota dei preparati è posta in Appendice.

Il risultato dell' esame clinico fu il seguente. Denutrizione generale, specialmente alle membra; configurazione regolare del corpo; ventre gonfio, teso, piriforme, colla parte più grossa alla regione epigastrica. Ivi la circonferenza del corpo misurava 56 cent.; alla regione ombellicale 50. La linea xifo-ombellicale era lunga cent. 16; la ombellico-pubica cent. 10.

Palpando il ventre sentivasi una particolare durezza al quadrante superiore destro, la quale oltrepassava verso sinistra la linea mediana e terminava con un margine regolare, grosso e resistente. Sul prolungamento della linea ascellare anteriore destra, al disotto della durezza sopranotata sentivasi inoltre un' altra durezza di forma globosa, che si estendeva in basso fino al quadrante inferiore. Cercando i limiti dell' ottusità colla percussione si ottenne la seguente figura

La cute di tutto il corpo si mostrava di colore giallo-terreo, ricoperta di lanugine, specialmente nelle membra. Nel tessuto sotto-cutaneo dell' addome si conservava una bella e sviluppata arborizzazione venosa; se poi si poneva la bambina in posizione verticale le vene divenivano grosse come un lapis comune.

L' inferma non dava segni di sofferenza, mangiava ogni sorta di cibi e non pativa altri incomodi che una rada e leggiera tosse, e frequenti diaree di materie verdastre, le quali portarono al massimo l' emaciazione e finalmente la perdita dell' appetito. La bambina morì il giorno 21 febbraio 1879.

L' esame esteriore del cadavere fornì le seguenti misure.

Lunghezza del corpo	cent.	72
Circonferenza del corpo corrispondente alla zona epigastrica	„	52
„ „ „ all' ombellico . . .	„	48
Linea xifo-ombellicale	„	14
Linea ombellico-pubica	„	9

L' esame interno mostrò tubercolosi disseminata ai polmoni, al peritoneo, alla milza, all' utero, ed alle ovaia, con focolai caseosi ai reni; dovechè nelle meningi non eravi alcuna traccia di tubercoli.

Estratto il fegato dalla cavità addominale presentava le seguenti misure.

Diametro trasversale totale	. . . .	cent. 23
„ „ del lobo destro	. . . .	„ 16
„ verticale	. . . .	„ 17 $^1/_2$

Esame anatomico del fegato, fatto da noi in Bologna — Quest' organo essendo rimasto lungo tempo nell' alcool ed avendo subìto alcuni tagli, si è assai rimpiccolito, tuttavolta si è mantenuto tenero e pastoso ed anzi in alcune parti perfino molle. Il colorito è rosso scuro alla superficie, la quale è regolare dal lato convesso, mentre offre un tumore nel lato concavo del lobo destro.

Questo tumore è molto molle, rosso pallido traente al giallastro nella superficie, di forma elittica, più grande d' un ovo, il quale, supponendolo circoscritto e completo (lo che non è), s' approfonda per un quarto della sua grossezza nel parenchima dell' organo. Esso sporge per 1 $^1/_2$ cent. dal margine libero del fegato e poggia dal lato interno contro la cistifellea, lo che spiega come in vita, questa fosse grandemente distesa, e protuberante oltre il margine epatico, la qual cosa ora più non si verifica in egual misura. Anche il lobo dello Spigelio è ingrossato, scolorato e molle.

La vena porta all' ilo epatico e le sue branche entro l' organo si mostrano alquanto allargate, senza però che il connettivo circostante sia divenuto più abbondante. La cistifellea è vuota, colla mucosa fortemente colorata da sostanza biliare; i condotti maggiori per l' escrezione invece sono molto meno colorati e non mostrano alcuna alterazione.

Quando giunse il fegato al Laboratorio esaminammo un taglio già praticato, che comprendeva nel suo maggior diametro il tumore e nell' antero-posteriore il lobo destro del fegato. Da cotesto esame rilevammo che la sostanza del fegato era rosso-pallida con larghi tratti, in cui si vedeva una disposizione reticolata, le di cui maglie erano di diversa grandezza e contenevano una sostanza semitrasparente, molle, di colore dell' ambra, cioè coll' aspetto di sostanza colloide; caratteri che l' azione dell' alcool ha in oggi resi meno evidenti.

Nel taglio suddetto si vedono tuttora due grandi tratti di tessuto reticolato (fig. 1^a, *v*, *v*): uno di questi verso il margine laterale del lobo (che posto in direzione normale corrisponde al bordo superiore del fegato), in cui le cellette colloidi in generale sono grandi come un grano di miglio; il secondo ha origine incirca dal centro del lobo, avvanza allargandosi verso il margine e lo sorpassa costituendo il tumore in discorso (fig. 1^a, *t*, *t*), il quale come abbiamo annunziato sporge dalla concavità del lobo. In questo tratto la rete si mostra parimente ristretta all' origine, ma poscia va allargandosi nell' avvicinarsi al tumore, ed in questo le maglie possono contenere un pisello, un' anima di ciliegia ed anche un corpo alquanto maggiore, in guisa che il tessuto assume l' aspetto d' un accumulo di cisti colloidi.

Questa disposizione si ripete nel lobo dello Spigelio, ed in alcuni tratti della periferìa dell' organo mediante cellette colloidi; nel rimanente non si riconosce alcuna alterazione.

Tagliando in vari punti il tessuto epatico e trattandolo con diversi reagenti non si ottenne alcuna reazione caratteristica ed anche adoperando l' ac. acetico allungato non accadde alcun intorbidamento, anzi le cellule proprie dell' organo si rischiararono, rimanendo però le granulazioni pigmentate, per cui giudicammo l' alterazione, non già il prodotto d' una degenerazione mucosa, ma semplicemente colloide. Rimaneva però di cercare il modo ed il luogo in cui primitivamente era accaduto questo processo, ed a tal fine facemmo ulteriori investigazioni.

Osservando con un ingrandimento di 130 diam. un taglio trattato col carmino, praticato ove la malattia era molto progredita, vediamo un lobulo epatico (fig. 2ª, *l*), il quale è divenuto continuo con altri due, mentre in tutto il rimanente della sua periferia è circondato da una estesa rete fibrillare. Il primo lobulo mostra la vena centrale alquanto dilatata, ed il suo tessuto, sebbene intensamente colorato in rosso, non possede che rare cellule epatiche, riconoscibili ancora per il loro colorito più scuro; del rimanente il lobulo è fatto da un detritus, in cui si distinguono alcune strie, alcuni nuclei, ed un gran numero di granuli minutissimi. Le stesse cose si osservano ancora negli altri due lobuli (di cui non abbiamo rappresentata che una porzione), i quali sono anche grandemente ridotti di volume.

Se osserviamo lo stesso preparato ad un ingrandimento di 225 diam. riconosciamo che intorno alla vena centrale è rimasta una corona di cellule epatiche alquanto alterate, non potendo discernere i limiti del loro protoplasma e distinguere chiaramente i nuclei per l' abbondanza delle granulazioni pigmentate. Le altre cellule superstiti del lobulo sono deformate, rimpiccolite, ristrette, ora disgregate, ora fuse in gruppi, di cui un certo numero hanno perduto il nucleo ed appariscono come un aggregato di granuli, coloriti meno intensamente. La rete intorno ai lobuli non ha subita l'azione del carmino e presenta vani ora rotondi, ora ovoidi di diversa grandezza; con pareti irregolari, fatte di fibrille, che talvolta sporgono libere entro i vani, tal' altra in forma di piccole areole. Le pareti poi ove si toccano mostrano non di rado ingrossamenti pieni di granuli, ed in qualche caso anche un nucleo, abbastanza grosso, per cui può supporsi che sieno in parte prodotti dalle reliquie di cellule epatiche.

Esaminando un preparato, in cui l' alterazione sia meno avanzata vediamo un lobulo, in cui una parte dei raggi cellulari sono conservati ed il rimanente ha subìto la degenerazione granulosa (fig. 3ª). Ma anche i raggi superstiti hanno patito alterazioni in vario grado (*l*, *l*): avanti tutto essi sono fra loro allontanati per la interposizione d' una sostanza granulosa, identica alla precedente, in cui non si distinguono nè i capillari sanguigni, nè le vie biliari, e poi le cellule epatiche sono più o meno modificate: difatto quelle intorno alla vena centrale sono

gonfie e torbide, le altre deformate, rimpiccolite, talvolta fuse fra loro, tal' altra disgiunte; in generale sono più o meno granulose, lasciando però, come le prime, riconoscere il nucleo; ma accostandosi alla periferia del lobulo, il nucleo non è più riconoscibile, i granuli progressivamente si fanno molto fini e chiari e poscia le cellule più non si distinguono dal tessuto amorfo interlobulare. Tali alterazioni si riconoscono molto meglio disgregando artificialmente le cellule ed il tessuto interposto, in cui, è degno di nota, non si riscontra alcun epitelio cilindrico (V. fig. 4ª).

Nel medesimo preparato si vede inoltre un condotto epatico colle cellule gonfie e deformate (V. fig. 3ª, *c*, *c*), lo che spiega come non si riscontrino epiteli cilindrici col disgregamento; come pure si vede un capillare ripieno di globuli rossi (*s*, *s*). Le quali cose si trovano sovente nel tessuto interlobulare, ogni qualvolta non sia accaduta la degenerazione colloide. Non devesi però credere, esaminando la stessa figura, che la sostanza fra i raggi cellulari e fra i lobuli sia il prodotto esclusivo del disfacimento delle cellule epatiche, poichè anche prima che sia accaduta la loro completa degenerazione gli spazi intercellulari ed interlobari sono sensibilmente ingranditi e tanto più ove scorrono le branche della vena porta (fig. 5ª, *s*, *s*). In questi luoghi poi, oltre l' abbondante degenerazione granulosa, si vedono le suddette branche grandemente dilatate (fig. 5ª, *v*) e ciò che è più interessante si vedono le pareti arteriose molto ingrossate, e che hanno perduta in gran parte la loro struttura caratteristica (fig. 5ª, *a*).

Considerazioni — Volendo indagare il modo con cui avvenne sì strana alterazione, ricorderemo avanti tutto che ove, la malattia è incipiente, le cellule sono gonfie, torbide e più del solito granulose, che contemporaneamente fra i ranghi cellulari havvi uno spazio con granuli ed alcune striature e niuna traccia di vasi. Rammenteremo inoltre che ove cotesti spazi sono allargati le cellule prossime sono deformate, rimpiccolite, in parte fuse fra loro e in parte disgregate. Per sì fatte modificazioni non havvi dubbio che nelle cellule epatiche non sia accaduto un processo patologico analogo all' epatite parenchimatosa, il quale ha avuto per risultato la degenerazione granulosa; come non havvi dubbio che contemporaneamente non sia accaduto un processo simile nel connettivo intercellulare, che gonfiandosi e degenerando ha compresse le cellule epatiche ed i capillari, per cui i lobuli sono divenuti anemici.

Abbiamo anche veduto che lo stesso processo regressivo è accaduto negli spazi interlobulari, ma che ivi la tumidezza non ha atrofizzati nè i capillari sanguigni, nè i condotti biliari, anzi che i primi si sono dilatati per l' accumulo di globuli rossi, come pure i secondi per la tumefazione torbida dei loro epiteli. Abbiamo inoltre notata la dilatazione delle branche della vena porta ed il rilevante ingrossamento delle pareti arteriose con perdita della loro struttura. Ora lasciando in disparte i capillari e le vene, risulta che tutti gli altri componenti il fegato sono intimamente alterati, e che non possiamo dire se il processo si sia iniziato nelle

cellule epatiche, se nella rete connettiva, se nei condotti biliari, se nelle arterie non trovando in niuna di queste parti l'alterazione più avanzata che nelle altre.

Ricorderemo per ultimo che nelle parti in cui la malattia era molto progredita si vedono in gran numero le cellule epatiche distrutte e sostituite da sostanza amorfa, o da una rete colloide, come se ne riscontrano altre in via di distruzione, poichè verso la periferia vi sono piccoli accumuli di fini granuli, che vanno perdendo la proprietà d' essere coloriti dal carmino e finiscono per confondersi colla sostanza amorfa interlobulare, oppure principiano a mostrare il loro centro trasparente, omogeneo e finiscono per diventare sfere colloidi, le quali fondendosi fra loro raggiungono variate dimensioni. Con questo non affermiamo che tutte le sfere abbiano origine dalla degenerazione granulosa delle cellule epatiche, anzi concediamo (ad onta che non ne abbiamo seguite le fasi) che un certo numero sia l'effetto della metamorfosi retrograda degli epiteli delle vie biliari, ma non possiamo ammettere che questa sia l' unica, e neppure la principale origine dell' alterazione.

Egli è cognito che legando il coledoco negli animali accade la degenerazione colloide nelle cellule epatiche (1), e noi sezionando un pseudo-acefalo acardiaco della specie umana, in cui eravi un enorme anasarca e trasposizione del fegato trovammo le cellule di quest' organo trasformate in tante piccolissime sfere amorfe e trasparenti (V. fig. 6ª). Ma questi casi non collimano col presente; poichè nei primi o meglio ovunque accade la degenerazione colloide si manifestano punti chiari e trasparenti entro le cellule che poscia s' ingrandiscano ed invadono interamente lo spazio cellulare e poscia continuano a gonfiarsi, per cui la degenerazione può considerarsi primitiva. Nel caso attuale niun punto chiaro è accaduto entro le cellule, ma invece la degenerazione granulosa è il fatto generale che da prima s' osserva e solo più tardi il detritus cellulare si trasforma in gran parte in sostanza colloide, per cui questo prodotto è un avvenimento secondario. Ora noi non conosciamo alcuno che abbia riferito un processo identico nel fegato e neppur un' egual forma morbosa.

Niun' altra induzione può trarsi dal presente caso, non avendo esaminati gli altri visceri; tutto al più può farsi la questione se la degenerazione suddetta sia il prodotto d' un processo passivo, e per esprimerci più chiaramente, sia il prodotto d' un liquido nutritivo insufficiente e viziato, oppure sia l' effetto d' un processo in origine attivo per le qualità irritanti, possedute dal liquido nutrizio. Ma se è agevole fare il quesito, non è altrettanto facile il risolverlo; anzi per parte nostra non ci sentiamo capaci di rispondere se non con una ipotesi e cioè che il processo in origine sia stato attivo, qual cosa può indursi considerando che la degenerazione colloide è secondaria, e che la degenerazione granulosa è stata preceduta dal rigonfiamento torbido delle cellule. Che poi la malattia abbia avuto origine dalle qualità speciali del sangue può inferirsi dalla alterazione riscontrata nelle pareti arteriose, ricordata superiormente.

(1) Chambard Ern. — Archiv. de Physiologie par Brown-Séquard Ser. II, Tomo IV, pag. 718. Paris 1877.

Oss. II. Fegato con lobi succenturiati.

Il giorno 11 gennaio 1879 ci venne donato dal chiar. Direttore del Manicomio, Francesco Roncati, un fegato di forma insolita, rinvenuto nel cadavere d' una donna di 62 anni, morta per demenza con paralisi, ed il dono fu accompagnato da alcune notizie anatomiche (1).

Questo fegato ha una forma regolare, tranne che al margine inferiore del lobo destro, all' esterno della cistifellea, ove si vede discendere il peritoneo, a guisa di larga fettuccia a doppio strato, per un tratto di 3 cent., colla larghezza di 38 mill.; il quale poscia si sdoppia per comprendere un tumore grosso quanto un mediocre arancio e completamente mobile (Tav. II, fig. 1ª n. 1).

Oltre a questo tumore, il prolungamento peritoneale contiene altri due piccoli tumori simili al primo e precisamente verso il lato esterno della fettuccia (fig. 1ª n. 2 e 3) e comprende ancora nel suo mezzo due cordoncini, che giudicammo una arteria ed un condotto escretore, ma che non verificammo per non rovinare il pezzo patologico; così ci parve, quando il pezzo era fresco, che comprendesse alcune vene. Tagliati i tre tumori rinvenimmo tutti i caratteri della sostanza epatica, colla sola differenza dal fegato sovrapposto, che i lobi succenturiati erano più molli e più ricchi di sangue.

Niuna anomalia abbiamo rinvenuta nei tronchi vascolari e nell' apparecchio escretore, tranne che la cistifellea sporgeva dal margine epatico per 35 mill. senza essere proporzionatamente ampia. Ma il fatto che maggiormente richiamò la nostra attenzione si fu l' insolita piccolezza dell' organo; poichè valutando pure che il nostro preparato è rimasto molti mesi nell' alcool allungato e che manchiamo delle misure del fegato nella donna, nulladimeno esso presenta sempre una differenza troppo grande da quello dell' uomo, per potere disconoscere cotesto fatto, come può verificarsi dal seguente specchio, in cui vi sono anche le misure dei fegati succenturiati (I, II, III).

(1) Canetoli Rosa, di Bologna, vedova, di anni 63, occupata ai lavori di casa, fu degente in questo manicomio dal 11 Giugno 1878 fino al 9 Gennaio 1879 (giorno della morte) per demenza con paralisi progressiva.

(Autopsia) Cervello di grandezza e di peso ordinario; simmetrico nei suoi emisferi e nella disposizione delle sue circonvoluzioni; lobi frontali a punta. Dura madre sottile e levigata, alquanto opaca e aderente tutta quanta alla calotta ossea; aracnoide opaca; sinfisi meningo-corticale specialmente in corrispondenza dei lobi frontali, per cui la pia madre non si distacca se non lacerando la corteccia; sostanza corticale atrofica; sostanza bianca alquanto edematosa; ventricoli laterali larghi e con corna, specialmente le anteriori più ampie, e piene di liquido siero-sanguinolento; grossi gangli e cerveletto normali; non ateromasia delle arterie cerebrali. *Devoto discepolo* ALVISI.

MISURE

	Fegato anomalo Taruffi	F. normale nell' età di 63 anni. Frerichs (1)	Media tratta da 10 Fegati. Sappey (2)	Media data dal Klebs (3)
Diametro trasverso totale	millim. . . . 200	millim. . . . 243	millim. . . . 280	mill. . . 260-300
« « del lobo destro . .	« 143	« 162		« 180-200
« « del lobo sinistro .	« 57	« 81		« 80-100
« antero-posteriore massimo .	« . . . 132	« . . . 196	« . . . 200	« . . 200-220
« verticale massimo	« . . . 65	« . . . 68	« . . . 60	« . . . 60-90

Fegati succenturiati

I. Diametro trasverso	millim. . . . 54
« antero-posteriore . . .	« . . . 66
« verticale	« . . . 45
II. Diametro maggiore	millim. . . . 20
« trasverso al precedente .	« . . . 10
« verticale	« . . . 10
III. Diametro maggiore	millim. . . . 15
« trasverso al precedente .	« . . . 6
« verticale	« . . . 5

(1) Frerichs — Des maladies du Foie Traduct. fr. Paris 1866 p. 20.

(2) Sappey Ph. — Traité d'Anatomie T. IV p. 309. Paris 1879.

(3) Klebs E. — Handbuch der pathologischen Anatomie. Erste Lieferung. Berlin 1868. S. 359.

L' esame microscopico dei tre lobi succenturiati rileva uno stato analogo al così detto fegato cianotico, pel gran numero di capillari e di vene dilatate (Tav. II fig. 2ª), lo che spiega come i lobuli si siano deformati e più non si riconosca la loro disposizione tipica, nè la vena centrale dagli altri vasi. In oltre negli spazi interlobulari, ad onta della grande dilatazione delle vene, è accresciuto notevolmente il tessuto fibrillare (Tav. II, fig. 3ª), il quale in certi tratti ha distrutto anche buon numero di cellule epatiche, come può argomentarsi dalle loro reliquie. Ora questo stato di cose a nostro avviso può risultare tanto dalla disposizione delle vene prive di valvole, in cui per lungo tratto il sangue doveva rimontare per scaricarsi, quanto per la causa prima dell' alterazione, di cui fra poco terremo discorso.

Se ora cerchiamo qual posto e quale importanza abbia nella scienza il caso nostro dobbiamo tosto riconoscere che esso appartiene ai fatti molto rari, perchè, egli è bensì vero che molti anatomici moderni parlano dei medesimi, ma ben pochi recano osservazioni. Fra questi il più antico è il Morgagni (1), che nel 1736 vide un neonato con un tumore addominale a destra ed inferiormente all' ombellico, il qual tumore aveva la pelle esulcerata ed il fondo dell' ulcera livido, sicchè cadde in cangrena ed il bambino morì 35 giorni dopo la nascita. L' esame anatomico mostrò un doppio fegato: uno nella sua ordinaria sede, piccolo anziche nò, benchè diviso in lunghissimi lobi; e l' altro più voluminoso, ma informe, che s' univa al primo mediante una densa membrana e direttamente al tronco della vena porta, mandando la propria vena sopraepatica alla cava sotto l' altro fegato.

In questo secolo abbiamo rinvenute altre 10 osservazioni, la prima delle quali appartiene ad J. Fr. Meckel (2), che in una donna di 40 anni rinvenne un fegato succenturiato attaccato all' estremità sinistra del margine posteriore del fegato, mediante una piega peritoneale ed i vasi. La II osservazione fu fatta da Cruveilhier (3), che s' incontrò in un prolungamento a forma di lingua del lobo sinistro ed il primo non era congiunto col secondo se non mediante un picciòlo vascolare. La III oss., (non rinvenuta da noi) deve attribuirsi a Rockitanski (4), poichè esso poggiando sopra una sua Memoria pubblicata nel 1839 (5), ammette non solo che il fegato possa dividersi in lobi sopranumerari, ma ben anche che in qualche caso uno di questi s' allontani per formare un fegato succenturiato. La IV appartiene ad E. Huschke il quale nel 1844 (6), vide uno di questi lobi separati dall' organo nell' estremità sinistra del fegato in un uomo di 67 anni, e cotesto lobo rimaneva congiunto soltanto mediante l' involucro peritoneale, il quale conteneva i vasi di comunicazione.

(1) Morgagni G. B. — De Sedibus. Epist. 48 n. 55.
(2) Meckel J. Fr. — Tabulae Anat. Patologicae. Fasc. III. Lipsiae 1822, p. 14, Tab. XXIV, fig. 1ª.
(3) Cruveilhier J. — Anatomie descriptive. Tom. I, p. 469. Bruxelles 1837.
(4) Rockitansky Carl. — Lehrbuch der pathol. Anat. Bd. III, s. 246. Wien 1861.
(5) Idem — Schizze der Grossen und Formabeweichung der Leber, in Osterr. Jahrb. 1839. Bd. XX, st. IV.
(6) Huschke E. — Lehre von den Eingeweiden und Sinnesorganen des menschlichen Körpers. Leipzig 1844, s. 155.

Il più fortunato fra gli anatomici è stato W. Gruber, essendosi incontrato in quattro casi analoghi, che avevano sede nella superficie inferiore del fegato, a cui daremo i numeri V, VI, VII, VIII. I primi tre furono descritti nel 1849 (1) ed il quarto nel 1879 (2). Il n. V apparteneva ad una donna e sporgeva sotto allo spazio posteriore della fossa ombellicale. Il n. VI fu trovato all' estremità sinistra della fossa trasversa nel fegato di un fanciullo. Il n. VII sotto il lobo quadrato, avanti la fossa trasversa parimenti d' un fanciullo. Ed il n. VIII nel cadavere d' un uomo, in cui i fegati succenturiati erano due, il più grande dei quali aveva il maggior diametro di 3 $^1/_2$ cent. Questi lobi pendevano dalla lamina posteriore del legamento triangolare sinistro del fegato.

IX. Lobi sopranumerari liberi, aderenti al legamento sospensorio sono pure stati veduti due volte da Wagner (3), con questa differenza che erano posti vicino all' ombellico, non communicavano col fegato mediante condotti biliari, ed erano rappresentati da piccoli nodi riconoscibili soltanto al microscopio.

X. Finalmente Henle (4) ricorda un fegato del Museo di Gottinga, in cui dal lato sinistro della cistifellea sporgeva un lobo succenturiato, di forma prismatica, lungo incirca un pollice, il quale era collegato al margine epatico, mediante una dupplicatura peritoneale ed emmetteva dal lato posteriore un condotto escrettore che sboccava nel ramo destro del condotto epatico.

Se ora confrontiamo il caso nostro con quelli superiormente ricordati non ne troviamo alcuno che mostri caratteri eguali, poichè i lobi liberi erano posti ora nella parte concava del fegato, ed ora nel legamento sospensorio. E neppure il caso nostro può dirsi simile a quello di Morgagni, perchè il sistema venoso del fegato succenturiato era indipendente da quello che scorreva entro il fegato normale. Il solo esempio che presenti analogia col nostro è il fegato di Henle; non devesi però tacere che la sua appendice era unica, piccola (un pollice) ed aderente al fegato dal lato sinistro della cistifellea, dove che nel nostro caso tre erano le appendici, di cui la più grande aveva il maggior diametro di 66 mill. e pendevano dal fegato a destra della cistifellea.

I fatti raccolti essendo generalmente diversi da quello che abbiamo brevemente descritto, essi dovevano promovere una interpretazione adatta ai medesimi e non al nostro; ma la storia smentisce tale presunzione e dimostra l' opposto: difatto Cruveilhier nel 1849 (5), senza ricordare alcuna osservazione in proposito, diceva: sotto l' influenza del busto il fegato s' allunga nel senso verticale, nel medesimo tempo si stringe nel senso trasversale, per cui una parte oltrepassa la circonferenza del torace e questa alla sua volta imprime sulla regione corrispondente del

(1) Wenzel Gruber — Neue Anomalien. Berlin 1849, s. 24.
(2) Idem — Beobachtungen. I. Heft, s. 48. Berlin 1879.
(3) Wagner E. — Archiv. de Heilk. 1861, s. 472.
(4) Henle J. — Handbuch der Anatomie. Bd. II, s. 191. Braunschweig 1866.
(5) Cruveilhier J. — Traitè d'Anatom. pathol. Tom. I, p. 716. Paris 1849.

fegato un solco circolare, spesso accompagnato da ingrossamento delle membrane. Qualche volta accade ancora che la porzione epatica sporgente oltre la base del torace non conservi altro rapporto col resto dell' organo, se non mediante un peduncolo.

Tale dottrina non era altrimenti nuova, venendo applicata nel secolo scorso per i solchi longitudinali, che talvolta si osservano nella parte convessa del fegato; Morgagni (1), però non era troppo persuaso della medesima, perchè trovò i solchi ancora negli uomini, che non portavano i duri busti usati in quel tempo. Mettendo in disparte tale questione, noi siamo invece inclinati ad accogliere la medesima teoria, non tanto per il caso d' Henle, quanto per il nostro, essendosi verificata la separazione d' una parte di fegato, ove suol' essere maggiore la pressione del busto a traverso le reni.

Se a questa considerazione aggiungiamo che Frerichs ha rappresentati gli stadi che precedono la separazione della porzione inferiore del lobo destro del fegato, allora la teoria diventa tanto più verosimile: difatto quest' autore ha figurato in due casi il lobo destro a guisa di cono, con la base in alto, con un solco profondo trasversale nel terzo inferiore, e colla punta arrotondata in basso, per cui questa forma non ha alcun indizio d' essere congenita (2), ma rappresenta chiaramente l' impronta meccanica ammessa da Cruvelhier, e dall' autore stesso senza ricordare chi l' ha preceduto in sì fatta interpretazione.

Questa dottrina però non possiamo estenderla a tutte le altre osservazioni ricordate superiormente, poichè le cause meccaniche suddette non possono rendere ragione dell' origine di quei lobi erratici, che hanno sede in luoghi, ove la loro azione non può avere influenza, per cui è necessario ricorrere alle anomalie primitive di sviluppo, come già hanno dato l' esempio Rokitanski e Gruber rispetto ai casi da loro descritti.

(1) Morgagni — Op. cit. Epist. 65, n. 8.
(2) Frerichs Fr. — Traité des maladies du foie. Trad. Paris 1866, p. 45, fig. 11, 12.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Fig. 1ª Superficie d'un taglio praticato nel lobo destro del fegato e rappresentato un terzo più piccolo del vero.

t, *t* tumore sporgente dal lato concavo del lobo suddetto.

v, *v* vescichette colloidi nella sostanza epatica, che si moltiplicano e s' ingrandiscono verso la superficie, ed in *t*, *t* formano il tumore.

Fig. 2ª Tessuto epatico in istato incipiente della degenerazione colloide, veduto ad un ingrandimento di 130 diam.

l lobulo epatico in istato di degenerazione granulosa, in continuazione cogli avanzi d'altri due lobuli e nel rimanente in continuazione con una rete connettiva. Nel primo si vede la vena centrale dilatata, circondata da cellule epatiche ancora riconoscibili; una grande quantità di sostanza granulosa con striature in vario senso; e per ultimo rare cellule epatiche in vario grado di degenerazione e talvolta fuse insieme.

r, *r* rete di tessuto connettivo, che allo stato fresco era distesa da sostanza colloide, le di cui maglie presentano ingrossamenti, contenenti talora granuli pigmentati e perfino nuclei.

g globuli rossi di sangue disseminati.

Fig. 3ª Tessuto epatico in istato di degenerazione granulosa, veduto ad un ingrandimento di 340 diam.

l', *l'* lobulo epatico colla vena centrale dilatata ed in parte trasformato in fina sostanza granulosa. I raggi cellulari superstiti si mostrano disgregati ed allontanati mediante sostanza amorfa simile alla precedente. Le cellule epatiche vicino al centro sono ingrossate e torbide, allontanandosi sono deformate e piccole; verso la periferia non rimane che un accumulo di granuli.

c, *c* condotto epatico, in cui gli epiteli sono gonfi e deformati.

s, *s* capillare dilatato, pieno di globuli rossi.

Fig. 4ª Cellule epatiche in diversi gradi di degenerazione, vedute ad un ingrandimento di 340 diam.

a, *a*, *a* cellule rimpiccolite con fini granuli pigmentati, in cui si vede ancora il nucleo.

b, *b*, *b* cellule, in cui non è più riconoscibile il nucleo.

c, *c*, *c* cellule, in cui il contenuto granuloso è divenuto pallido ed è rimasto debolmente colorito dal carmino.

d, *d* cellule in parte pallide, fra loro fuse.

Fig. 5ª Spazio interlobulare incompleto, ove scorre una branca della vena porta. Ingrandimento di 70 diam.

l, *l*, *l* porzione di lobuli, in cui le cellule sono ancora riconoscibili.

s, *s*, *s* spazi interlobulari ingranditi con degenerazione granulosa.

c, *c*, *c* porzione dello spazio maggiore interlobulare con aspetto areolare per degenerazione colloide.

v branca della vena porta grandemente dilatata.

a arteria con pareti ingrossate, la di cui struttura è in gran parte perduta.

Tavola II.

Fig. I. Fegato con tre lobi succenturiati, rappresentato (in quanto al volume) metà del vero.

1 Lobo succenturiato maggiore.

2, *3* Lobi succenturiati minori.

4 Cistifelea notevolmente sporgente.

Fig. II. Taglio del lobo succenturiato maggiore, in cui non si riconosce la disposizione lobulare, veduto ad un ingrand. di 70 diam.

c, *c*, *c*, *c* capillari sanguigni dilatati.

i, *i* tessuto connettivo interlobulare iperplastico.

p porzione della parete d' una vena dilatata.

Fig. III. Spazio interlobulare ingrandito per l' iperplasia del connettivo e per la dilatazione dei vasi, veduto ad un ingrand. di 70 diam.

s, *s* Sostanza epatica in cui le cellule sono ben conservate.

i, *i* Tessuto connettivo fibrillare iperplastico.

v, *v* Vasi che per la posizione e la forma possono ritenersi vene centrali.

c, *c*, *c* Capillari dilatati.

c, *p* Ramo della vena porta dilatato.

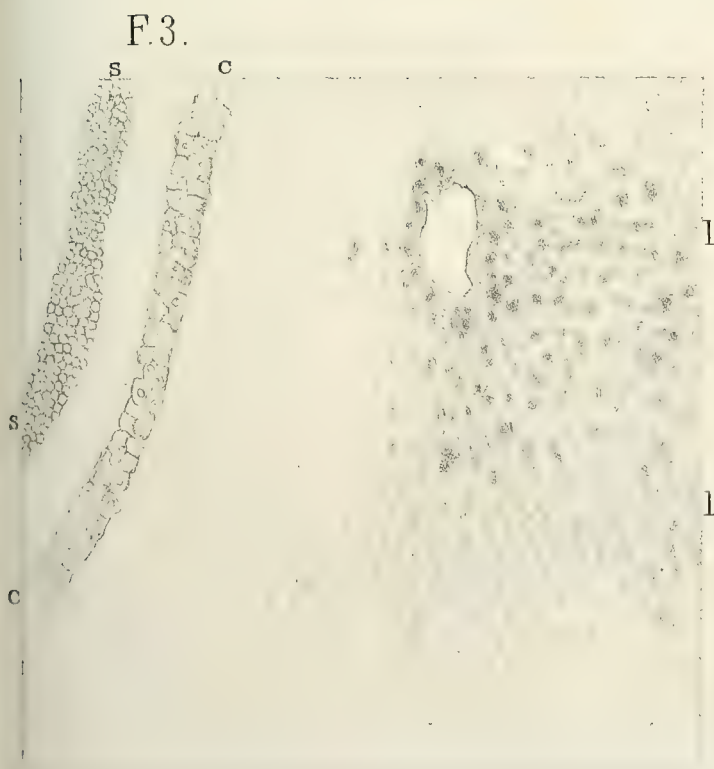
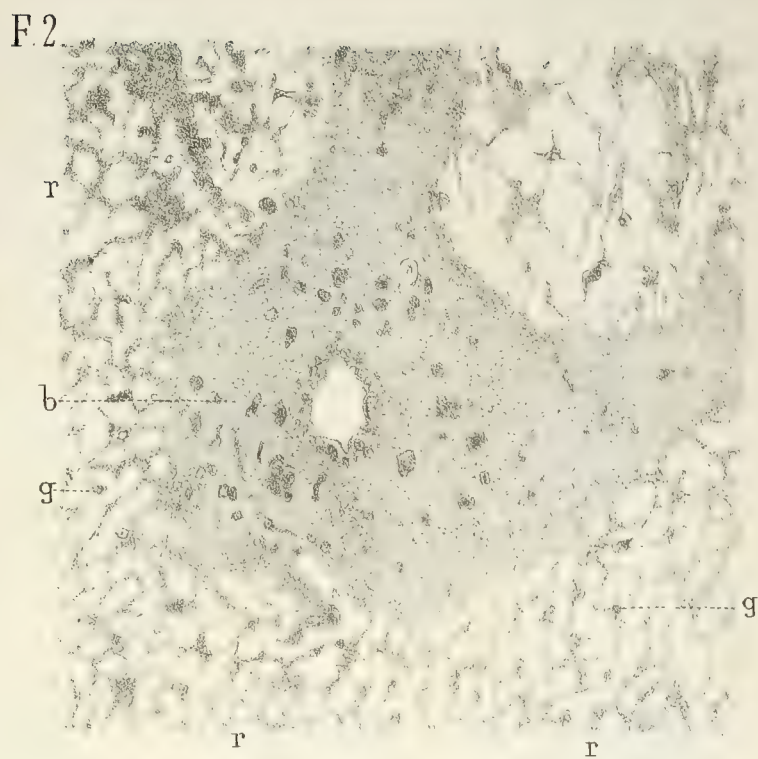
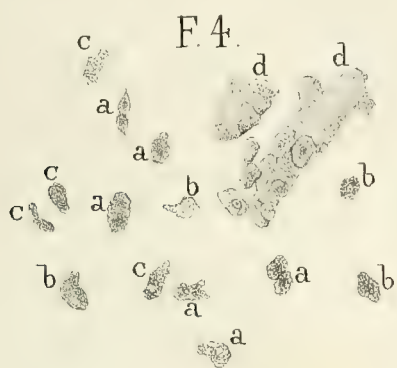
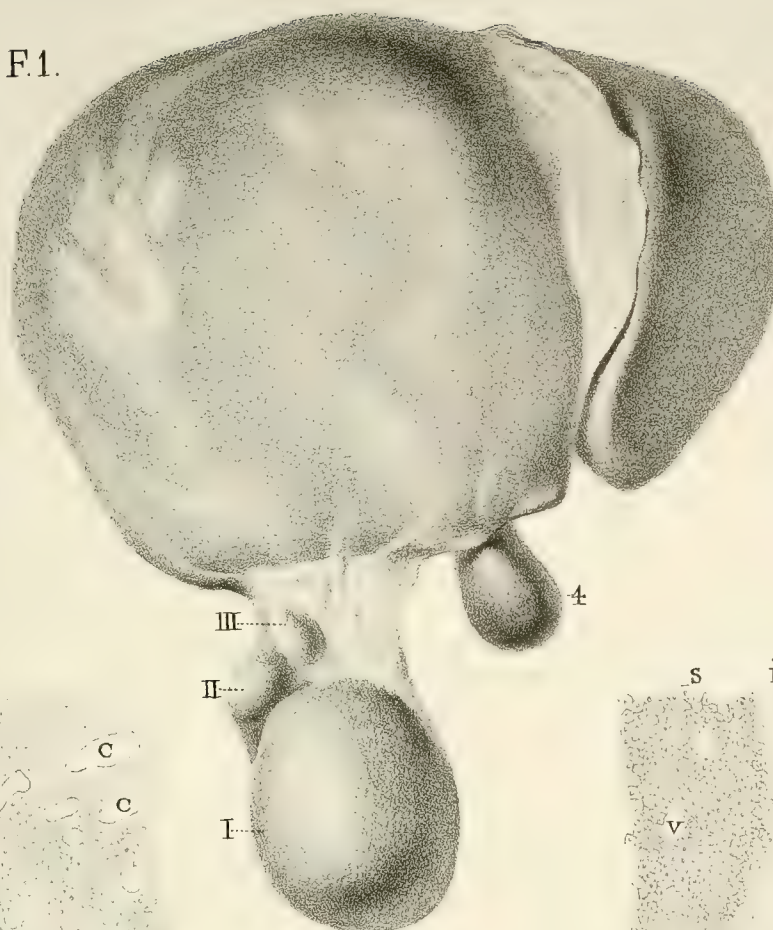
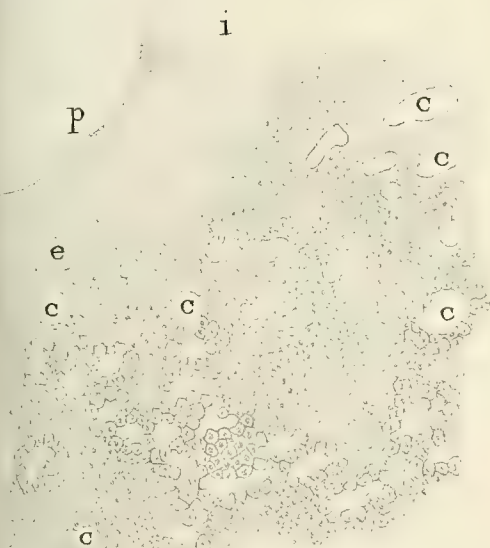
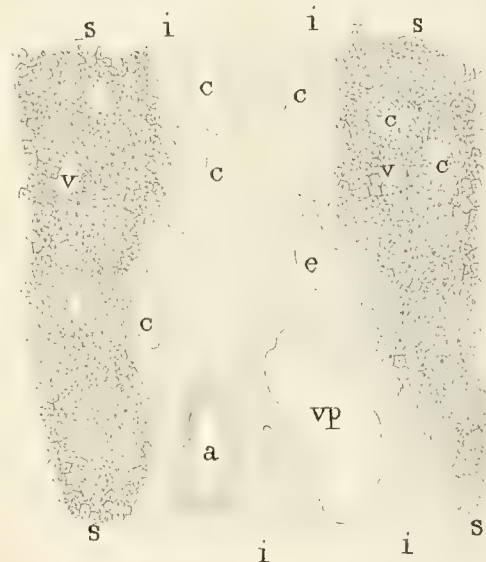
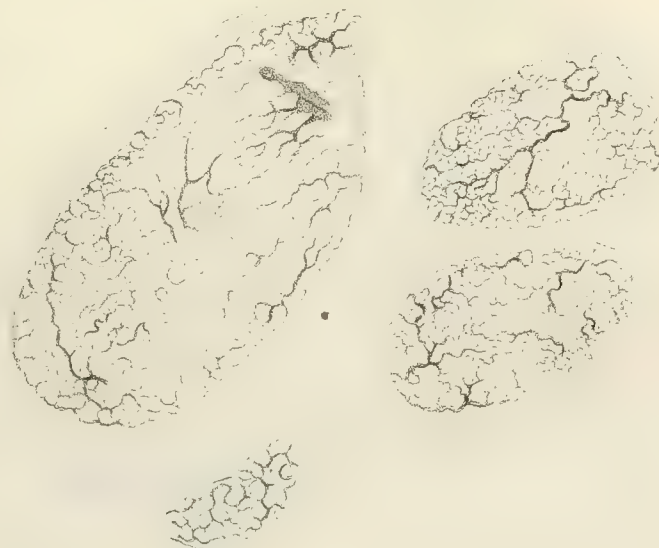
e Condotto biliare.

a Ramo arterioso.

(1) PREPARATI RACCOLTI NEL 1879

Numero del Catalogo		
2203	Sifilide papulosa emorragica nello scroto.	Rappresentata con un modello in cera.
2204	Enorme odontoma d' un molare.	
2205	Cistite cronica per la presenza di numerose ova del Distoma haematobium.	Due esemplari avuti in dono dal Dottor Sonsino dal Cairo.
2206	Anchilostoma duodenale.	Alcuni esemplari avuti in dono dal suddetto.
2207	Cistite e pielite destra per calcoli.	In un giovane di 17 anni.
2208	Anchilosi fibro-cartilaginea della articolazione omero-ulnare destra.	
2209	Clitoride ingrandita per cancro epiteliale.	
2210	Angioma cavernoso nella cute del dorso d' un bambino di sei mesi.	
2211	Ulceri irregolari ed estese nello stomaco.	Rinvenute nel cadavere d' un giovane di 18 anni, morto per pneumonite caseosa e tubercolosi generale. Vedi Mazzotti. Bull. delle Sc. med. 1880, Ser. VI. Vol. V, p. 5.
2212	Papillomi d' una valvola dell' arteria pulmonare.	In una vecchia, morta per sarcoma peritoneale.
2213	Difterite uterina sette mesi dopo il parto.	In una donna di 32 anni, che aveva partorito altre volte.
2214	Endocardite cronica del ventricolo sinistro estesa alla punta.	
2215	Ascesso caseoso della milza.	Nel cadavere d' una donna morta per peritonite tubercolare.
2216	Rammollimento bruno dello stomaco.	In un bambino di 12 anni.
2217	Nefrite caseosa delle piramidi del rene destro.	Bambina che aveva inoltre pneumonite ed adenite caseosa delle glandole del mesenterio.
2218	Emorragia entro il tessuto del ponte del Varolio.	In un uomo di 30 anni.
2219	Sarcoma colloide del testicolo sinistro.	In un giovane di 25 anni.
2220	Idem rappresentato in cera.	
2221	Emorroidi a doppio rango.	Tratte dal cadavere d' una donna.
2222	Idem rappresentate in cera.	
2223	Cuore con trasposizione dei tronchi arteriosi.	In un bambino d' anni 11. Caso illustrato dal Dott. Mazzotti. Rivista clinica di Bologna. 1879, p. 257.
2224	Depressione congenita delle coste dal lato destro.	La sorella vivente presenta una depressione analoga.
2225	Idem in plastica.	
2226	Sarcoma angectasico in forma di verruche nella lingua.	Questi due preparati, come pure il preparato n. 2203 appartenevano al medesimo individuo.
2227	Sarcomi melanotici secondari alla mucosa intestinale.	

A. Maccaferri dis.º dal vero C. Bettini dis.º in pietra Lit. G. Wenk

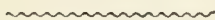
A Maccaferri dis.º dal vero C. Bettini dis. in pietra Lit. G. Wenk

2228	Idem rappresentati in cera.	
2229	Cicatrice deformante in una mano.	
2230	Cancro primitivo della testa del pancreas.	
2231	Nodi caseosi nel cervello e cervelletto.	Appartenenti ad una giovane morta per tubercolosi cronica diffusa.
2232	Sarcoma a cellule fusiformi della midolla spinale.	
2233	Utero diviso trasversalmente da un setto con un piccolissimo foro.	In una donna di 73 anni.
2234	Fibroma al margine destro della lingua.	
2235	Ipertrofia congenita del 2° e 3° dito del piede sinistro in una bambina di 12 anni.	
2236	Idem rappresentato in cera.	
2237	Cistoma del rene sinistro per calcolo dell' uretere.	
2238	Cancroide ulcerato del collo uterino.	
2239	Pseudo-acefalo.	
2240	Fegato con degenerazione colloide.	Vedi Osser. 1ª della presente Mem
2241	Fegato con tre lobi disgiunti.	V. la Oss. 2ª ecc.

DELLE

ANOMALIE DELL' OSSO MALARE

MEMORIA

DEL PROF. CESARE TARUFFI

(Letta nella sessione ordinaria 29 Gennaio 1880)

Il Museo d' Anatomia patologica di Bologna possedendo una discreta raccolta di teschi, molti dei quali appartenevano a dementi, nacque in noi il desiderio di cercare se in essi riscontravansi anomalie di qualche importanza, sapendo quanto siano apprezzate queste ricerche per il loro valore scientifico. Fortunatamente le nostre indagini non furono povere di risultati, avendo rinvenuti varii esemplari con forma insolita delle ossa, fra cui alcuni risguardanti l' osso zigomatico. Ora volendo scegliere fra quelli, i più meritevoli di descrizione, non abbiamo esitato di preferire gli ultimi, fornendoci un' occasione d' intrattenerci sopra un argomento prediletto dai moderni anatomici e di riassumere le loro fatiche in proposito.

1. La mancanza dell' osso zigomatico devesi considerare un fatto rarissimo, non conoscendosi che due osservazioni, le quali attestano sì fatta evenienza: una di queste fu fatta da Dumeril (1), l' altra da Meckel (2) ed ambidue risguardano feti. Tale anomalia corrisponde allo stato normale di due famiglie degli Sdentati (Formichieri e Dasypodi) e della sotto-famiglia dei Centetes appartenente all' ordine degl' Insettivori.

2. Una anomalia da poco tempo avvertita e non infrequente è il prolungamento verso la fossa lacrimale del processo mascellare del zigomatico, escludendo dal margine sotto-orbitale la porzione orbitale del mascellare. Di questa anomalia noi possediamo due esemplari, uno dei quali offre un particolare interesse mostrando un modo nuovo di formazione del margine sotto-orbitale.

(1) Dumeril — Bullet. de la Soc. philomatique. Tom. III, p. 102, An. XI de la Republique.
(2) Meckel G. F. — Beiträge etc. T. I, Heft II, p. 54, 1806.

Oss. I. Teschio d' un bambino di sette anni, morto nel 1871, per tubercolosi generale (*Prep. 1881*).

In questo teschio apparisce avanti tutto la sproporzione del cranio rispetto alla faccia, sembrando questa assai piccola relativamente al primo, il quale è ad un tempo asimetrico per la maggiore ampiezza del lato sinistro e pel difetto di sviluppo relativo d' alcune ossa dal lato opposto.

La metà destra del frontale si mostra depressa; difatto essa dista un cent. dal piano della gobba frontale sinistra; è inoltre congiunta col parietale mediante completa sinostosi, per cui metà della sutura coronale è scomparsa, dove che l'altra metà (sinistra) è manifesta e descrive un arco sulla convessità della volta, a detrimento del parietale corrispondente. Si riconosce per ultimo che la metà destra del frontale, osservata di lato, è più breve della sua omologa, poichè da questa parte l' estremità della grand' ala dello sfenoide è larga soltanto 14 millim. mentre a sinistra è larga 25 mill.

Il parietale destro, sebbene privo della propria gobba, possede una lunghezza alquanto maggiore del sinistro dal basso all' alto, poichè misurando quest' osso dall' angolo inferiore posteriore al superiore anteriore si ottiene una lunghezza di 18 cent., dove che la stessa distanza dal lato sinistro è soltanto di 17 cent.; si vede poi coll' esame comparativo che tale eccedenza è tutta dal lato anteriore, perchè la estremità della sutura sagittale in corrispondenza all' occipite, occupa la linea mediana, ma poscia avanzando obbliqua a sinistra, in guisa che il centro della fontanella anteriore, occupato da un wormiano, dista a destra dalla linea mediana della volta craniense per due cent. Il wormiano poi è lungo 15 mill. e largo 10.

La maggior lunghezza della parte anteriore del parietale sinistro è compensata da una minor larghezza del medesimo nella direzione antero-posteriore; la qual cosa per vero non può dimostrarsi mediante misure, non essendo visibile la sutura coronale corrispondente; ma si può argomentare osservando che, tanto la squama quanto la porzione mastoidea del temporale sono quivi più piccole che dal lato sinistro; difatto coteste due porzioni misurate insieme (partendo dall' estremità superiore del margine temporale dello sfenoide e giungendo all' angolo posteriore inferiore del parietale) offrono una lunghezza di 72 mill. e non di 78 mill. Se poi a queste somme aggiungiamo la misura in larghezza delle ali corrispondenti dello sfenoide si ottiene che il lato sinistro della testa fino alla squama occipitale è lungo 86 mill. ed il destro 106, per cui havvi una differenza di 20 mill., dovuta per due terzi alla differenza nelle ali dello sfenoide.

La sinostosi non s' incontra soltanto nel lato destro della sutura coronale, ma

ancora fra amendue i temporali ed i parietali; tutte le altre suture si mostrano invece aperte. Le altre anomalie, che offre questo cranio, sono un grande falso wormiano (1), che occupa la parte superiore della squama occipitale, con caratteri di duplicità; e la non comune ampiezza dei fori vascolari situati a sinistra, dove che a destra o sono chiusi, o scomparsi: questi fori sono il parietale ed il mastoideo.

A complemento di questa rapida descrizione aggiungeremo alcune misure

Capacità del cranio		1485 cent. cubici
Circonferenza orizzontale massima		470 mill. lineari
„ „ della metà destra	220 mill. lineari	
„ „ della metà sinistra	250 „ „	
„ „ post' auricolare .	240 „ „	
„ „ preauricolare . .	230 „ „	
Curva longitudinale totale		340 „ „
„ „ occipitale	140 mill. lineari	
„ „ parietale	100 „ „	
„ „ frontale	100 „ „	
Diametro antero-posteriore		154 „ „
„ trasversale		140 „ „
„ basilo-bregmatico		133 „ „
Indice cefalico 90, 90		
„ verticale 86, 36		

Nella faccia si riscontra una interessante anomalia, cioè che d'ambidue i lati il mascellare superiore non concorre a formare il margine sotto-orbitale. Tale mancanza è in parte supplita dall' estremità del processo mascellare del zigomatico che avanza verso il foro lacrimale (fig. 1ª, *a*) ed in parte dalla presenza d' un ossicino anomalo, lungo 10 mill. e largo 6, anidato nella porzione ascendente e posteriore del mascellare (fig. 1ª, *b*). Questo ossicino presenta un piano dal lato della faccia, un margine che continua esternamente ed in basso colla estremità suddetta del zigomatico, completando l' orlo sotto-orbitale, ed internamente presenta un brevissimo piano che s' articola coll' uncino dell' unguis e costituisce una parte dell' orificio e del canale lacrimale. Tale anomalia non offre alcuna differenza fra il lato destro ed il sinistro.

(1) Così chiamiamo, con Pozzi, le ossa che risultano in seguito alla divisione anomala d' un osso normale e che non si formano nè in una sutura, nè in una fontanella.

Oss. II. Teschio appartenente ad un monomaniaco dell' età di 38 anni, morto nel 1827 nel Manicomio di Bologna (*Prepar. 741, 9*).

Questo teschio ha le forme alquanto grossolane, ma regolari. Il cranio è ellittico, offre un wormiano nella fontanella anteriore lungo 20 mill., largo 10 ed un secondo molto più grande che occupa il posto della porzione superiore della squama occipitale, con traccie di divisione mediana. Le suture coronale, sagittale, ed occipitale sono ancora manifeste, quelle invece situate fra le grandi ali dello sfenoide ed il frontale, e fra la porzione basilare dell' occipite ed il corpo dello sfenoide sono ossificate. Dal lato interno poi del cranio tutte le commissure si mostrano ossificate, come pure la diploe fra le due tavole del cranio.

La faccia presenta ai margini sotto-orbitali una anomalia analoga ma non identica a quella del caso precedente, poichè d' ambidue i lati è escluso il mascellare superiore dal margine sotto-orbitale e tale esclusione è in parte supplita dall' estremità del processo mascellare del zigomatico, che s' avvicina al foro lacrimale (fig. 2ª, *a*); ma dal lato sinistro, in luogo dell' ossicino rinvenuto nella I. osserv., vi sono a complemento del margine orbitale dal lato interno due ossetti: uno superiore e l' altro inferiore. Il primo è lungo 15 mill. (fig. 2ª, *e*), s' articola in alto col processo mascellare del frontale, discende costituendo l' orlo esterno della fossa lacrimale e va a toccare l' estremità dell' uncino ungueale per formare l' orificio del canale lacrimale, per cui sostituisce il lato posteriore della branca ascendente del mascellare. Il secondo ossetto è lungo 7 mill. (fig. 2ª, *b*), ha una forma triangolare, colla punta rivolta al canal lacrimale e colla base ripiegata anteriormente sulla faccia, completando, in luogo del mascellar superiore, il margine sotto-orbitale fra il precedente ossetto e l' estremità del processo mascellare del zigomatico. Quest' ossetto si mostra manifestamente distinto dalle ossa vicine, mentre il primo è già saldato in alto tenacemente col mascellare e col frontale.

Nel margine sotto-orbitale destro la mancanza del mascellare non è supplita nella stessa guisa, colla quale è formata dal lato sinistro, ma in modo assai più complicato, poichè oltre l' intervento dell' estremità del processo mascellare del zigomatico (fig. 3ª, *a*), concorrono altri tre ossetti a completare il margine sotto-orbitale dal lato interno. Principiando dall' alto si vede un ossetto lungo 7 mill., il quale dista 4 mill. dal processo mascellare del frontale e costituisce la porzione superiore del bordo anteriore della fossa lacrimale, sostituendo esattamente in questa parte la porzione ascendente del mascellare (fig. 3ª, *e*). Il secondo ossetto è lungo 13 mill., principia ove finisce il primo, completa in basso ed in addietro la doccia lacrimale e s' articola coll' uncino dell' unguis, poscia raggiunge e tocca l' estremità del processo mascellare del zigomatico (fig. 3ª, *b*). In questo tragitto però non

segue una linea retta, formando la continuazione del margine sotto-orbitale, ma lascia anteriormente un incavo, che viene riempito da un terzo ossetto, di forma allungata, ed ambidue suppliscono la porzione orbitale del mascellare ascendente (fig. 3ª, *c*). Questi tre ossetti, tanto fra loro, quanto colle ossa vicine sono già saldati tenacemente e non si distinguono se non per la presenza di solchi profondi in basso, leggieri in alto. Del resto null' altro di notevole si riscontra nelle ossa della faccia.

Considerazioni — Da quanto abbiamo esposto risulta che in ambidue i casi narrati havvi il fatto dell' esclusione bilaterale del mascellar superiore dal margine sotto-orbitale. Ora dobbiamo ricordare, che quest' anomalia, non avvertita dagli anatomici passati, è stata rilevata da Gruber (1) nel 1877, il quale la rinvenne in 32 teschi della sua raccolta, che già ammonta a 4300 crani; esso poi riferisce che di cotesti teschi 28 appartenevano alla razza slava, 2 alla finlandese, 1 alla tartarica, ed 1 alla calmucca; per cui previde che anche nelle altre razze si debba riscontrare la stessa anomalia e noi abbiamo già fornita la prova che la sua previsione si è verificata negl' Italiani moderni. Havvi però una differenza e questa riguarda la proporzione collo stato normale, poichè Gruber ha trovato un caso sopra 134 teschi, dove che noi ne abbiamo rinvenuti due sopra 124 crani della nostra piccola collezione. Ma tale differenza non merita per ora alcuna importanza, potendo essere accidentale e non ripetersi in una raccolta più abbondante.

Ricorderemo ancora che Gruber fra i suoi 32 esemplari, ne rinvenne alcuni ($^1/_4$), in cui l' anomalia era semplice, cioè niun ossetto insolito si frapponeva fra la punta del processo mascellare del zigomatico e l' osso lacrimale; e verificò che tale disposizione costituisce lo stato normale in varie specie di mammiferi, ma che risalendo nella scala zoologica, sopra il cinocefalo adulto più non si riscontra in alcun altro primate. Più spesso però rinvenne un ossetto insolito, che chiama del canale lacrimale, il quale insieme al processo zigomatico su ricordato, suppliscono alla mancanza del mascellare, ed un esempio di quest' anomalia è la nostra I. osser.

L' ossetto del lacrimale non è per vero una novità, avendo pur esso la sua storia la quale essendo a pochi cognita, qui la ricorderemo brevemente. Il primo a tenerne discorso fu Beclard nel 1819 (2), esponendo i risultati dei suoi studi sull' osteosi: quest' autore diceva che nel mascellare superiore, oltre ai germi costanti di quest' osso havvi talvolta un germe lacrimale eccezionale, cioè un nucleo osseo, che forma poi la parte superiore del canale nasale, ed aggiunse che si trovano spesso traccie del medesimo in crani di diversa età, ma non parlò d' esclusione dell' osso mascellare del margine sotto-orbitale.

(1) Wenzel Gruber — Ueber den Infraorbitalrand bei Ausschliessung des Maxillare superius. Mem. de l' Academ. imp. des Sc. de St.-Pétersburg. Ser. VII. T. XXIV. N. 3; 1877.

(2) Beclard P. A. — Mémoire sur l' osteose. Lection I. Nouv. journ. de méd. chir. etc. Tom. IV. Paris 1819, p. 332, par. 139.

Dieci anni dopo la pubblicazione del lavoro di Beclard, tempo in cui era già morto questo valente anatomico, comparve Rousseau (preparatore del Giardino del Re di Francia) ad annunziare la scoperta d' un *nuovo unguis* e presentò una tavola rappresentante un cranio del Museo di Storia naturale (1), in cui eravi l' ossetto, già notato, del canale lacrimale; con questa differenza, che esso non raggiungeva l' orlo del foro lacrimale, nè il margine sotto-orbitale e quindi non presentava un piano dal lato della faccia (come è visibile nel caso nostro: fig. 1ª, *b*), ove eravi invece un altro ossicino più piccolo, il quale poi non escludeva il mascellare superiore dal margine sotto-orbitale.

Nel 1834 il Prof. Civinini (2) rappresentò e descrisse cinque esemplari dell' ossetto lacrimale di varia figura e grandezza, che stimò per tanti ossetti delle suture, cioè wormiani, formati per arresto di sviluppo dei nuclei più piccoli che non si erano saldati coi germi maggiori; la qual cosa poi non lo meravigliava, sapendo che nei rettili gli ossi analoghi ai lacrimali sono due per parte, che nei pesci vi è talvolta sotto l' orbita un seguito di piccoli ossi, che completano il quadro di questa cavità e sembrano analoghi ai lacrimali (Cuvier).

L' osservazione di Rousseau aveva però una importanza speciale, di rinvenire cioè due ossa anomale in luogo d' una intorno al canale lacrimale, la qual cosa non fu rilevata da alcuno, eccetto che da Gruber. Questo indefesso anatomico aveva pure esso nel 1850 verificata la presenza del lacrimale esterno, o piccolo unguis, quando nel 1877 ripigliando lo studio del margine sotto-orbitale potè ripetere tanto l' osservazione di Beclard quanto quella di Rousseau, e nello stesso tempo s' avvide che l' ultimo si era appropriata la scoperta più importante, cioè l' ossicino lacrimale di Beclard, ed aveva ceduto al medesimo l' osservazione di minor valore, cioè la presenza d' un wormiano situato nel margine sotto-orbitale, della qual cosa non s' avvide il Lauth, attribuendo a Rousseau l' osservazione dell' ossicino lacrimale.

Gruber però non si limitò a verificare i fatti suddetti, ma ne aggiunse dei nuovi, recando ancora l' importante notizia, sottintesa dal Civinini, che nè l' ossicino del canale lacrimale, nè il wormiano del margine sotto-orbitale si trovano nei mammiferi, per cui ambidue costituiscono una modalità speciale dell' uomo. I nuovi fatti che aggiunse sono la presenza d' uno od ambidue di quest' ossicini quando manca il mascellare superiore nel margine sotto-orbitale; la quale mancanza può anche accadere senza di loro, pel solo prolungamento dell' estremità del processo mascellare del zigomatico, o per l' aggiunta dell' uncino (amulo) del lacrimale, quando giunge fino al margine sotto-orbitale e si mette in contatto coll' estremità del processo suddetto.

Pigliando ora in considerazione la nostra II osservazione, ricorderemo che nel margine sott' orbitale sinistro rinvenimmo da prima nel lato interno un osso che

(1) Rousseau Emmanuel — Description d' un nouvel os de la face chez l' homme. Annales des Sc. naturelles Tom. XVII. Paris 1829, p. 8; planche V.

(2) Civinini Filippo pistoiese Prof. a Pisa d'Anatomia. Sul nuovo osso lacrimale del Dott. Rousseau. Opuscolo Pistoia 1834 in 8° con tavola.

non aveva nè la sede, nè i rapporti dell' ossicino del canal lacrimale di Beclard e che quindi non somigliava con quello della nostra I osserv., nè colle varietà ammesse da Gruber, poichè nel teschio suddetto l' osso in discorso, invece d'annidarsi nel margine posteriore della porzione ascendente del mascellare, in corrispondenza del canal lacrimale, ne costituiva il lato posteriore e superiore, raggiungendo in alto il processo mascellare del frontale ed in basso concorreva a formare l' orificio del canal lacrimale. E ricorderemo pur anche che inferiormente al primo osso, ve n' era un altro più piccolo triangolare, il quale rispetto alla sede può considerarsi analogo a quello di Beclard.

Dopo che avemmo compiuta questa osservazione ci mosse il desiderio di sapere se il primo osso, cioè quello che limita anteriormente la fossa lacrimale e che perciò può chiamarsi *osso accessorio della fossa lacrimale* (1), era una rarità anatomica; e con nostra grande sorpresa, esaminando i nostri teschi, rinvenimmo essere invece frequentissimo, colla sola differenza che molte volte la saldatura è così avanzata da lasciare una leggier traccia fra esso e la porzione ascendente del mascellare. Volendo poscia conoscere l' avviso dei Trattatisti intorno l' importanza di quest' anomalia, dopo molte ricerche infruttuose trovammo finalmente che Henle (2) si occupava della medesima, fornendo ancora alcune notizie storiche, che qui riferiremo.

Rosenmuller nel 1797 (3) vide due volte la parte del processo frontale del mascellare che è in connessione colla fossa lacrimale separata e ad un tempo congiunta mediante armonia coll' osso medesimo. Luschka nel 1858 (4) riscontrò la stessa cosa 7 volte in 60 crani, e Budge (5) 6 volte in 184 teschi. Tuttavolta Henle ritiene che quando si trova nel processo frontale del mascellare un solco a forma d' arco decorrente al davanti della cresta dall' estremità superiore all' inferiore, esso sia soltanto l' impronta d' una vena e chiama con Weber cotesto solco *sutura longitudinale imperfetta.*

Questo modo d' interpretare il solco può difficilmente contraddirsi quando esso è leggiero ed in continuazione con un foro vascolare, ma quando il foro è posto anteriormente e senza relazione col solco, lo che accade frequentemente; ed inoltre il solco è ben manifesto e profondo, allora la dottrina di Henle diventa assai dubbia, per farsi invece probabile l' ipotesi che il solco rappresenti la saldatura dell' osso accessorio della doccia lacrimale col processo frontale incompleto del mascellare. Preferendo noi questa seconda ipotesi pel nostro caso, ne risulta un nuovo modo di compensazione, quando in niun punto concorre il mascellar supe-

(1) Luscka chiama quest' osso *lacrimale accessorio;* noi non abbiamo preferita questa denominazione, potendo con essa comprendersi ancora l' ossetto del canale lacrimale del Beclard.

(2) Henle J. — Haordbuch der anatomie. Bd. I, s. 178. Braunschweig 1867.

(3) Rosenmuller — Partium externarum oculi humani descriptio. Lipsiae 1797, p. 17.

(4) Luschka — Muller' s. Archiv 1858, s. 304.

(5) Budge — Zeitschrift für ration. Med. R. III, Bd. VII, s. 278.

riore alla formazione del margine orbitale, e questo modo consiste nell' esservi in luogo di quello due ossetti, i quali sono 1° l' osso accessorio della fossa lacrimale di Rosenmuller, 2° l' ossetto del canale lacrimale di Beclard; ed inoltre nella presenza del processo mascellare del zigomatico molto prolungato.

Ricorderemo per ultimo che descrivendo l' orbita destra del medesimo teschio (Oss. II) rinvenimmo la costruzione del margine inferiore anche più complicata che dal lato opposto; poichè non solo vi era in gran parte l' osso accessorio della fossa lacrimale, e l' ossetto del canale lacrimale, come nell' orbita sinistra, ma ben anche il wormiano di Rousseau, per cui può ammettersi un altro modo di formazione del margine orbitale, non contemplato da Gruber, e così portare ad otto le sei varietà di composisione del margine sotto-orbitale in caso di mancanza del mascellar superiore.

Prospetto

I. Il margine orbitale inferiore, in caso di mancanza della porzione fornita dal corpo del mascellare superiore, viene formato in 6 modi.

1° Dal processo mascellare del zigomatico notevolmente allungato.

2° Dal processo suddetto e dall' amulus lacrimale.

3° Dal processo suddetto e dall' ossetto del canal lacrimale di Beclard.

4° Dal processo suddetto e dall' ossetto marginale di Rousseau (Wormiano di Gruber).

5° Dal processo suddetto, dall' amulus lacrimale, e dall' ossetto marginale.

6° Dal processo suddetto, dall' ossetto del canale lacrimale, e dall' ossetto marginale.

II. Il margine orbitale inferiore, in caso di mancanza tanto della porzione fornita dal corpo, quanto della porzione lacrimale fornita dal processo frontale del mascellare, viene formato in due modi.

1° Dal processo mascellare del zigomatico notevolmente allungato, dall' ossetto del canal lacrimale di Beclard, e dall' osso accessorio della fossa lacrimale di Rosenmuller.

2° Dal processo suddetto, dall' ossetto del canal lacrimale, dall' ossetto marginale di Rousseau e dall' osso accessorio della fossa lacrimale di Rosenmuller.

Egli è probabile che queste due varietà non sieno le sole che potranno rinvenirsi in caso di mancanza totale del mascellare dal margine sotto-orbitale; ma i fatti esposti bastano per provare che in diversi modi può essere supplita cotesta mancanza e per promovere la questione sulla natura degli ossi suppletivi. Egli è noto che non tutti quelli che si trovano nei teschi sono wormiani, cioè formati nelle suture e nelle fontanelle, ma che se ne danno altri, i quali sono la conseguenza

della divisione anomala d' un osso normale per cui sono falsi wormiani. Ora rimane a sapersi se l' ossetto del canale lacrimale di Beclard, se l' ossetto marginale di Rousseau, se l' osso accessorio della fossa lacrimale di Rosenmuller sono veri o falsi wormiani. Per rispondere a tale quesito basta a nostro avviso considerare per una parte che l' osso mascellare superiore è in questi casi sempre incompleto, e lo è nella stessa misura equivalente alla grandezza delle ossa suppletorie, per l' altra che l' osso unguis non presenta alcun difetto di sviluppo, per cui il centro dell' osso nuovo non corrisponde alla sutura, ma nello spazio lasciato dal mascellare difettoso, sicchè sembra ragionevole l' ammettere che nei casi descritti da Gruber (meno quello in cui l' uncino dell' unguis era prolungato) e da noi, l' osso mascellare sul margine orbitale abbia offerto insoliti punti d' ossificazione, i quali non si sono completamente saldati colle ossa vicine.

3. Un' altra anomalia che richiamò, più della precedente, l' attenzioue dei moderni anatomici si fu la divisione trasversale del zigomatico, da risultarne due porzioni: una superiore, che comprende incirca tre parti dell' osso, ed una inferiore che comprende il rimanente ed ambidue riunite mediante sutura. Il primo che descrisse questa anomalia fu Sandifort nel 1769, poscia alcuni altri senza annettervi grande importanza; ma quando comparve la dottrina di Darwin allora si moltiplicarono le ricerche per trovare in essa argomenti pro o contro la medesima, sicchè ora si possedono molte osservazioni, di cui forniremo quì l' elenco.

ELENCO DELLE OSSERVAZIONI

AUTORI	Numero dei teschi	NOTIZIE SULL' ANOMALIA	INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA
SANDIFORT	1	A destra del teschio d' un adulto.	— Observationes anatomico-patologicae. Lugduni Batav. 1779, Lib. III, cap. 8, p. 113.
BLUMENBACH I. F.	2	Un teschio d' un Calmucco ed un altro d' un Americano del nord.	— Decades collectiones suae craniorum diversarum gentium. Gottingae 1790-1804, 1820 (Indicazione di Garbiglietti ricavata dalle Tavole 5 e 38).
SOEMMERING S. T.	1	Teschio d' un negro. - -	— Vom Bau des menschlichen Körpers. Edit. 2ª, Francofort 1800, Tom. I — Trad. ital. Firenze 1818. Vol. I, p. 151. Nota.
DUMERIL	1	Teschio d' un veneziano. -	— Bullet. de la Soc. Philomatique. Tom. III, p. 122. An. XI de la Republ.
SPIX J. B.	1	Teschio d' un feto, in cui il malare era diviso in tre porzioni.	— Cephalogenesis. Monachü 1815, p. 45.
LAURILLARD	2	Due teschi probabilmente parigini.	— Leçons d' Anat. comparée de G. Cuvier. Edit. 2e. par MM. Fr. Cuvier et Laurillard. Paris 1837. Tom. I, p. 381.
CIVININI F.	1	Nel zigoma destro d' un teschio toscano (da noi veduto) in cui l' anomalia è anche allo stato di sutura. Questo teschio offre inoltre un gran wormiano fra la sutura della porzione squamosa ed il parietale sinistro.	— Indice del Museo della R. Università di Pisa. Lucca 1842. N. della prep. 593.
LUCAE I. C.	1	Teschio Giavanese della Collezione di Frankfurt coll' anomalia a sinistra.	— Zur organischen Formenlehre. Frankfurt a M. Tafel IX.
BRESCHET G.	10	Sei casi a destra, tre a sinistra, ed uno in ambidue i lati.	— De l' os malaire. Annales des Sc. natur. Ser. III, Zoologie Tom. I, p. 25. Paris 1844.
SCHULTZ G. I.	1	In un teschio a destra. -	— Bemerkungen ueber der Bau normaler Menschenschadel. St. Petersburg 1852, s. 57. Tafel II, fig. 3 (Mem. non veduta da noi).
BARKOW H. C. L.	2	In due teschi di Negri, da ambidue i lati.	— Comparative Morphologie der Menschen. Breslau 1862, s. 74, 76. Taf. 37, 38.
DUSSEAU J. L.	1	Teschio d' un chinese in ambidue i lati.	— Musée Vrolik par J. L. Dusseau. Amsterdam 1865, p. 41, N. 112.

AUTORI	Numero dei teschi	NOTIZIE SULL'ANOMALIA	INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA
Garbiglietti Ant.	2	Un teschio etrusco in ambidue i lati, ed un teschio d' un fanciullo di due mesi.	— Giornale della R. Accad. di Med. di Torino 1866, p. 7.
Davis Bern.	10	In razze inferiori prognate (Due soli esempi appartengono all' autore, gli altri sono forniti da osservatori il di cui nome qui abbiamo taciuto per brevità).	— Thesaurus craniorum. London 1867, p. 293 — Lettera del Giornale della R. Accademia di Med. di Torino 1871, p. 414.
Calori L.	1	In una donna bolognese dal lato destro.	— Mem. dell' Accad. delle Scienze di Bologna 1868. Ser. II, Tom. VIII, p. 417.
Wenzel Gruber	14	Tutti teschi slavi, di cui due appartenevano a donne.	— Akad. med. chir. in St. Petersburg 1868-69-1871-72. — Archiv. von Reichert. Leipzig 1873, s. 234 — 1875, s. 194.
Hyrtl J.	2	Un uomo e una donna. -	— Vergegenheit und Gegenwart der Museum für menschl. Anatomie a. d. Wiener Universität. Wien 1869, s. 52, 66. N. 112, 620 (Mem. da noi non veduta).
Nicolucci G.	1	Teschio d' un giovinetto italiano coll' anomalia a sinistra.	— Giornale della R. Accad. di Med. di Torino 1871, N. 9 — Archivio per l' Antropologia. Firenze 1871, Fas. 3.
De-Lorenzi	4	I teschi erano turinesi, fra cui quello d'una donna.	— Giornale della R. Accad. di Torino 1871, p. 98 — Ibid. 1872, p. 76.
Mantegazza P.	1	Teschio d' un siciliano moderno, coll' anomalia al lato sinistro.	— Archivio per l' Antrop. Firenze 1872, Vol. II, p. 174.
Morselli En.	1	Teschio di donna palermitana, coll' anomalia in ambidue i lati.	— Annuario dei Naturalisti — Anno VII. Modena 1873.
Hilgendorf	33	Crani Giapponesi, in cui il malare era più o meno diviso.	— Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur-und Volkerkunde Ost-asiens. III Heft. Yokohama, September 1873, s. 1. Lancet. London 1875 (Articoli non veduti).
Zoia Giov.	2	Teschi lombardi. - - - -	— Descrizione del Gabinetto d' Anatomia di Pavia 1873 — Osteologia N. 91, 95.
Giovanardi	1	Teschio d' un bambino di sei anni. L'anomalia era dal lato sinistro.	— Lo Spallanzani. Modena 1876, p. 167.
Flesch Max	3	Del Museo di Würzburg di cui uno di franconia, un altro d' origine ignota, ed un terzo Dajak.	— Verhandlungen d. physic. medic. Gesellschaft zu Würzburg. Neue Folge. Bd. I, s. 46, Würzburg 1876, Tafel. 1.
Amadei G.	5	Teschi dell' Ossario di Solferino. L' autore non fornisce alcun dato per sapere se appartenevano agl' italiani, o ai francesi, o agli austriaci ivi raccolti.	— Archivio per l'Antropologia. Firenze 1877, Vol. VII, p. 3.

AUTORI	Numero dei teschi	NOTIZIE SULL' ANOMALIA	INDICAZIONE BIBLIOGRAFICA
Hyrtl J.	4	. . . .	— Cranium criptae Metelicensis, s. Syngnathiae verae et spuriae casus singularis. Vindobonne 1877, p. 25.
Wernich A.	13	Sopra 50 teschi Giapponesi ne trovò quattro che avevano l' osso zigomatico totalmente diviso e nove con indizio di divisione.	— Geographisch-medicinische Studien nach den Erlebnissen einer Reise um die Erde. Berlin 1878, s. 103.
Riccardi P.	7	1 Etrusco, 1 dell' isola di Liri, 3 Marchegiani, 1 Acinese, 1 di Negra.	— Archivio per l'Antropologia. Firenze 1877, Vol. VII, p. 1 — Ibid. Vol. IX, p. 149, 1879.
Wenzel Gruber	10	Aggiungendo gli altri 14 teschi superiormente notati, l'A. possede 24 esemplari di vera divisione del zigoma, di cui 23 appartengano alla razza slava.	— Virchow' s Archiv. Bd. 77, s. 116, Berlin 1879.
Taruffi C.	1	Teschio di donna bolognese coll' anomalia a destra, caratterizzata da traccie di sutura ai lati ed ossificazione del centro.	— Osservazione inedita. Il teschio apparteneva ad una donna di nome Rosa Montanari, e fa parte d' una collezione di 70 crani di dementi ed idioti esistenti nel Museo d' Anat. patol. di Bologna, che porta il Numero 741.

Alcuni dei suddetti osservatori hanno notato che l' osso zigomatico diviso trasversalmente subisce alcune modificazioni: per es. il Zoja lo vide più grande dell' ordinario, ed il Riccardi rilevò che mentre quest' osso nello stato normale varia fra i 21 ai 30 mill., quando è diviso oscilla fra i 28 ai 36 mill., e vide inoltre un cambiamento di forma nelle articolazioni, poichè trovò in 6 casi la sutura maxillo-malare disposta a V, colle branche dirette all' avanti, in luogo di descrivere un S; ed altrettanto trovò nella sutura temporo-malare, colla differenza che le branche erano rivolte esternamente. E sebbene convenga che coteste forme articolari si vedono ancora in zigomatici normali, tuttavolta è inclinato a credere (con troppa fiducia) che anche in questi casi esse siano indizio di anomalia preesistente.

L' interpretazione di questa anomalia era molto facile nel secolo scorso, avendo già Kerkring (1) e più tardi Lieutaud (2) accennato che il zigomatico possede in origine due punti d' ossificazione, tuttavolta niuno si curò di trarne profitto per fornire una spiegazione dell' anomalia stessa. L' interpretazione divenne invece difficilissima nel presente secolo, dopo che Meckel annunziò d' aver sempre veduto il zigomatico formato da un sol nucleo (3), per cui si ricorse ad una condizione accidentale per spiegare l' anomalia. Ed a tale espendiente ricorreva tanto più volontieri nel 1830 Laurillard, perchè aveva trovato in certe scimmie la divisione del zigomatico perfettamente simile a quella dell' uomo (4). Argomento, il di cui valore ci è perfettamente oscuro.

Nel 1844 Breschet tornò a studiare le prime fasi dell' osso malare e convenne con Meckel che nella grande maggioranza dei casi non havvi che un sol punto d' ossificazione; ma aggiunse che gli angoli dell' osso si mantengono cartilaginei e che talvolta quelli del lato inferiore si ossificano separatamente ed in tal guisa spiegava l' origine dell' anomalia. Questa spiegazione però non poteva soddisfare lungo tempo, bastando per riconoscerne l' insufficienza, riflettere che la divisione degli angoli non include il concetto di separazione totale della parte inferiore dell' osso.

Nel 1866 Garbiglietti di Torino risvegliò di nuovo la questione embriologica e richiamò in onore l' opinione di Kerkring e di Lieutaud, aggiungendo poi che la porzione inferiore del malare in caso di divisione trasversale è omologa dell' osso *ipotimpanico* degli uccelli, dei pesci, e d' alcuni rettili; per cui da un lato risuscitava un' opinione contradetta dai moderni embriologisti, e per l' altra restrin-

(1) Kerkringe — Spicilegium anatomicum, nec non osteogenia foetum. Amstelodami 1670, p. 232. Questo autore non espone nè con chiarezza, nè con sicurezza l' osservazione dei due nuclei, ma questi possono indursi da quanto dice.

(2) Lieutaud — Anatomie. Edit. 2ª, 1876, Tom. I, p. 184. Quest' opera essendo corredata di note da Portal, alcuni hanno attribuite opinioni al secondo mentre appartenevano al primo, ed una di queste è la presenza di due punti d' ossificazione del zigomatico.

(3) Meckel G. F. — Manuel d' Anatom. Traduct. Paris 1825, p. 655.

(4) Laurillard — Op. cit. p. 381.

geva le vedute di Cuvier, il quale riguardava tutto il zigomatico, e non soltanto la sua parte inferiore, equivalente all' osso ipotimpanico: veduta poi messa in dubbio da Riccardo Owen.

Due anni prima Rambaud e Renauld (1) espressero una nuova idea intorno allo sviluppo dell' osso, confermando bensì l' unico centro d' ossificazione, ma aggiungendo che è composto di tre punti, i quali appariscono di buon' ora e sollecitamente si riuniscono. Cotesti punti si riconoscono più spesso verso la fine del 2° mese di vita intrauterina, e mediante glicerina si possono rendere visibili durante il terzo e quarto mese. Due sono superiori e destinati a formare la porzione orbitale; il terzo è situato nel mezzo della superficie triangolare, destinata a formare la parte maxillo-temporale. Questo punto poi è separato dai due superiori mediante *un solco cartilagineo, di cui le traccie persistono lungo tempo nel feto e nel fanciullo.*

Non essendo stata finora contradetta da alcuno questa disposizione, naturalmente essa fornisce una chiara spiegazione dell' anomalia in discorso, ed il primo che si è approfittato della medesima, è stato Gruber, ammettendo che ogni qual volta nel suddetto solco s' arresta l' ossificazione, accade la bipartizione dell' osso malare sotto la forma di sutura trasversale fra le due parti.

Queste vedute puramente anatomiche erano troppo modeste per alcuni antropologi, i quali vollero piuttosto rinvenire nell' anomalia in discorso un carattere di grande importanza, come si era tentato per altre. Morselli nel 1872 avendo osservata la divisione del zigomatico nel teschio d' un palermitano, con capacità del cranio alquanto inferiore dall' ordinario e con altri lievi difetti, ritenne il caso propizio per applicare la dottrina darwiniana e giudicare l' anomalia per un carattere regressivo verso il *tipo pitecoide.* Anzi senza alcuna riserva stabilì il principio che qualunque deviazione dal tipo è sempre un regresso verso le classi inferiori.

Quest' ardita interpretazione suscitò naturalmente una viva polemica con Garbiglietti (2), alla quale pigliò parte anche il Baraldi, (3) con un argomento del tutto nuovo: esso sostenne che i casi di dupplicità del malare, riscontrati in alcuni mammiferi, non sono un fatto inerente alla specie, bensì una accidentalità individuale; e con questa premessa (rifiutata dai naturalisti) trasse l' induzione che quando s' incontra l' anomalia nell' uomo non si tratta d' *atavismo,* ma d' una accidentalità, forse prodotta da causa meccanica, simile a quella che dà luogo agli ossi wormiani.

Per determinare il valore antropologico dell' anomalia in discorso non basta che essa rappresenti uno stato permanente in alcune scimie, ma è ancora necessario conoscere la frequenza relativa della medesima, se non in tutte, almeno

(1) Rambauld et Renauld — Origine des os. Paris 1864, p. 161, Tab. XIII, fig. 4ª, 5ª.

(2) Garbiglietti Antonio — Giornale della R. Accad. di Med. di Torino 1872. Ibid. 1874.

(3) Baraldi G. — Rendiconto della R. Accad. di Torino 15 ottobre 1872. — Atti della Soc. toscana di Sc. natur. residente in Pisa. Vol. II, 1875, con tavole.

nelle principali razze della specie umana. E già parecchi autori hanno forniti i risultati delle loro osservazioni in proposito. De Lorenzi nel 1871 riferiva che i suoi 4 casi della Collezione antropologica di Torino stavano nella proporzione del 2 % cogli altri teschi, per cui ritenne il fatto abbastanza frequente se non nelle schiatte europee, almeno nelle italiane. Ma gli anatomici che possedono ricchi Musei risposero che cotesta proporzione era grandemente esagerata, fra cui Wenzel Gruber, il quale nel 1873 aveva trovato in media un solo caso ogni 700 crani della sua ricca raccolta.

L' illustre antropologo Davis possedendo un ricco Museo di crani indiani, negri, daiaci, del Borneo ecc., in cui trovò con qualche frequenza la divisione del malare, manifestò nel 1867 l' opinione che essa fosse assai più comune nelle razze inferiori che nelle europee. Ma anche questa illazione non venne accolta favorevolmente, poichè dai successivi fatti pubblicati in Europa, risultava, non già la proporzione del De Lorenzi, ma un numero più che sufficiente di casi per dimostrare inesatta l' opinione di Davis. Anzi il giovane antropologista Riccardi (1) ha sostenuta abilmente la tesi, che la divisione del zigomatico si trova più spesso nei crani di razza superiore e ben conformati, tanto moderni quanto antichi (Etruschi), non avendola mai rinvenuta nei Papuani, Americani, Peruviani della ricca raccolta di crani in Firenze. Aggiungeva inoltre che l' anomalia umana non rappresenta esattamente lo stato normale d' alcuni animali (2), ma lo ricorda soltanto, e talvolta s' allontana anche maggiormente, avendo confermato in un caso, quanto aveva veduto Spix, cioè l' osso malare tripartito.

Mentre si discuteva l' opinione di Davis comparve nel 1873 Hilgendorf a sostenere che la divisione del zigomatico in luogo di prevalere nelle razze inferiori, era invece frequentissima in una razza civile dell' Asia. Esso affermava d' aver veduti 33 teschi Giapponesi con indizi più o meno manifesti di divisione del malare ed in due la divisione completa; da ciò indusse che almeno un terzo dei Giapponesi possedeva quest' anomalia. Sembrandogli poi straordinaria la differenza colle altre razze stimò razionale di chiamare l' anomalia suddetta *os japonicum,* nella stessa guisa che Tschudy (3) aveva denominato *os incae* l' interparietale o vero epactale di Virchow dei primi abitatori del Perù.

Questa prevalenza nei Giapponesi venne confermata da Wernich, sicchè sembrava un fatto bene accertato. Ma Wenzel Gruber nel suo ultimo lavoro si è opposto risolutamente ai computi fatti e quindi alla nuova denominazione, perchè in

(1) Riccardi Paolo — Archivio per l' Antropologia. Vol. VIII, p. 1, Firenze 1878.

(2) Nei teschi dei pesci ed in parecchi rettili si trovano due ossa distinte, cioè il timpano-jugale ed il jugale che riunendosi vengono a formare il zigomatico. Negli uccelli invece, massime adulti, le due parti sono completamente fuse. Nei mammiferi l' osso malare è unico, salve poche eccezioni, in cui persiste diviso dopo la nascita: p. es. v' hanno scimie con divisione costante, mentre ve ne sono altre senza divisione.

(3) Tschudy e Rivero — Antiquites Peruvicanes. Ch. II, p. 25, 1853.

quelli furono accumulati casi, in cui erano traccie dubbie di originaria divisione, coi pochi in cui esisteva reale sutura; dove che la divisione completa era soltanto in 4 casi. Ora esso contrappone a questi ultimi 60 osservazioni già pubblicate, fatte sopra altri popoli, di cui 23 appartengono alla razza slava, per cui rimane contradetta la prevalenza nei Giapponesi.

4. Oltre la sutura trasversale anomala sono state notate altre divisioni dell' osso zigomatico, intorno alle quali si rimane grandemente in dubbio se siano congenite. Zoia nel 1873 (1) descrisse un teschio lombardo, in cui l' apofisi frontale del malare sinistro era divisa in due branche: una interna più grossa che s' articolava coll' apofisi angolare esterna del frontale come di norma, mentre la esterna, più gracile, lunga mill. 21, terminava superiormente ad estremità libera ed acuminata. L' estremità inferiore era saldata completamente sul corpo dell' osso zigomatico, ma si vedevano traccie da far ritenere che in origine fosse stata divisa. Anche la superficie orbitale del zigoma era anomala: offriva due branche, una anteriore e l' altra posteriore, che si articolavano col mascellare superiore corrispondente, lasciando tra loro un' ampia apertura; un' altra apertura più piccola infine esisteva tra la branca ed il corpo del zigomatico. L' osso mascellare superiore dello stesso lato presentava una fenditura lineare verticale, penetrante nell' antro d' Higmoro, estesa dal margine inferiore della base dell' orbita fino all' alveolo del primo grosso dente molare.

Nel 1879 Riccardi (2) descrisse il cranio d' un sardo, con una sutura anomala, orizzontale, lunga 7 mill., che partiva dal bordo temporale del zigomatico, ove si curvava per continuarsi coll' arcata zigomatica (punto iugale di Broca) e andava verso il luogo, in cui il malare si salda col mascellare. Noi possediamo un teschio (N. 1017), in cui il processo frontale è diviso dal corpo del malare, mediante una linea orizzontale, che nasce dalla sutura dell' apofisi zigomatica del temporale e và al margine orbitale, ove si continua col piano inferiore dell' orbita. Osservando questo preparato ci nacque da prima l' idea che si trattasse d' una anomalìa analoga a quella del Riccardi, ma poscia vedendo che il processo frontale è in un piano alquanto inferiore a quello del corpo zigomatico, che inoltre il processo suddetto si mostra leggiermente spostato dall' estremità jugale del frontale e che nella gobba frontale si vedono due solchi disposti a V, ci persuademmo trattarsi di frattura consolidata.

5. Wenzel Gruber ha rivolto recentemente (3) il suo esame sopra le fessure ed i solchi situati posteriormente nel zigomatico, e fra i 4000-5000 teschi della

(1) Zoia Giovanni — Descrizione del Gabinetto d' Anatomia di Pavia — *Osteologia* — Prepar. n. 96. Pavia 1873, p. 49.

(2) Riccardi P. — Rara anomalia dell' osso malare — Archivio per l' Antrop. Vol. IX, p. 142, 1879.

(3) Wenzel Gruber — Virchow' s Archiv. Bd. 77, s. 120, 1879.

sua raccolta ha trovato coteste impronte 428 volte in uno, o in ambidue i zigomi. Ha poi notato che le medesime possono anche esser doppie, ma ciò che più importa si è che quando sono semplici, solo raramente coesistono con la divisione o solcatura anteriore, ed anche verificandosi la coesistenza, il livello non è sempre il medesimo, essendo talvolta il solco posteriore molto più alto, sicchè l' autore ne induce che tali impronte non sono un indizio sufficiente di divisione del zigomatico e che i casi di tal genere vanno esclusi dal novero dei malari bipartiti.

6. Lo stesso infaticabile autore aveva in precedenza (1873) notata un' altra anomalia di minor conto (1). Esso aveva rinvenuto in 4000 crani 10 casi d' ossa wormiane incuneate nella sutura zigomatico-temporale, ora dall' alto al basso, ora dal basso all' alto; ed una sola volta vide un notevole wormiano nella armonia zigomatico-mascellare. Riccardi poscia verificò in due teschi l' ultimo fatto, colla differenza che i wormiani erano piuttosto piccoli (2). Gruber poi considerando la posizione di cotesti ossi sopranumerari non li crede veri wormiani, ma piuttosto epifisi persistenti, sviluppate mediante un punto d' ossificazione accidentale, ora in corrispondenza della futura scabrosità per l' inserzione del muscolo massetere, ora nell' estremità del processo zigomatico cartilagineo dell' osso temporale, o del mascellare. Calori poi in precedenza (3) aveva veduti due volte in teschi d' exencefali due ossetti piatti, sopranumerari attaccati alle apofisi zigomatiche dei temporali, mediante tessuto fibroso, intorno ai quali non volle avventurarsi in congetture prive di fondamento.

7. Gruber (4) ha inoltre rilevata una nuova anomalia, che ha chiamata *arco maxillo-temporale intra-iugale*, diverso dall' arco maxillo-temporale infra-iugale veduto in uno spagnolo da Dieterichs (5). Il primo ha riscontrato il suo arco 15 volte nella sua ricca collezione di crani in Pietroburgo (in 13 maschi e 2 femmine); ed aveva sede nel lato interno del malare. Era esso formato dalla connessione diretta d' una sporgenza del mascellare superiore con un prolungamento del processo zigomatico del temporale e solo in due casi era associato ad altre anomalie, cioè alla divisione trasversale del malare superiormente accennata. L' autore avverte per ultimo che quest' arco si trova fisiologicamente nell' erinaceo, nel maiale, nel tapiro, nel rinoceronte e nel cavallo.

(1) Wenzel Gruber — Ueber supernumeräre Knochen im Jochbogen — Reichert' s Archiv. Leipzig 1873, p. 195 e 337.

(2) Riccardi — Archivio cit. 1879, p. 138.

(3) Calori Luigi — Mem. dell' Accad. delle Scienze, Ser. II, Tom. VIII, p. 423. Bologna 1868.

(4) Wenzel Gruber — Reichert' s Archiv. Leipzig 1873, s. 208 — Ibid. 1876, s. 230.

(5) Dieterichs C. — Beschreibung einiger Abnormitaten des Menschenschädels — Diss. Basel 1842. L' arco maxillo-temporale infra-iugale scorreva in basso ed in avanti del zigomatico, nel margine inferiore di questo. L' osservazione è rimasta finora unica.

8. Anche il processo frontale del zigomatico offre le sue varietà, poichè esso non sale sempre direttamente, ma talvolta offre una convessità posteriore e tal' altra una vera sporgenza nella stessa direzione (*processus marginalis Luschkae*). In quest' ultimo caso parve a G. I. Schultze trattarsi d' un carattere di razza per certi popoli; ma Luschka (1) avendo rinvenuto cotesto processo in 130 teschi di razze le più diverse o in ambidue i lati, o più spesso a destra si oppose al valore di cotesto carattere e ritenne che la sua presenza sia un fatto puramente individuale e conseguenza dell' ossificazione dello strato fibroso della fascia temporale, che si attacca più fortemente in cotesto punto.

9. Le anomalie della sutura zigomatico-sfenoidale sono state studiate da Magnus in 72 teschi (2). Avanti però di descriverle ricorda che la parte più bassa del margine zigomatico della gran ala dello sfenoide ha la forma costante d' un piccolo processo che tocca il mascellare, per cui lo denomina *processo sfeno-mascellare*. La prima deformità che descrive è un prolungamento del processo malare del mascellare superiore (spina zigomatica) che s' introduce nella parte più bassa fra l' osso zigomatico e la grand' ala dello sfenoide; oppure rinvenne piccole ossa wormiane nella sutura suddetta. Noi in due crani, fra i pochi che avevamo sul tavolo, abbiamo veduto il malare non solo articolarsi posteriormente col frontale (lochè è normale) ma prolungarsi per 5 o 6 millimetri in alto fra l' ala dello sfenoide ed il frontale. In un terzo teschio questo prolungamento era convertito in un mediocre falso wormiano, che occupava ancora una piccola porzione dello stesso malare; nel medesimo teschio poi eranvi due wormiani lungo la sutura fra la grand' ala dello sfenoide ed il zigomatico.

Il suddetto Magnus ha vedute due volte tanto a destra quanto a sinistra, una fessura larga 3-4 linee, che passava a traverso la sutura zigomatico-sfenoidale: in un caso essa decorreva fino alla fessura orbitale inferiore, nell' altro aveva la forma d' una apertura ovale, separata dalla fenditura orbitale inferiore mediante un debole ponte osseo. Un' altra volta rinvenne parecchie piccole aperture, come indizi della fessura suddetta. E per ultimo s' incontrò in un teschio, in cui la parte inferiore di detta sutura aveva assunta la forma d' una incisura. Ora l' autore è d' avviso che tali aperture potrebbero in qualche caso acquistare un interesse chirurgico permettendo il passaggio d' istrumenti chirurgici, o piuttosto lo scolo d' ascessi orbitali.

(1) Luschka — Reichert' s und Duboi' s Archiv. 1869, s. 326.
(2) Magnus H. — Virchow' s Archiv. Berlin 1869. Bd. 47, s. 214.

F. 1.

F. 2

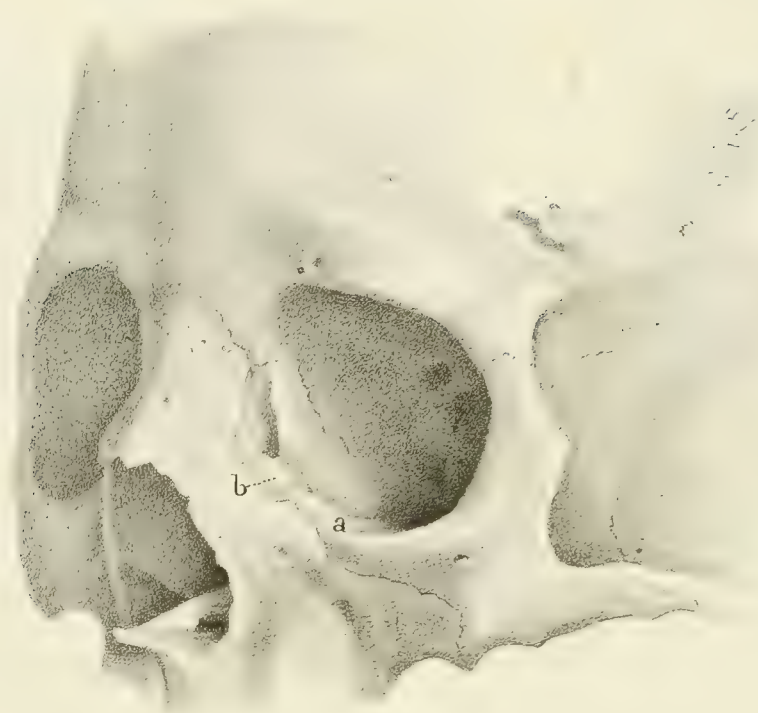
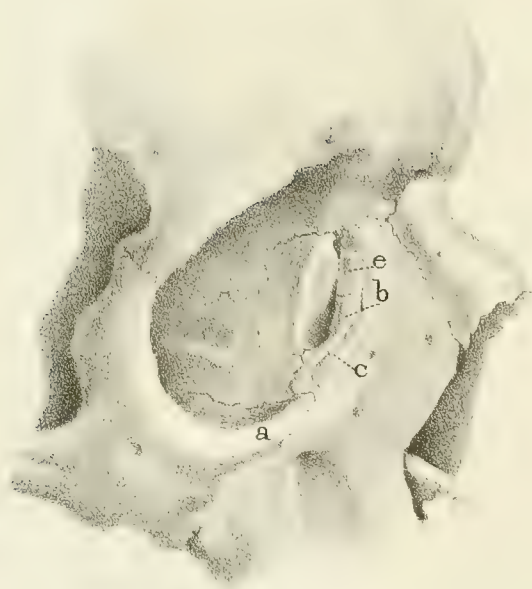
e
b
c
a

F. 3.

e
b
a

A. Maccaferri dis.o dal vero

C. Bettini dis in pietra

Lit. G. Wenk

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola

Fig. I. Orbita sinistra (Oss. I).
a angolo superiore prolungato del processo mascellare del zigomatico.
b ossetto del canale lacrimale di Beclard.

Fig. II. Orbita sinistra (Oss. II).
a angolo superiore prolungato del processo mascellare del zigomatico.
b ossetto del canale lacrimale di Beclard.
c osso accessorio della fossa lacrimale di Rosenmuller.

Fig. III. Orbita destra (Oss. II).
a angolo superiore prolungato del processo mascellare del zigomatico.
b ossetto del canale lacrimale di Beclard.
c wormiano nel margine sotto-orbitale di Rousseau.
e osso accessorio della fossa lacrimale di Rosenmuller.

DI UNA CLASSE

DI MECCANISMI A TRE MEMBRI

MEMORIA

DEL PROF. GIACINTO GAUTERO

(Letta nella 13ª Adunanza 19 Febbraio 1880)

1°) Gli organi cinematici (Giulio — Elementi di cinematica) conosciuti sotto i nomi di Cunei, Eccentrici, Manovelle a gruccia, Bocciuoli cilindrici, Bocciuoli conici, ... sono in generale considerati come non aventi tra loro un modo di formazione comune, e studiati isolatamente con criterii speciali ad ognuno di essi. — Affine di ridurre tutti questi organi, per quel che ne riguarda la genesi ad un concetto unico, e poterli così considerare come casi particolari, come forme speciali di uno solo, basta osservare :

1° che tutti questi organi consistono di tre membri A, B, C.

2° che il legame β_a, che vincola o si intende vincoli due di questi membri A, B, è costituito da un punto a del primo, che percorre una linea β del secondo [1].

3° che i legami costituiti dalle coppie di superficie di contatto A-C, B-C, che vincolano i due corpi A, B al terzo C, sono completi, ossia tali che le traiettorie che possono descrivere i singoli punti dei primi due corpi, relativamente all' altro sono pienamente determinate.

Da queste proprietà che definiscono completamente tutta una classe di organi, si vede che questi presi uno ad uno, corrispondono ad altrettante soluzioni particolari del problema generale.

[1] Al punto a viene sostituito secondo i casi un piccolo piuolo, o una rotella, o un semplice bottone, e alla linea β una corrispondente superficie canale. — Invece di un solo punto a se ne possono avere varii e ad ognuno di essi corrisponde una determinata linea β.

Se l' assieme di questi punti a costituisce una linea, allora alla linea β, viene sostituita una superficie. — Quest' ultimo caso si verifica notamente, nei cunei e negli eccentrici, quando l' estremità della stanghetta è uno spigolo.

Data la legge del movimento di due corpi A, B per rapporto ad un terzo C, trovare i vincoli A-C, B-C, β_a, che legano vicendevolmente gli stessi corpi.

Si vede anzi che questa classe di organi, non è che un caso particolare di quella più generale, composta di tre membri e corrispondente alla soluzione del problema :

Data la legge del movimento di due corpi A, B per rapporto un terzo C, trovare le superficie di vincolo A-C, B-C, e A-B.

Egli è infatti manifesto, che se si intende, che la superficie del corpo A che deve mantenersi costantemente in contatto colla corrispondente del corpo B, si riduca ad un punto; il vincolo A-B, si cambierà nel vincolo β_a — È ben vero che il vincolo A-B, vale a determinare il moto relativo dei due corpi A, B, per quel che riguarda le traiettorie descritte dai punti degli stessi, mentre che il vincolo β_a, è a ciò insufficiente : ma per la esistenza del meccanismo questo non è necessario.

2°) Da quanto precede risulta, che il processo a seguirsi per trovare il vincolo β_a, è lo stesso di quello a seguirsi per trovare uno qualunque dei vincoli A-C, B-C. Ora si sa che per trovare uno qualunque di questi vincoli, come l' A-C, basta intendere che solidaria al corpo A, si muova una superficie S_A, e cercare la superficie S_C, inviluppante la S_A, nelle diverse posizioni che la stessa viene successivamente ad occupare nel corpo C. Il vincolo cercato sarà costituito dalle due superficie S_A, S_C, appartenente la prima al corpo A, e la seconda al corpo C.

Lo stesso processo applicato alla ricerca del vincolo β_a, porta così alla conclusione, del resto manifesta per sè, che la linea β, non è altro che la traiettoria che il punto a del corpo A, descrive nel corpo B.

Avendosi i moti dei due corpi A, B per rapporto al terzo C, per trovare la linea β, basterà dare a tutto il sistema un moto eguale e contrario a quello del corpo B, e cercare quindi in queste condizioni la traiettoria che descriverà il punto a del corpo A, la quale sarà la linea β cercata del corpo B, che col punto a determinerà il vincolo β_a.

3°) Se le coppie di superficie di vincolo A-C, B-C, sono date, e si vuole semplicemente stabilire tra i due corpi A, B un vincolo della forma β_a, basterà individuare del corpo A, un punto qualunque a, quindi fare muovere il corpo A, per rapporto al corpo C, come il vincolo A-C, permette. In causa di questo movimento il punto a descriverà una certa traiettoria α. Si intenda adesso che questa traiettoria α sia solidaria al corpo C, e si muova con questi come il vincolo B-C [2] lo permette; essa descriverà così una certa superficie B, e qualunque linea segnata su questa superficie, potrà assumersi per linea β, che col punto a costituirà tra i due corpi A, B, un vincolo della forma β_a.

[2] Il corpo B stando fermo.

Da quanto precede, risulta così, che date le superficie di vincolo *A-C*, *B-C*, e il punto a resta per questo fatto solo determinata una certa superficie B del corpo *B*, sulla quale sono poste tutte le linee β corrispondenti al punto a; qualunque sia del resto il rapporto di velocità che si vuole esista nella comunicazione di moto tra i due corpi *A*, *B*.

Se per linea β si assume la linea α, allora manifestamente capita che muovendosi il corpo *A*, non si muove il corpo *B*, (il *C* essendo supposto fisso).

Nel caso in cui le due curve β e α hanno solo un elemento comune, allora avviene che quando il punto a, percorre quell' elemento, i diversi punti del corpo *B* hanno velocità nulle. — A partire quindi da quella posizione il corpo *B* non potrebbe servire a comunicare il moto al corpo *A*.

4°) Quando essendo date le superficie di vincolo *A-C*, *B-C* e il punto a si vuole determinare della superficie B la linea β conveniente ad un determinato rapporto di velocità, nella comunicazione di moto tra i due corpi *A*, *B* si può fare così:

1° si determinino sulla linea α, che il punto a descrive le posizioni a_0, a_1, a_2, .. che questi vi viene man mano occupando alla fine dei tempi successivi e tra loro vicinissimi t_0, t_1, t_2, ..

2° si faccia muovere la linea α, solidariamente al corpo *C* (il corpo *B* essendo tenuto fermo) per modo da generare la superficie B.

3° avendosi la legge del movimento del corpo *B*, per rapporto al corpo *C*, si determini la legge del movimento di quest' ultimo per rapporto al primo.

4° essendo c il punto del corpo *C* che al principio dei tempi t_0 coincide col punto a, si disegni sulla superficie B, la traiettoria γ, che questo punto del corpo *C* descrive, (il corpo *B* essendo fisso) e su di essa le posizioni successive c_0, c_1, c_2, .. che vi viene occupando alla fine dei tempi t_0, t_1, t_2, ..

5° si segnino sulla superficie B, le posizioni α_0, α_1, α_2, .. della traiettoria α, passanti per i punti c_0, c_1, c_2, ..

6° si prendano su queste curve α_0, α_1, α_2, .. a partire dai punti c_0, c_1, c_2, .. delle porzioni $c_0 b_0$, $c_1 b_1$, $c_2 b_2$, .. rispettivamente uguali ai segmenti curvilinei $a_0 a_0$, $a_0 a_1$, $a_0 a_2$, ..

7° si uniscano mediante tratto continuo tutti questi punti b_0 (coincidente con a_0) b_1, b_2, .. e si avrà la curva cercata β.

Dal processo indicato per avere la curva β, si vede anche come questi segmenti lineari $a_0 a_1$, $a_0 a_2$, $a_0 a_3$, .. $a_0 c_1$, $a_0 c_2$, .. misurati i primi sulla curva α, e i secondi sulla curva γ, a partire tutti dal punto a_0, incontro delle stesse due curve, si possono assumere come coordinate α e γ, dei diversi punti della curva β.

Siccome queste coordinate (in generale curvilinee) sono funzioni del tempo, così mediante l' eliminazione di quest' ultimo tra di esse, si avrà l' equazione della curva β.

Se la superficie B è una superficie sviluppabile, le costruzioni indicate per

trovare la curva β, si possono compiere sulla superficie piana B', che si ottiene sviluppando in piano la B, con che si ottiene una curva β', che è la corrispondente nello sviluppo della curva β. Avviluppando poi nuovamente sulla B, questa superficie piana, la curva secondo la quale si disporrà la β' sarà la curva cercata β.

5°) Quando avendosi il meccanismo, si vuole per una determinata posizione dello stesso, trovare (nella supposizione che il membro C sia fisso) il rapporto tra le velocità di due punti dei membri A, B si può fare così:

1° per quella determinata posizione del meccanismo, si noti il punto b della linea β del corpo B, che coincide col punto a del corpo A.

2° servendosi delle coppie di superficie di vincolo A-C, B-C, si determinino sempre per quella posizione del meccanismo, le direzioni delle velocità dei due punti a e b, e si conduca la tangente t, alla curva β nello stesso punto b.

3° si cerchi il rapporto tra i seni degli angoli che le direzioni delle velocità dei due punti a, b, fanno colla tangente t, e questo sarà anche il rapporto inverso tra i valori numerici delle stesse due velocità. Per convincersene, basta osservare che in generale, le velocità, di un punto che si muove lungo una linea, e del punto di contatto di questa, sono poste in uno stesso piano colla tangente alla linea mobile, nel punto di contatto, e di più misurate secondo la normale alla detta tangente sono eguali.

CASI PARTICOLARI

6°) Per mostrare l' utilità della teoria generale svolta, io ne farò l' applicazione al caso in cui le superficie di vincolo A-C, B-C, corrispondono a moti relativi semplici, quali sono il moto progressivo rettilineo, e il moto rotatorio. — Questa ricerca condurrà naturalmente agli organi cinematici generalmente conosciuti e appartenenti alla classe studiata, e a qualcuno probabilmente nuovo. — A seconda che i moti relativi di A e di B rispetto a C; (che supporrò il membro fisso) sono o no contemporaneamente progressivi rettilinei, o rotatorii, si hanno ad esaminare quattro casi diversi cioè:

1° caso. I due corpi A e B si muovono tutti e due di moto progressivo e rettilineo.

2° caso. Il corpo A si muove di moto progressivo rettilineo, e il corpo B di moto rotatorio.

3° caso. Il corpo A si muove di moto rotatorio, e il corpo B di moto progressivo rettilineo.

4° caso. I corpi A e B si muovono tutti e due di moto rotatorio.

7°) Meccanismi corrispondenti al primo caso — Muovendosi i due corpi A e B di moto progressivo rettilineo, il primo in direzione λ, e il secondo in direzione

μ, avviene che la traiettoria α descritta dal punto a del corpo A è una retta parallella alla direzione λ, e che la superficie B, generata dalla retta α, che si muove di moto progressivo rettilineo in direzione μ (moto che ha il corpo C, quando si tiene fermo il corpo B) è una superficie piana.

Le costruzioni a compiersi per risolvere i varii problemi relativi a questa famiglia di organi si eseguiranno quindi su detto piano B, paralellamente al quale si muovono i due corpi A e B. — Comunemente nella costruzione di questi organi i quali ricevono il nome di cunei, si prendono le due direzioni λ e μ normali l' una all' altra.

8°) Meccanismi corrispondenti al secondo caso — Se il corpo A si muove di moto progressivo rettilineo in direzione λ, e il corpo B di moto rotatorio attorno l' asse μ; la traiettoria α descritta dal punto a del corpo A sarà rettilinea e parallella alla direzione λ, e la superficie B generata dalla rotazione di α attorno l' asse μ (moto del corpo C, quando si tiene fermo il corpo B) sarà una superficie rigata di rivoluzione, e la quale secondo i casi, sarà o una superficie piana, o una superficie cilindrica, o una superficie conica, o quella di un iperboloide di rivoluzione ad una falda.

La superficie B sarà piana, se le due direzioni λ e μ saranno ad angolo retto. — Questo è precisamente ciò che si verifica nei così detti eccentrici, nei quali il punto a si sceglie sopra il piano passante per μ e paralello alla direzione λ.

La superficie B, sarà poi cilindrica, se le due direzioni λ e μ saranno parallelle, come appunto avviene nei bocciuoli cilindrici.

La superficie B sarà conica se la direzione λ sarà inclinata alla direzione μ, e se il punto a sarà un punto del piano che passa per μ ed è paralello alla direzione λ, come precisamente avviene nei bocciuoli conici.

Finalmente la superficie B, sarà quella di un iperboloide di rivoluzione ad una falda, se le due direzioni λ e μ come nel caso precedente, saranno inclinate l' una all' altra, e se il punto a, del corpo A, si sceglierà all' infuori del piano passante per μ, e paralello alla direzione λ.

Questi organi, se si volesse usare una denominazione analoga a quella usata pei bocciuoli cilindrici e conici, si potrebbero dire iperboloidici; ma in verità essi non corrispondono ad una serie nuova di organi, potendo sempre essere compresi nei bocciuoli conici, dai quali non differiscono che per una scelta più arbitraria del punto a. — Se del resto del corpo A si individuano due punti come a, a_1, a_2, il primo posto nel piano passante per μ e paralello a λ, e il secondo fuori, dello stesso piano, si avrà un meccanismo, il quale sarà ad un tempo un bocciuolo conico ed un bocciuolo iperboloidico.

9°) Organi corrispondenti al terzo caso — Il corpo A girando attorno l' asse λ, e il corpo B movendosi di moto progressivo rettilineo in direzione μ, capita che la traiettoria α descritta dal punto a di A è una circonferenza il cui piano è normale a λ, il cui centro è nell' intersezione di questo piano con λ; e che la super-

ficie B generata da α che si muove di moto progressivo rettilineo in direzione μ (moto del corpo *C*, quando si tiene fermo il corpo *B)* è una superficie cilindrica circolare, retta od obbliqua secondo che le rette λ e μ saranno paralelle o no. — Come caso particolare questa superficie potrà anche essere piana, ciò che si verificherà quando le due direzioni λ e μ saranno ad angolo retto, come precisamente avviene nelle così dette manovelle a gruccia. — Un meccanismo che si può considerare come un derivato di quelli in cui λ e μ sono paralelli, lo si ha nella vite la quale girando attorno il suo asse fa avanzare di moto progressivo rettilineo secondo l' asse stesso, la corrispondente madre vite. Esempi di meccanismi in cui λ e μ sono inclinati di un angolo qualunque, se ve ne hanno devono essere poco numerosi.

Può essere interessante il notare, che essendo *X*, *Y* due corpi dei quali il primo non può che muoversi di moto progressivo rettilineo, e il secondo di moto rotatorio; se si intende legarli tra loro mediante un vincolo β_a, lo si potrà fare intendendo che il punto *a* appartenga così bene al corpo *X* come al corpo *Y*; la quale cosa evidentemente mostra, che ad ogni meccanismo della seconda categoria, ne corrisponde uno equivalente della terza. — Così prendendo in esame gli eccentrici e le manovelle a gruccia, nei quali un vincolo della forma β_a, lega tra loro due corpi dei quali l' uno rota e l' altro si muove di moto progressivo rettilineo in direzione normale all' asse di rotazione del primo, si potrà dire, che ad ogni eccentrico corrisponde una manovella equivalente e viceversa.

10°) Organi corrispondenti al quarto caso — Nel moto del corpo *A* attorno l' asse λ, il suo punto *a* descriverà una traiettoria α che sarà una circonferenza il cui piano è normale a λ, e il cui centro è posto su λ. Pel moto poi di rotazione della traiettoria α attorno l' asse di rotazione μ del corpo *B* (moto del corpo *C* per rapporto al corpo *B)* si genererà la superficie B che sarà di rivoluzione.

Come casi particolari questa superficie potrà essere piana, e questo capiterà quando i due assi di rotazione saranno paralelli, come appunto si verifica nelle così dette manovelle con feritoia, e nelle ruote a piuoli; oppure potrà essere sferica, e questo avverrà quando i due assi di rotazione si incontreranno, come appunto accade nei bocciuoli delle macchine a cucire, e in certi giunti proposti da alcuni. Quando i due assi λ, μ nè si incontrano nè sono paralelli la superficie B, non è di quelle così famigliari come la piana e la sferica; quantunque per il modo stesso semplicissimo di generazione sia di facilissima rappresentazione alla mente. Esempi di organi corrispondenti a questo caso, molto probabilmente non se ne hanno.

QUARTO CONTRIBUTO
ALLA FLORA
DELLA PROVINCIA DI BOLOGNA

MEMORIA

DEL PROF. GIROLAMO COCCONI

LETTA NELLA SESSIONE DELL' 11 MARZO 1880.

Sette anni sono, quando cominciai a raccogliere le piante di questa Provincia, mi parve che il còmpito si dovesse limitare alla ricerca delle molte specie, che quì avevano trovate gl' illustri Botanici di questa regione, quali il Monti, l'Aldrovandi e i due infaticabili Bertoloni.

Le pubblicazioni che ne fecero, le quali stanno ad attestare la cura posta da essi in questa illustrazione del paese, mi sembrarono allora l' unica guida da seguirsi, onde procurarmi questo grande materiale, che tante reiterate ricerche dovevano avere completato.

Era ben lungi dal pensare che tanto rimanesse a farsi per un lavoro, che cominciato nella prima metà del secolo scorso, ebbe un incremento straordinario nel presente, per opera dei due ultimi lodati Professori di Botanica. E come se non bastassero i miei tre precedenti Contributi, che riuscirono di sorpresa a molti, e direi quasi a me stesso, nuova ed insperata copia di materiale corona le indagini, si direbbe, ad ogni passo che si muova, come se la natura largisse per gratitudine, a chi la ricerca, le meraviglie dell' opera sua.

Questo materiale ognora crescente, che oggi nel mio Erbario raggiunge le 1720 specie, non lascia scorgere facilmente fino a quale cifra potrà essere spinto, ove per l' avvenire fortuna arrida col favore del passato.

Le 85 forme, fra specie e varietà, che riporto nel presente lavoro, appartengono quasi tutte alle ricerche dello scorso anno, che quanto eccezionale fu per la scarsezza dei raccolti necessari alla vita, altrettanto inopportuno riescì alle nostre indagini. Le pioggie dirotte e continuate per tutta la primavera impedirono le frequenti escursioni e sciuparono in gran parte il lusso di una vegetazione precoce;

gl' intensi calori e l' aridità prolungata del successivo estate osteggiarono lo sviluppo delle piante, che più tardive compaiono a far mostra di sè. Laonde poco restò a raccogliere dopo questi due effetti così direttamente contrastanti.

Non pertanto il numero delle piante nuove per questa Provincia, che io presento, è più che soddisfacente, ove si tenga conto delle pessime condizioni della scorsa annata.

Alcune specie però che vi si notano non sono dovute nè alle mie ricerche, nè a quelle dei miei egregi raccoglitori, che colla solita gentilezza mi hanno anche in quest' anno aiutato (*), ma riconoscono una provenienza diversa che io mi affretto ad indicare.

Per la squisita cortesia dell' egregio collega ed amico Prof. Gibelli, il cui nome è chiaro nella Flora d' Italia, ho potuto ripassare l' unico Erbario, lasciato a questo Orto Botanico dagli Eredi del compianto Prof. Giuseppe Bertoloni.

Questo *Hortus siccus Florae Bononiensis,* come trovasi intitolato, fu messo assieme indubbiamente dal Bertoloni figlio, cominciando circa dal 1840, con piante raccolte nella Provincia e coll' intendimento che nelle collezioni dell' Orto Botanico stesse a rappresentare la Flora locale.

Gli esemplari non sono molto numerosi, nè per copia di specie, nè per ripetizione d' individui di varie località, forse perchè adoperati più tardi alla ricostituzione di altro Erbario della Flora Bolognese, che non è rimasto in proprietà dell' Istituto. Ma ciò che non s' indovina facilmente si è, come la collezione lasciata manchi completamente di etichette, che portino non solo la denominazione delle piante, ma anche le località della Provincia dove vennero raccolte. Un tale Erbario non ha quindi alcun valore scientifico e può tutt' al più servire come oggetto di confronto per la constatazione di talune piante trovate di rado in questa Provincia.

È per questo solo scopo che, in grazia della gentilezza del Prof. Gibelli, ho potuto ripassare con comodità questa *anonima* collezione, e nel frattempo mi sono curato di collocarvi per ogni pianta la determinazione, meno in pochissimi casi, in cui lo stato degli esemplari non permetteva di riconoscere la specie con sicurezza, necessitato però a lasciarvi la lacuna delle località che non era possibile, nè lecito improvvisare.

Questo lavoro ingrato della determinazione di circa 800 piante secche, talora anche in cattivo stato per tarlo d' insetti, ha avuto per me due notevoli vantaggi: l' uno di verificare che alcune (non molte) delle specie che ho pubblicate, erano in realtà state vedute e raccolte anche dal Bertoloni figlio, e venivano così a confermare ciò che io aveva asserito senza precedenti; e l' altro di potere aggiungere a questo Contributo 8 specie di piante non pubblicate dai Bertoloni, raccolte da loro, e non ancora da me incontrate in Provincia.

È fuor di dubbio che queste debbono appartenere alla Flora nostra, perchè

(*) A. Lorenzini, Fratelli Riva, Dott. Cesare Saccenti.

fanno parte del citato *Hortus siccus Florae Bononiensis,* ma non si può indicare per esse alcuna precisa località, per la ragione superiormente accennata. Tali piante sono: l' *Arabis ciliata* Koch, il *Ribes petraeum* Wulf., la *Succisa australis* Rchb., l' *Hyoseris radiata* L., il *Rumex palustris* Sm. var. *uliginosus* Guss., il *Salix cinerea* L., l' *Allium neapolitanum* Sprgl., la *Triodia decumbens* Beauv., la cui determinazione è incontestabile per la chiarezza degli esemplari.

Data così ragione della provenienza di queste poche specie che vanno ad apparire nel presente Contributo, io non avrò fatto un plagio se quì le riporto come nuove per la Provincia, e le unisco alle mie nel solo intendimento di rendere più completa la Flora locale.

Il risultato di queste indagini e di quelle dei precedenti anni, aumenta fin oggi le piante di questa Provincia di 291 specie e di 81 varietà, e in complesso di 372 forme non citate, il cui numero abbastanza ragguardevole è il frutto di accuratissime ricerche, le quali benchè lascino poca speranza di un ulteriore notevole incremento, non assicurano però che tutto sia conosciuto e che nulla rimanga a farsi per illustrare completamente la Flora della Provincia di Bologna.

DICOTILEDONI

Crocifere.

1. Barbarea vulgaris *R. Brown.*
var. stricta *Fries.*

La *Barbarea vulgaris* comune nei fossi e nei luoghi umidi di ogni parte della Provincia si distingue per silique a maturità arcuato-ascendenti e per foglie inferiori a lobi laterali che eguagliano la lunghezza del lobo terminale che è orbicolare o cordiforme.

È occorsa al giovine studente Domenico Riva, presso il Santuario dell' Acero, una varietà che ha le silique mature serrate contro l' asse e i lobi laterali delle foglie radicali più piccoli della larghezza del lobo terminale. Questa è la varietà indicata dal Fries sotto il nome di *stricta.*

2. Arabis ciliata *Koch.*

Specie dei luoghi montani che si distingue per la rosetta delle foglie radicali colle cauline sessili non orecchiute; le foglie, come è indicato dal nome specifico, sono cigliate. L' esemplare da me veduto ha il caule coperto di peli semplici, quindi apparterrebbe alla varietà *hirsuta* del Koch, non confondibile in alcun modo coll' *Arabis hirsuta* L.

Porto questa specie dell' Apennino Bolognese senza indicazione di località precisa, giacchè l' ho trovata così nell' *Hortus siccus Florae Bononiensis* lasciato dal Prof. Bertoloni figlio.

3. Lunaria biennis *Mönch.*

Questa specie che coltivasi qua e là nei giardini, venne trovata inselvatichita presso la borgata delle *Capanne* sopra Porretta dal Dott. Saccenti e dal Sig. A. Lorenzini. Essa è ben distinta dalla *L. rediviva* L. che incontrasi in molti luoghi del nostro Apennino.

4. Capsella Bursa pastoris *Mönch.*
var. integrifolia *Schlechtend.*

Abbenchè molti autori descrivano la *Capsella Bursa pastoris* tipica con foglie runcinato-pinnatifide, pure ammettono che talora possa averle anche intere. Il Koch

però nota a parte quest' ultima forma come una varietà detta *integrifolia* Schlecht., la quale trovasi però di rado. Il Dottor Giuseppe Riva la raccolse in piccoli esemplari a Montese, ed a me è occorsa in istato di maggiore sviluppo nei dintorni di Bologna, insieme alla specie.

5. Raphanus Landra *Moretti.*

Questa specie vicina al *R. Raphanistrum* L. e dalla quale si distingue per silique profondamente solcate contenenti da 2 a 6 semi e per foglie interrottamente pinnatifide o lirate, non era ancora stata veduta in Provincia; venne raccolta da me ai *Campi di Lustrola* e dai Signori Saccenti e Lorenzini ai *Boschi di Granaglione* in luogo detto *Prà di Boni.*

Silenee.

6. Silene inflata *Smith.*
var. minor *Moris.*

La varietà *minor* della *Silene inflata*, che differisce dalla specie per foglie strette, lineari e per essere più gracile e meno elevata, si trova a Jola di Montese, dove l' ho raccolta insieme alla forma tipica.

7. Silene Tenoreana *Coll.*

Questa pianta dapprima venne descritta sotto il nome di *S. angustifolia* Guss. (non Bieb.) poi di *Cucubalus angustifolius* dal Tenore, riguardata poscia da alcuni come semplice varietà della *Silene inflata* Sm. Essa però si perpetua coi semi e si distingue da quest' ultima specie pel calice più ovoide, per gli stili non ingrossati all' apice, per la cassula intatta e conica alla sommità, per le foglie lineari, o lineari-lanceolate, talora strettissime, sempre lungamente attenuate all' apice e molto più lunghe in proporzione di quelle della *Silene inflata.*

Abbiamo raccolta questa pianta nei terrapieni dei forti, fuori di Porta Lame, attorno e sulle mura di Bologna, a Gaibola e al M. Paderno, ed è probabile che trovisi anche in altri punti e sempre copiosamente.

8. Silene viridiflora *L.*

Trae il suo nome specifico dal colore bianco-verdiccio dei suoi fiori, ma questo non costituisce il suo carattere più spiccato. La specie è una di quelle che hanno una pubescenza vischiosa, con foglie ovate acute, e le inferiori spatolate; l' infiorescenza ne è lassa e povera, i cui fiori sono un po' pendenti e presentano petali

strettamente bifidi; i calici ne sono cilindrici, ma nel frutto diventano turgidi ed ovoidali.

In provincie vicine alla nostra fu trovata in quella di Ravenna. Il Signor Dott. Giuseppe Riva la raccolse a Montese e nel Modenese a Fiumalbo.

Alsinee.

9. Arenaria serpyllifolia *L.*
var. scabra *Fenzl.*

L' *A. serpyllifolia* è una specie comunissima in tutta la Provincia, ma trovasi più comunemente la forma tipica con lunghi peli. La varietà *scabra* che si distingue per scabrosità e per una pubescenza a peli brevi, è rara e fu sinora trovata soltanto a Montese dai Signori Riva.

10. A. serpyllifolia *L.*
var. glutinosa *Koch.*

Incontrasi un po' più di frequente questa varietà più piccola della specie, eretta, o ascendente, coperta di pubescenza glandolosa nella parte più vicina ai fiori e corrisponde alla specie *A. viscida* Loisl. Raccolta da me al monte della Croce, presso Porretta, nei colli di Castiglione e in altri punti presso Bologna.

Malvacee.

11. Malva Alcea *L.*
var. α genuina *Grén. et Godr.*

La *M. Alcea* è una bella pianta abbondantissima nei contorni di Porretta e altrove. Essendo polimorfa venne lacerata in diverse specie, onde ne vennero i nomi di *M. italica* Pollini, *M. Morenii* Coll., *M. alceoides* Ors., *M. Orsiniana* Ten., *M. fastigiata* Cav., *M. excisa* Rchb., ecc. Il Bertoloni nella sua « Flora Italica » riunì tutte queste forme sotto l' unica denominazione di *M. Alcea* L.

Alcune forme però possono essere conservate almeno come varietà e tra esse la var. *genuina* Grén. et Godr. che ha le foglie cauline divise sino alla base in cinque lobi romboidali trifidi. Il Dottor Saccenti ne raccoglieva un bell' esemplare in Provincia, presso al Molino di Castel dell' Alpi.

Tale esemplare corrisponde pienamente nelle foglie, ma non nelle divisioni e colori dei petali alla *M. excisa* Rchb. figurata nell' Ic. pl. Cent. XV. tav. 170, fig. 4842 b.

12. Malva Alcea *L.*
var. β fastigiata *Cav.*

Questa forma si distingue per le foglie cauline divise soltanto fino a metà del lembo in 5 lobi lanceolati o dentati. Raccolta da me a Porretta, vicino alla galleria prossima alla Stazione, dove è abbondantissima.

Leguminose.

13. Trifolium subterraneum *L.*

Questa piccola e singolare specie di Trifoglio che si distingue da ogni altra per la particolarità che i suoi capolini si diriggono a terra e si spingono nel terreno dopo la fruttificazione, non era ancora stata veduta in Provincia. Fu raccolta dal Prof. Saccenti in compagnia del Signor Amilcare Lorenzini ai *Boschi* di Granaglione, presso la Chiesa.

14. Phaca astragalina *DC.*

Nessuna delle specie di questo genere fu indicata nel territorio Bolognese. Dobbiamo al Sig. Dottor Giuseppe Riva l'avere raccolta la *Ph. astragalina* presso Missano.

15. Vicia angustifolia *Roth.*
var. β Bobartii *Forst.*

In uno dei nostri precedenti Contributi (Contributo alla Flora della Provincia di Bologna. 1877. pag. 21.) abbiamo segnalata in questa Provincia la presenza della *V. angustifolia* Roth.

A S. Martino di Montese il Dott. Giuseppe Riva raccoglieva una varietà di questa specie a foglie superiori fornite di foglioline lineari strettissime, che abbiamo determinata per la *V. Bobartii* Forster, ma che non è che varietà della *V. angustifolia* come quì riportiamo.

Rosacee.

16. Spiraea Ulmaria *L.*
var. α denudata *Hayn.*

La *Regina dei prati,* non indicata nella Provincia Bolognese trovasi, benchè scarsamente, nei prati freschi dell'Acero, nella forma detta *denudata* cioè a foglie glabre nella pagina inferiore.

17. Spiraea Ulmaria *L.*
var. *β.* discolor *Koch.*

Trovasi pure nella stessa località la varietà a foglie bianco-tomentose nella pagina inferiore, chiamata *discolor* dal *Koch.*

18. Potentilla collina *Wib.*

Alcuni anni sono trovai attorno le mura di Bologna e precisamente presso Porta S. Vitale, una Potentilla, che aveva tutto l' abito della *P. argentea* L, ma non presentando affatto i caratteri di questa specie tenni sempre sospeso il mio giudizio intorno ad essa. Ripigliatone lo studio, credo ora di poterla riferire ad una specie affine alla indicata, cioè alla *P. collina* Wib. distinta pei suoi cauli più distesi a terra, per la sua pannocchia più ampia e più diffusa e pel colore meno bianco della pagina inferiore delle foglie. Queste, benchè un po' tomentose sono irte sulle nervature, come il caule e i picciuoli, di lunghi peli patenti, e tutta la pianta è peloso-tomentosa e non semplieemente tomentosa, come la *P. argentea.*

19. Rubus glandulosus *L.*
var. *β* umbrosus *Godr.*

Il *R. glandulosus* L. è una specie molto comune segnatamente nei luoghi elevati della Provincia. La forma tipica a foglie coriacee, quasi glabre, è quella che più comunemente si trova.

Segnalo però la presenza di una varietà detta *umbrosus* dal Godr. che ha foglie molli, di un verde pallido, vellutate per disotto. L' ho raccolta a Porretta in due punti, nel luogo detto i *Codozzi* e nei castagneti sotto i *Campi di Lustrola.*

20. R. glandulosus *L.*
var. *γ* micranthus *Grén. et Godr.*

Varietà vicina alla precedente, ma a fiori molto più piccoli ed a calici più lungamente appendiciati. Raccolta pure a Porretta nei boschi lungo il Rio Maggiore.

21. Rubus hirtus *Weihe et Nees.*

Pianta polimorfa a piccoli fiori bianchi, distinta pei cauli rotondati alla base e poi angolosi a faccie piane, armati di aculei robustissimi vulneranti, nel resto della lunghezza vellutati e glandolosi, con foglie caulinari verdi nelle due pagine. Fu raccolta dal giovine Domenico Riva, nei prati sotto il Santuario dell' Acero.

Sanguisorbee.

22. Alchemilla arvensis *L.*

Piccola specie che si raccoglie nei campi montani, non indicata ancora in questa Provincia. Mi fu favorita dai Signori Riva, raccolta dal Dott. Giuseppe a S. Martino di Montese in luogo detto il *Palazzo.*

Grossulariee.

23. Ribes petraeum *Wulf.*

Questo bell' arbusto che si eleva meno del *R. rubrum* e che fornisce bacche acerbe, distinto per le foglie grandi palmate, a lobi acuti, e per l' asse dei suoi fiori tomentosissimo, appartiene all' *Hortus siccus* e venne forse raccolto all' Acero; aggiunge una nuova specie alle poche Grossulariee nostrali.

Tamariscinee.

24. Tamarix gallica *L.*

Specie che trovasi qua e là coltivata nei giardini, spontanea in diverse località d' Italia; fu da me raccolta inselvatichita lungo il Canal Naviglio, presso Corticella.

Onagrariee.

25. Epilobium lanceolatum *Seb. et Mauri.*

Specie vicina all' *E. montanum* L. col quale grossolanamente si confonde, ma se ne distingue pel maggiore sviluppo, per le divisioni del calice acute mutiche, per le foglie che non sono rotondate alla base ma cuneiformi, dentate nei margini fuorchè alla base, per la radice ramosa, non troncata. Ho raccolta questa pianta a Pietra Colora, e nei boschi di Castelluccio di Porretta nel versante verso il torrente Sella. Trovasi pure a Castiglione dei Pepoli, in luogo detto *la Gatta.*

26. Epilobium collinum *Gm.*

Il Koch ammette questa forma quale una varietà dell' *E. montanum* L. La piccolezza delle foglie anche più ovate e ravvicinate, più lungamente picciuolate, quasi sempre alterne, sono caratteri che permettono forse di mantenerla come

specie, quale l'indicò il Gmelin. Ho raccolta questa forma, lo scorso anno per la prima volta, alla *Madonna del Faggio*, nell' Apennino Bolognese.

Crassulacee.

27. Sedum stellatum *L.*

Bella specie di *Sedum* a fiori rosei, distinta particolarmente pei frutti patenti a stella. Trovata per la prima volta *ai Boschi* di Granaglione dai Signori Saccenti ed Amilcare Lorenzini.

28. Sedum acre *L.*

Il *S. acre* L. confuso talora col *S. sexangulare* dal quale principalmente si distingue per le foglie sparse assai più larghe alla base che all' apice, è una specie abbastanza comune e raccolta a Monte Donato, a Porretta nel Reno, a Monte Zena sopra Loiano, a Pianoro ecc.

Rubiacee.

29. Galium vernum *Scop.*
var. α Bahuini *Röm. et Schult.*

Questa varietà della comunissima specie *G. vernum* Scop. che si distingue per fiori gialli e foglie ovali e per una pubescenza più marcata, ho raccolta alla Selva degli Arienti, e fu trovata anche dal Sig. Dott. G. Riva a Ranocchio di Montese, in luogo detto *la Mirandola.*

30. G. vernum *Scop.*
var. β. Halleri *Röm. et Schult.*

Quest' altra varietà che si distingue per foglie più strette e fiori giallo-pallidi, venne raccolta da me a M. Sabbione.

Dipsacee.

31. Dipsacus laciniatus *L.*

Per qualche anno ho creduto mancasse in Provincia il *D. laciniatus*, giacchè tutti gli esemplari ch' io esaminava si riferivano al *D. sylvestris* Mill. Nell' estate del 1879 incontrai a Marano la specie *D. laciniatus* colle foglie cioè dentato-pennatifide, a margine setoso-cigliato e a fiori bianchi.

32. Scabiosa pauciseta *DC.*

Questa specie corrispondente alla *S. Columnae* Ten. si distingue dalle sue vicine e particolarmente dalla *S. Columbaria* L. colla quale andò confusa, per le reste del calice ridotte ad una sola, e di rado a più di una, nere e lunghe il triplo della corona; inoltre ha lobi delle foglie assai stretti. Trovasi non di rado in questa Provincia e venne raccolta a Pianoro, a Livergnano ed a Loiano.

33. Succisa australis *Rchb.*

Si distingue dalla *S. pratensis* Mönch, che qualche volta trovasi nei boschi di questa Provincia, pel tubo dell' involucello che è scabro e non peloso e pel caule strisciante. La specie *S. australis* deve essere assai rara, e la riporto sull' osservazione fattane nell' *Hortus siccus* lasciato dal Bertoloni.

Sinanteree.

34. Senecio Jacobaea *L.*

Specie rara, ben distinta dal *S. erraticus* Bert., dal *S. aquaticus* L. e dal *S. erucifolius* L. pel corimbo molto composto, per le squame dell' invoglio oblungo-lineari, scariose nei margini appena pubescenti, e per le scaglie rinforzanti brevissime in numero di 1, o 2; gli achenii quasi sempre glabri e le foglie cauline lirato-pennatifide a lobi laterali inciso-dentati. Ho trovata questa specie una sola volta nei fossi di Marano.

35. Achillea Millefolium *L.*
var. lanata *Koch.*

Ammessa come specie da alcuni, da altri come semplice varietà della comunissima *A. Millefolium* L. se ne distingue per la lanuggine che riveste tutta la pianta. Raccolta da me a Casalecchio di Reno ed attorno a Bologna fuori di Porta Lame.

36. Artemisia coerulescens *L.*

Tra le poche specie di Artemisia che si sono raccolte nella Provincia di Bologna non fu notata l' *A. coerulescens* distintissima pel colorito ceruleo d' ogni sua parte, che sostituisce il verde delle altre congeneri. Trovasi di rado e non l' ho incontrata che nell' alveo del Torrente Setta, superiormente al Sasso.

37. Leucanthemum maximum *DC.*

Il Dott. Giuseppe Riva raccoglieva a Montese, in luogo detto i *Bertocchi*, questa bella specie di *Leucanthemum* a foglie carnose, di forma particolare e a grande calatide, distinta dal *L. montanum* DC. e dal *L. vulgare* Lamk.

38. Hyoseris radiata *L.*

Specie rara non ancora notata per questa Provincia, e che si distingue dalle 2 congeneri italiane per lo scapo più lungo delle foglie e quasi non ingrossato all'apice; si trova qualche rara volta sui muri vecchi dell'Apennino.

39. Sonchus palustris *L.*

Nelle valli di Durazzo ho raccolta questa specie distinta dal *S. arvensis* L. per la radice non strisciante, e pei fiori piccoli solfini. Non mi è occorsa sinora in alcun' altra località palustre.

Campanulacee.

40. Campanula Trachelium *L.*
var. dasycarpa *DC. fil.*

Varietà assai comune della *C. Trachelium* distinta pel calice fittamente ispido, corrispondente alla specie *C. urticaefolia* Schumm. Raccolta da me ai Campi di Lustrola e nei boschi lungo il Rio Maggiore.

41. Campanula Sibirica *L.*
var. paniculata *DC. fil.*

La *C. sibirica* L. venne già indicata dal Bertoloni padre, trovarsi in Provincia al Sasso e a Monte Mariano. Il compianto Prof. Bianconi l'aveva raccolta a Gaibola, e trovasi pure nell' alveo del Santerno presso Imola.

Non fu però indicata da alcuno la varietà di essa a rami moltiflori, divaricati, con foglie più larghe, detta *paniculata* DC. fil. Questa fu da me raccolta sul monte di Sasso.

Borraginee.

42. Myosotis palustris *L.*
var. strigulosa *Rchb.*

Una varietà della *M. palustris* L. piuttosto frequente da noi, si è quella detta *strigulosa* che ha caule glabro o con peli appressati, talora turchiniccio alla base.

Raccolta da me nei boschi Porrettani, lungo il Rio Maggiore, a Gaggiolo, e presso Porretta in luogo detto *Cà dei Bucci.*

Scrofulariacee.

43. Limosella aquatica *L.*

Questa piccola specie acquatica sembra molto rara, od inavvertita, non essendo citata per alcuna località della Provincia. Nonpertanto si è raccolta soltanto nelle acque prossime al Lago di Scaffaiolo.

44. Rhinanthus minor *Ehrh.*

Confuso forse colle specie congeneri ne è distinto per le brattee verdi e pel tubo della corolla diritto. Trovasi nei prati del piano e del monte e noi l'abbiamo raccolto in basso a Minerbio, ed in alto alla Selva degli Arienti, ed a Salto di Montese (Riva).

Orobancacee.

45. Orobanche Hederae *Vauch.*

Il Sig. Dott. Giovannini, Custode dell' Orto botanico di questa Università, mi ha comunicati alcuni esemplari di una specie di *Orobanche* che vegeta ogni anno sulle radici dell' *Hedera Helix* L. nell' Orto Agrario di questa Città. È una specie che potrebbe confondersi coll' *O. minor* Sutt., ma ne differisce pei suoi sepali uninervi, pel lobo medio del labbro inferiore più grande e pel colore giallo dello stimma. Inoltre il suo parassitismo sull' Edera essendo speciale, benchè studiata a secco, può ritenersi per la specie *O. Hederae* Vauch.

Labiate.

46. Mentha rotundifolia *L.*
var. velutina *Lej.*

La *M. rotundifolia* presenta diverse varietà delle quali almeno due incontransi da noi.

La prima è quella che si distingue per le foglie vellutate al disotto, seghettate, e per una spiga relativamente grossa e che venne chiamata *velutina* Lej. Essa è la più comune, ed io la posseggo di Crovara, di Marano, di Argelato, della *Madonna del Ponte* presso Porretta e di S. Martino di Montese.

47. Mentha rotundifolia *L.*
var. nemorosa *Willd.*

Questa distinguesi per foglie seghettate, di un verde cupo e soltanto pubescenti al disotto, col caule robusto ed eretto. Più rara della precedente non l'ho raccolta che alla Selva degli Arienti.

48. Brunella vulgaris *L.*
var. grandiflora *Mönch.*

La *B. grandiflora* ritenuta da alcuni come specie distinta, e da altri come varietà della *B. vulgaris* L. si distingue unicamente da questa specie per la corolla circa tre volte più lunga del calice e per le foglìe ovato-oblunghe. Non è frequente come la specie od io l'ho soltanto di Montese, raccolta dai signori Riva.

49. Ballota foetida *Lamk.*

Non corrisponde alla *B. nigra* L. specie comunissima lungo le vie di tutta Italia. La *B. foetida* Lamk. ammessa dal Koch come varietà della precedente, ne differisce pei denti del calice più largamente ovali bruscamente sormontati da una resta non spinosa. La pianta è inoltre non tomentosa e bianchiccia come è la *B. nigra.* Raccolta da me attorno a Bologna, all' Osservanza.

50. Galeopsis Tetrahit *L.*
var. pubescens *Bess.*

Tutti gli esemplari di questa specie che furono fin quì raccolti si riferiscono alla specie tipica.

Trovasi però una varietà considerata dal Besser come specie, e distinta per la lunghezza del tubo corollino che supera d'assai il calice; questa è stata raccolta dal giovine Domenico Riva, nel vertice dei monti di Villa d'Ajano al passo detto *Serra Sarzana*, e da me nei boschi lungo il Rio Maggiore, nel Porrettano, ed è la varietà *pubescens.*

51. Lamium album *L.*

L' *Ortica bianca* comunemente detta, è una specie di *Lamium* fin quì non ammessa in Provincia, forse perchè rara. L'ho raccolta lungo il margine dei fossi nei dintorni di Corticella, e non in altre località.

Plantaginee.

52. Plantago serpentina *All.*

Il Bertoloni nella sua *Flora italica* confonde la *P. maritima* L. colla *P. serpentina* All. Quest' ultima che ha un maggiore sviluppo della prima se ne distingue inoltre per le foglie coriacee piane e non scanalate. La *P. maritima* si trova sul Corno della Scala ed altrove, e la *P. serpentina* fu raccolta dal Dott. Saccenti a Casio sulla sponda destra del Limentra.

Amarantacee.

53. Amaranthus paniculatus *L.*

Appartiene alle specie di *Amaranthus* che talora si coltivano negli orti. La pianta quì indicata venne raccolta allo stato selvaggio dal Prof. Saccenti sulla strada di Pianoro presso la Fornace Buggio.

Chenopodiacee.

54. Chenopodium ambrosioides *L.*

Specie dei luoghi incolti dell' Italia superiore, che trovasi qua e là in mazzi isolati e mai abbondantemente, distinta pel suo aroma speciale; fu da me rinvenuta presso Corticella a tre miglia da Bologna.

Poligonacee.

55. Rumex Friesii *Gr. et Godr.*

Corrisponde al *R. obtusifolius* DC. non all' omonimo di Linneo. Il Bertoloni *Flora Italica,* vol. IV, pag. 238, segnalò in Italia ed in questa Provincia la presenza del *R. obtusifolius* L., il quale non sembra trovarsi in Italia. Il Grénier et Godr. nella *Flore de Françe,* vol. III, pag. 36, sotto il nome di *R. Friesii* ritengono il *R. obtusifolius* DC. (non L.) e il *R. divaricatus* Fries (non L.). Il *Compendio della Flora Italiana* dei Prof. Cesati, Passerini e Gibelli, a pag. 264, avendo ammessa la specie degli autori della *Flora di Francia* la ritengono col sinonimo di *R. obtusifolius* DC. Il *R. Friesii* fu trovato all' Acero dal giovine Domenico Riva.

56. Rumex palustris *Sm.*
var. β uliginosus *Guss.*

Appartiene come il *R. Friesii* alle specie che si distinguono per le valve perigonali esterne munite di denti. A differenza però di questo il *R. palustris* e spe-

cialmente la sua varietà *uliginosus* Guss. offre dei denti lunghissimi che uguagliano la larghezza delle valve perigoniali. Trovato indubbiamente nei luoghi palustri, benchè non se ne possa precisare la località.

57. Polygonum aviculare *L.*
var. *α.* monspeliense *Thieb.*

Il *P. aviculare* presenta molte forme abbastanza distinte l'una dall'altra, le quali pure ponno incontrarsi fra noi.

Una di esse è la var. *monspeliense* Thieb., distinta per cauli rigogliosi eretti od ascendenti, e per le foglie vicine, di forma elittica o lanceolata, un po' increspate nei margini; i fiori poi sono rari. Raccolta da me a Marano, ed esiste indubbiamente in altri luoghi.

58. P. aviculare L.
var. *β* neglectum *Bess.*

Varietà distinta pel caule esile decombente, per internodii molto allungati, per foglie strette o lineari acute, con quasi tutte le ascelle fiorifere, e per la punta dell'achenio sporgente dal fiore. Trovata nel prato della Scuola Veterinaria dell'Università di Bologna.

59. P. aviculare *L.*
var. *γ* depressum *Meisner.*

La forma più volgare della specie fornita dei cauli abbreviati raggiato-prostrati, ramosi, cogli internodii brevi, le foglie vicine, piccole, acute od ottuse. Essa incontrasi ovunque, sino nelle vie delle città, nei luoghi aridi, dove più è calpestata, più s'invigorisce.

Salicinee.

60. Salix cinerea *L.*

Nell' *Hortus siccus Florae Bononiensis* abbiamo trovata una specie di Salice assai distinta dalle altre nostre per la forma delle capsule e per essere portate da lunghi peduncoli. Per questo e pei caratteri delle foglie di un grigio cinerino abbiamo creduto di poterla riferire al *S. cinerea* L. Per la mancanza di etichette nell'Erbario indicato non possiamo attribuirlo ad alcuna località precisa della Provincia. (*)

(*) Dopo la lettura di questa Memoria il Dott. Saccenti raccolse questa specie a Monghidoro.

61. Salix daphnoides *Vill.*

Raro nell' Apennino, e più comune nelle Alpi, dalle quali catene scende coi fiumi a regioni più basse. Si distingue per le sue foglie oblungo-lanceolate, glauche di sotto. Il Dott. Giuseppe Riva ne raccoglieva presso Montese la pianta femmina.

Cupulifere.

62. Corylus Avellana *L.*
var. rubicunda *Nob.*

Coltivasi negli orti Botanici assai frequentemente il *C. rubicunda,* specie a foglie rosse, distinta anche per l' infiorescenza dalla comune Nocciuola (*C. Avellana* L.).

Sull' indicazione del Signor Amilcare Lorenzini ho visitati sopra Porretta sulla riva destra del Rio Maggiore, (boschi di *Cà dei Bucci),* alcuni arbusti di Avellana il cui centro delle foglie è largamente occupato da una macchia rossa, che si mantiene anche nell' essiccazione. Questa particolarità essendo nuova per la specie in discorso ho creduto di indicarla coll'epiteto di *rubicunda,* senza per questo confonderla colla specie che negli orti Botanici porta questa denominazione.

Conifere.

63. Taxus baccata *L.*

Il sig. Amilcare Lorenzini mi favoriva esemplari di questa specie che coltivata ad ornamento in molti giardini, si rende qua e là spontanea. Incontrava egli il Tasso baccato, allo stato spontaneo in una macchia a Bargi, nei fondi Comelli, nei cui dintorni non è oggi coltivato.

MONOCOTILEDONI

Gigliacee.

64. Allium neapolitanum *Sprengl.*

Questa bella specie di *Allium* propria dell' Italia centrale e della meridionale, sembra trovarsi anche quì, giacchè l' abbiamo veduta nell' *Erbario secco della Provincia di Bologna,* lasciato dal Bertoloni, benchè mancante, come sempre, dell' indicazione della località.

Essa deve però appartenere alla zona montuosa del nostro Apennino. Noteremo poi che si è quest' Aglio reso spontaneo nelle collinette del nostro Orto Botanico.

Orchidee.

65. Platanthera chlorantha *Custor.*

Benchè il Bertoloni nella sua *Flora Italica* l' avesse riunita alla *P. bifolia* Rich., pure il carattere delle logge delle antere divaricate e dirette in basso, il colore dei fiori e la mancanza di ogni odore la distinguono nettamente da questa.

Come trovasi da noi la *P. bifolia*, così indico trovarsi la *P. chlorantha* raccolta da me nel Porrettano ai Boschi di Granaglione *alla Cà de' Santini,* alle Capanne presso la Fontana di *Paoletto*, a Castiglione dei Pepoli (Cugini) e nei Boschi di Salvero (Saccenti).

66. Orchis laxiflora *Lamk.*
var. Tabernaemontani *Koch.*

Questa forma che corrisponde alla specie *O. Tabernaemontani* Gm. non è che una varietà dell' *O. laxiflora* Lamk. che se ne distingue pel lobo mediano del labbro della corolla che è molto più breve di quello della specie.

Ho raccolta questa forma tanto nei prati di Paderno, quanto in basso nelle valli *della Fiorentina* presso Medicina.

Giuncacee.

67. Luzula multiflora *Lej.*

Specie assai vicina alla *L. campestris* DC. colla quale potrebbe confondersi, ma che se ne distingue pei peduncoli che rimangono sempre eretti, pel filamento quasi

uguale in lunghezza all' antera, e pel rizoma cespitoso. È forse più comune della *L. campestris* ed io l' ho raccolta a Porretta e nei prati di Paderno.

68. L. multiflora *Lej.*
var. nigricans *DC.*

Forma particolare della specie precedente che se ne distingue per le spighe di colore bruno-nero, avvicinate, per essere quasi sessili, e per le foglie interamente glabre eccetto alla base. Raccolta da me ai *Campi di Lustrola.*

Graminacee.

69. Phleum pratense *L.*
var. γ intermedium *Schrad.*

Il Jordan ha distinta questa forma di *Ph. pratense* che ha una lunghezza di spiga considerevole, raggiungendo sino gli 8 e i 10 centimetri. Non è rara nel Bolognese, sul Monte Sabbione e nel Reno contro Porretta.

70. Digitaria sanguinalis *Scop.*
var. filiformis *Köl.*

Questa varietà ammessa nella *Nouvelle Flore Française* dai Sig. Gillet e Magne trovasi anche da noi e si distingue pel portamento sdraiato della pianta, per la sua glabrizia, e per le spighette piccolissime ed elittiche. Raccolta a Porretta presso la sorgente della Puzzola e nel prato della R. Università di Bologna.

71. Gastridium lendigerum *Gaud.*

Specie assai rara in Provincia, raccolta soltanto nei prati di Villanova alle sponde dei maceri della canepa.

72. Aira capillaris *Host.*
var. ambigua *De Not.*

L' *Aira capillaris* è una specie elegantissima di Gramigna assai comune nei nostri monti. Distinguesi dalla vicina specie *A. caryophyllea* L. per un solo fiore aristato e per altri caratteri della gluma.

Ora incontrasi una varietà della prima che presenta ambedue i fiori muniti di resta, e questa venne denominata *ambigua.* Fu raccolta dal Saccenti sul Granaglione nel luogo detto i *Boschi* e da me alla Selva degli Arienti.

73. Triodia decumbens *Beauv.*

Nell' *Hortus siccus Florae Bononiensis* abbiamo rilevata la presenza di questa specie molto rara, propria dei prati montani. La mancanza di indicazione non ci permette di riferirla ad alcuna località precisa, nel mentre però che siamo certi della sua presenza in Provincia.

74. Festuca Halleri *All.*

Alle varie specie di *Festuca* raccolte in provincia possiamo aggiungere anche la *F. Halleri* propria dei luoghi elevatissimi. Essa venne raccolta verso il Lago di Scaffajolo.

75. Poa pratensis *L.*
var. angustifolia *Sm.*

Distinguesi dalla specie volgarissima, per le foglie radicali strettissime, quasi convolte e setacee. Raccolta solo lungo la via che conduce a S. Vittore.

76. Poa nemoralis *L.*
var. coarctata *Gaud.*

Nei luoghi montuosi raccogliesi assai frequentemente la *P. nemoralis*, la quale offre diverse varietà. Una di queste è la superiormente indicata che distinguesi dalla specie pei fiori cinti da lana, per la pannocchia contratta e pel culmo un poco rigido.

L' ho raccolta ai *Campi di Lustrola* a Porretta contro il Bagno delle Donzelle e nel Canal Cavo lungo il Rio Maggiore.

77. Poa nemoralis *L.*
var. firmula *Gaud.*

Altra varietà distinta pei fiori liberi da lana, forniti di una gluma più breve di essi, e pel culmo decisamente rigido. Raccolta da me lungo la via che conduce ai prati sul Monte della Piella.

78. Lolium linicola *Sonder.*

Alle specie di *Lolium* che furono da tutti trovate in questa Provincia aggiungiamo il *L. linicola* che accompagna assai spesso la coltivazione del *L. usitatissimum*. Però è stato raccolto soltanto a *Monte Cocomero* nell' Apennino, verso il Monte Acuto delle Alpi.

79. Serrafalcus macrostachys *Parl.*

In uno dei nostri precedenti Contributi (*Nuovo Contributo alla Flora della Provincia di Bologna* 1878 p. 37) abbiamo riportato il *S. macrostachys* var. *β* minor *Gm.* ed ivi esprimemmo il dubbio della mancanza della specie tipica in questa Provincia.

Ora possiamo aggiungere che la specie venne trovata in grandiosi esemplari lungo la via provinciale che conduce a Malalbergo.

80. Hordeum secalinum *Schreb.*

Questa specie spontanea di Orzo assai distinta dal volgarissimo *Hordeum murinum* L. fu trovata nel Reno presso Marzabotto.

ACOTILEDONI

Equisetacee.

81. Equisetum arvense *L.*
var. alpestre *Wlbg.*

Questa varietà della specie comune *E. arvense* se ne distingue pei cauli sterili decombenti e pei verticilli assai ravvicinati. Raccolto nel Rio Maggiore, in luogo detto i *Codozzi.*

82. Equisetum limosum *L.*

Specie distintissima dall' *E. palustre*, per la forma della spiga, per la maggiore altezza dei cauli e pel numero dei solchi impressi sul medesimo, e per quello dei denti delle guaine che ponno raggiungere sino il numero di 20.

L' ho raccolta nei paduli di Mezzolara, e a Pontecchio sulle sponde del Reno.

Felci.

83. Polypodium Dryopteris *L.*
var. calcareum *Sm.*

Varietà che di solito ha il rizoma più grosso, le frondi rigide ben sostenute dallo stipite, disseminate nella pagina inferiore e nella rachide di peli brevi, glandulosi.

Raccolta sulle scogliere dei Codozzi a Porretta, e lungo il torrente Dardagna.

84. Nephrodium spinulosum *Desv.*
var. *α* dilatatum *Ces. Pass.* et *Gib.*

Questa bella specie che varia pei lobi dei segmenti quasi tutti confluenti e per la rachide larga, mi si è offerta nel Rio detto *delle Finocchielle* presso la Vergine del Faggio.

Caracee.

85. Chara fragilis *Desv.*

Alle specie di *Chara* segnalate nei miei precedenti contributi, aggiungo qui la *Ch. fragilis* raccolta da me nelle acque del Laghetto di Marano sopra Riola.

Perciò le acque della Provincia albergano tre specie di *Chara* che sono la *Ch. fragilis* Desv., la *Ch. foetida* A. Br. (*Ch. vulgaris* L. in parte) e la *Ch. hispida* L. e due specie di *Nitella,* cioè la *N. intricata* Agardh. (*Ch. fasciculata* Amici) e la *N. ulvoides* Cocc. (*Ch. ulvoides* Bert.) le quali ultime quattro specie furono notate nei precedenti Contributi.

SPECIE APPARTENENTI AI TRE PRECEDENTI CONTRIBUTI

RACCOLTE POSTERIORMENTE IN ALTRE LOCALITÀ DELLA PROVINCIA

Ranunculus aconitifolius *L.* — Prati della Piella. Corno alle Scale (Riva).

Nasturtium sylvestre *R. Br.* — Lungo la via provinciale di Malalbergo.

Lepidium ruderale *L.* — Riola, sopra Vergato.

Hypericum veronense *Schrank.* — Castagneti di Livergnano (Saccenti).

Trifolium agrarium *L.* — Prati della Piella.

Vicia saepium *α* vulgaris *Koch.* — Montese al Mingolino.

Lathyrus auriculatus *Bert.* — Boschi di Castelluccio.

Lathyrus hirsutus *L.* — Malalbergo (Valle Mazzacorati).

Orobus vernus *L.* — Montese.

Galium debile *Desv.* — Altedo. — Corno alle Scale.

Senecio erucifolius *L.* — Torrente Samoggia presso Calcara.

Cirsium ferox *DC.* — Prati del Piella.

Myosotis stricta *Link.* — S. Paolo di Ravone.

Leonorus Cardiaca *L.* — Montese a Salto (Riva).

Euphorbia palustris *L.* — Malalbergo. Rubizzano.

Allium acutangulum *Schrad.* — Riola.

Aceras antropophora *R. Br.* — Prato della Traversa.

Eriophorum angustifolium *Roth.* — Prati umidi del Piella.

Carex pilosa *L.* — Piella presso una fonte — Acero.

Carex sylvatica *Huds.* — Acero.

Baldingera arundinacea *Dum.* — Valli di Malalbergo, al Cavo Organa, dove attraversa la via provinciale verso Rubizzano.

Serrafalcus commutatus *Godr.* — Malalbergo — Prati di Castelluccio di Capugnano.

Lolium italicum *Al. Br.* — Monte Paderno — Malalbergo nelle valli — Lungo le mura di Bologna, sul ciglio delle fosse.

NOTA — Nel Contributo del 1878 indicai che la *Nardosmia fragrans* Rchb. era stata trovata spontanea nelle fosse di circonvallazione di Bologna per due anni di seguito (1873 e 1874) e che poscia non si era più veduta. Nell' anno presente 1880 è ricomparsa assai estesamente e l'abbiamo raccolta in fiore il 5 Marzo p. p.

METODO TEORICO PRATICO

PER ISCOPRIRE GL' ISTANTI DEL NASCERE E TRAMONTARE DELLA LUNA

SPECIALMENTE COLLA

CONNAISSANCE DES TEMPS

E COL

NAUTICAL ALMANAC GREENWICH

MEMORIA

CORREDATA DI 15 TAVOLE

DEL PROF. ANTONIO SAPORETTI

(Letta nella Sessione ordinaria del 18 Dicembre 1879)

Parte Teorica

Se la luna mantenesse costante la sua distanza dall' Equatore ed uniforme il movimento diurno apparente del suo centro attorno all' asse della terra, ci riuscirebbe agevole assai il calcolare l' istante del nascere e del tramontare di quello per un qualsiasi luogo di questa; il perchè indicata con l la latitudine geografica del luogo e con D la declinazione del centro della luna, positiva se boreale, negativa se australe, ci verrebbe dato di scoprire immediatamente gl' istanti del nascere e del tramontare di questo centro colla nota formola

$$\cos P = - \tan l \tan D$$

nella quale P ci rappresenterebbe quell' arco circolare ortivo oppure occiduo che ridotto in tempo ne porgerebbe il quanto si avrebbe a togliere oppure ad aggiungere al tempo del passaggio del centro della luna pel Meridiano Superiore del Luogo affine di ottenere i detti istanti del nascere e del tramontare del centro lunare.

Ma la declinazione del centro della luna è variabile di continuo, come pure il suo moto ascensionale, senza dire che necessaria cosa è l' avere riguardo altresì alla Refrazione del raggio luminoso, la quale ti rialza l' immagine degli oggetti; senza dire della parallasse lunare ed orizzontale che te la deprime invece, se pur

si vogliano realmente gl' istanti del Nascere e del Tramontare del centro della Luna.

Chi si dèsse con pazienza ad analizzare i varî processi del Nascere e del Tramontare della luna, tanto quelli degli astronomi bolognesi dal 1715 al 1845 e particolarmente dell' Eustachio Manfredi del 1715 e del Caturegli Pietro del 1817, quanto quelli dei trattatisti Lalande e Delambre, dopo non poche indagini e fatiche si farebbe accorto che questi loro processi erano basati sui moti medî, tanto diurni che annui, dai quali si venivano traendo i moti orarî con un' approssimazione, maggiore o minore, secondo che i moti medî erano più o meno prossimi agli orarî veri.

E qui giova il riportare alcuni brani del Prof. Piani, matematico insigne, e filosofo e astronomo-calcolatore al nostro Osservatorio dal 1845 al 1850 e di poi illustre Segretario Perpetuo di questa Accademia, intorno ai metodi, così detti da lui Caturegliani, come ognuno può vedere nell' autografo del Piani stesso, depositato nell' Archivio dell' Osservatorio, aggiungendo io quelle considerazioni che alla meglio mi sono accorse alla mente nello studio e nelle indagini sopra tale argomento.

« Prima del 1829, lasciò scritto il Piani, quando non si calcolava ancora la declinazione della luna in Meridiano, da inserirsi nelle Effemeridi bolognesi, per avere il tempo del Nascere e del Tramontare della luna si teneva il seguente processo, che chiameremo *Primo Metodo Caturegliano.* »

« Colla nota declinazione della Luna a mezzodì medio, come se fosse quella che essa avrebbe avuta al suo Nascere e al suo Tramontare, si calcolava l' arco semi-diurno, e tenuto calcolo della rifrazione e della parallasse media, si prendeva quest' arco ridotto in tempo da una Tavola, già a priori preparata e segnata in questo nostro Osservatorio *col N. 15 — luna*; e levandolo ed aggiungendolo al tempo del passaggio pel Meridiano, si aveva un tempo approssimato del Nascere e del Tramonto. Poi dalla variazione diurna della Declinazione si prendeva una parte proporzionale al tempo del Nascere colla Tavoletta approssimata dei moti orarî, posta in seguito della Tavola 15, ed unendo questa parte proporzionale alla Declinazione a mezzodì medio si aveva un valore approssimato della Declinazione all' epoca del Nascere, alla quale Declinazione si prendeva di nuovo dalla Tavola 15 l' arco semi-diurno, che, levato dall' epoca del passaggio pel Meridiano, dava (un po' più approssimata) l' epoca del Nascere e del Tramonto. »

« Similmente prendendo della Variazione Diurna della Declinazione la parte proporzionale al Tempo del Tramonto e unendola alla Declinazione a mezzodì medio, si aveva un valore prossimo della Declinazione all' epoca del Tramonto, colla quale Declinazione si prendeva dalla Tavola 15 l' Arco semi-diurno e aggiungendolo al tempo del Passaggio pel Meridiano, si otteneva il tempo del Tramonto. »

« Questo processo trovasi indicato in un Foglio speciale dove n' è fatta l' applicazione pei primi giorni dell' anno 1817. »

« Dal 1829 in appresso si pensò di calcolare la Declinazione del centro della luna in Meridiano, e perciò colla via tenuta superiormente si potè con questo dato

accostarsi al Metodo, insegnato dall' Eustachio Manfredi (Introductio in Ephemerides Bononienses. Editio altera Pag. 30. 1750 Bononiae) non che al metodo del Delambre (Astronomie. Vol. 2.° Pag. 226. Parigi 1814). »

Sospendendo l' autografo del Piani, dirò in breve quale fosse il processo, tenuto dal Manfredi e dal Delambre, seguace del Lalande.

Essi calcolavano per le Effemeridi l' istante del passaggio del centro della luna pel Meridiano; calcolavano la Declinazione della luna al medesimo Meridiano, come pure la Declinazione a mezzodì medio o vero. Con queste ultime deducevano il moto orario medio, computato per sei ore, come se l' arco semi-diurno, percosso dal centro della luna, fosse costantemente prossimo a quello di 90 gradi, ossia come se il centro della luna percorresse apparentemente e per approssimazione l'Equatore, si deduceva la Declinazione presuntiva, certo con una più o meno lontana approssimazione, all' istante del Nascere e del Tramontare del centro della luna, e colla solita nota formola, superiormente indicata, si ritraeva l' arco semi-diurno, vale a dire l' arco tanto ortivo che occiduo, ridotto in tempo per una prima approssimazione.

Colla cognizione di questi archi si deduceva meglio od almeno con una maggiore approssimazione, ma sempre adoperando i moti orarî medi, la Declinazione all' epoca del Nascere e del Tramontare del centro della luna; e finalmente con questa Declinazione di nuovo si deducevano un po' meglio ossia con maggiore approssimazione l' arco ortivo e l' arco occidentale, percorsi dal centro della luna, partendosi questo dall' orizzonte orientale e passato il Meridiano terminando all' orizzonte occidentale; e da qui se ne traevano gl' Istanti del Nascere e del Tramontare del centro della Luna.

Si notava dal Delambre, come anteriormente dal nostro Manfredi che questi archi, ortivi od occidui, ridotti in tempo, riuscivano espressi naturalmente in tempo medio lunare, il quale è più lungo del tempo solare medio a cagione del moto ascensionale retrogrado del centro della luna, vale a dire perchè l' Ascensione Retta del centro della Luna cresce continuamente per modo da rendere il suo moto medio apparente meno veloce del moto medio apparente del Sole ossia del moto uniforme apparente del Sole così detto *Fittizio*. Per la quale cosa sapendosi che, stando sempre in sulle medie, il rapporto del tempo lunare al corrispondente tempo solare è, in tempo solare medio, di

$$24^{ore} \quad a \quad 23^{ore}\ 10^{m}$$

essi astronomi con tale rapporto portavano una correzione ai tempi degli archi semi-diurni, siano orientali, siano occidentali.

Il Delambre infine colle note formole della parallasse lunare e della refrazione della luce giungeva a porgere un' ulteriore correzione ai tempi del Nascere e del Tramontare della luna; laddove dal Manfredi (Vedi pag. 34 Opera citata) si notava

che l' errore per questi fenomeni di Rifrazione e di Parallasse lunare era approssimativamente per Bologna di due od al più di tre minuti primi da aggiungersi all' istante del Nascere e da togliersi a quello del Tramontare del centro della Luna; oppure da sottrarsi ai tempi tanto degli archi orientali quanto degli archi occidentali, percorsi dal centro della Luna, quello dall' Orizzonte orientale al Meridiano, questo dal Meridiano all' Occaso, avendo il Manfredi lasciato scritto.

« Si tempus veri occasus Lunae, ex hoc praecepto inventum, duobus vel tribus minutis primis mulctaveris, tempus autem veri ortus tantumdem adauxeris, habebis ortum et occasum visibilem Lunae (saltem pro climatibus quae ab hoc nostro haud multum distant) parum ab exacto tempore dissidentem. Parallaxis enim, quae in hoc sidere prope horizontem duplo fere maior est quam refractio, Lunam semper deprimit atque adeo occasum accelerat, ortum retardat. »

Il Piani seguitando a discorrere del Nascere e del Tramontare della Luna ci manifesta che il Bedetti, matematico bolognese di qualche valore, morto giovanissimo, nel 1844 tornò al primo metodo, mentre poi il Piani soggiunge sè preferire il secondo Metodo Caturegliano, lasciando scritto quanto segue.

Secondo Metodo Caturegliano.

« Colla Declinazione della Luna in Meridiano (nei Cartolari dei calcoli per la Luna invece della Declinazione della Luna in Meridiano fu sempre presa la Declinazione a mezzodì medio) come se fosse quella del centro della Luna all' istante del Nascere e del Tramonto, e colla differenza dei tempi dei due successivi passaggi della Luna al Meridiano Superiore stesso, i quali comprendono l' arco in quistione, si prenda dalla Tavola 15. II. l' arco semi-diurno e poscia della variazione, che viene subìta dalla Declinazione fra i due mezzodì medî più vicini, si prenda la parte proporzionale all' arco semi-diurno trovato per mezzo della Tavoletta approssimata dei moti orarî annessa alla Tavola N. 15. II. »

« O più speditamente (questo, dice il Piani, è il metodo che prescelgo) quantunque meno esattamente, colla Declinazione della Luna in Meridiano e colla variazione, subìta dalla Declinazione fra i due mezzodì medî più vicini, si entri nella Tavoletta N. 16 Luna, e si otterrà la parte della variazione della Declinazione proporzionale (o meglio corrispondente) all' arco semi-diurno senza bisogno di averlo prima determinato, mentre questa Tavoletta N. 16 è destinata al problema « Data la variazione diurna della Declinazione della Luna e la stessa Declinazione Meridiana, trovare la quantità che si deve aggiungere o togliere dalla Declinazione Meridiana per avere la Declinazione all' istante del Nascere e del Tramontare. »

« Col valor prossimo della Declinazione all' istante del Nascere e colla Differenza dei tempi dei due passaggi consecutivi della Luna pel Meridiano, i quali comprendono l' arco in quistione, si avrà dalla Tavoletta (N. 15 Luna) un valore prossimo dell' arco semi-diurno ortivo che ridotto in tempo e sottratto dal tempo

del Passaggio del centro della Luna pel Meridiano darà il tempo del Nascere. »

« Similmente si determinerà l' arco semi-diurno occidentale od occiduo in tempo medio solare, il quale aggiunto all' epoca del passaggio al Meridiano darà l' epoca del Tramonto del centro della Luna. »

Fatte quelle maggiori indagini che mi riuscirono possibili, mi fu dato di scoprire che dalle tre rinomate Effemeridi Celesti di Parigi, di Greenwich, di Berlino, e cioè dalle « Connaissance des Temps; The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris; Berliner Astronomisches Jahrbuch » si potevano trarre tutti quegli elementi che al Nascere ed al Tramontare preciso del centro della Luna erano acconci. Per lo che meco medesimo deliberai di abbandonare, specialmente nei casi in cui si richiedesse la massima esattezza, il Metodo delle medie orarie, fin qui adoperate dagli Astronomi e di formolare un Nuovo Metodo e relativo Processo colle *orarie vere* che si possono, senza dubbio con un po' più di fatica, ma colla maggiore possibile approssimazione, dalle suddette Effemeridi ritrarre ed usare in atto pratico, procurando di porgere agli allievi-astronomi tutte quelle maggiori spiegazioni teorico-pratiche per me possibili che sono pure necessarie ad ottenere quanto si cerca, adoperando specialmente le prime due Effemeridi.

Ed innanzi tutto cercherò di tracciare alla meglio razionalmente o teoricamente il processo di questo Metodo che propongo e poscia cogli esempi farò vedere come in pratica si possa o si debba procedere con quella maggiore speditezza che soltanto certe cautele possono raggiungere.

Il problema del Nascere e del Tramontare della Luna consiste, come si è superiormente accennato, nel determinare gl' istanti in cui il centro della Luna si trova sull' orizzonte (Tav. I. Fig. 1[a]) nei punti, a d' oriente e c d' occidente, riferendoli convenientemente come cosa con tutto rigore determinabile all' istante del Passaggio del centro pel Meridiano in b, rappresentando MM_1 il Meridiano ed OO_1 l' orizzonte apparente.

E qui in 1.° luogo fa d' uopo determinare l' istante del Passaggio del centro della Luna al Meridiano opportunamente a tempo medio del Luogo che si considera, non che la Declinazione Meridiana.

In 2.° luogo fa d' uopo determinare l' arco ab semi-diurno ortivo che unisce il centro a orientale della Luna col centro della Luna al Meridiano, come pure l' arco semi-diurno occiduo bc che unisce il centro al Meridiano col centro occidentale della Luna.

A questo fine necessaria cosa è lo scoprire quale sia la Declinazione della Luna al suo Nascere ed al suo Tramonto, affinchè colla nota formola dei semi-archi diurni

$$\cos P = - \tan l \tan D$$

si determini in gradi questi archi medesimi semi-diurni, sì ortivi che occidui.

E qui secondo le indagini fatte dirò che si può far uso di due *Processi*, e cioè

1.° adoperando i moti orarî veri *a priori*; e 2.° adoperando bensì i moti orarî veri ma *a posteriori* e cioè servendoci per una prima approssimazione di quella qualunque approssimazione che pure si ottiene col 2.° Metodo Caturegliano, pigliando in tale guisa occasione di spiegare l' origine e la pratica del processo del nostro Astronomo Pietro Caturegli; mentre dagli scritti che giacciono nell' Archivio dell' Osservatorio poco si comprende, e tanto più che questo stesso processo riesce semplificato coll' uso da me istituito delle suddette Effemeridi, notando poi che così questo metodo Caturegliano può servire per chi non cerca una somma approssimazione.

In 3.° luogo si deve notare che riducendo ognuno di questi archi in ragione di 15 gradi all' ora, il tempo così ricavato è siderale, minore del tempo medio solare, impiegato dal centro della luna a percorrere lo stesso arco semi-diurno.

Ora a ridurre questi tempi siderali si ricorrerà da noi al tempo medio solare, impiegato dal centro della luna a percorrere l' arco di 180°, in luogo del tempo per un arco di 360° secondo il Metodo Caturegliano, il perchè dalle Effemeridi si può dedurre il vero tempo medio che trascorre nel passare che fa il centro lunare dal meridiano inferiore all' immediato superiore, toccando il punto a del Nascere della luna; come pure si ha il tempo medio, trascorso nel passaggio del centro lunare dal meridiano superiore all' immediato inferiore, toccando il punto c del Tramonto della Luna. Detto pertanto t il tempo siderale, corrispondente all' arco semi-diurno in discorso, sia ortivo, sia occiduo, e detto T il tempo medio solare suddetto, si stabilirà evidentemente la proporzione

$$12 \text{ (ore siderali)} : t : : T : x$$

indicato con x il tempo medio solare, trascorso dal centro lunare a percorrere l' arco semi-diurno, corrispondente a t.

Se non che importa avvertire che a cagione della parallasse lunare orizzontale e della rifrazione della luce il centro lunare apparente in a all' orizzonte (Tav. 1ª Fig. 2ª) è l' immagine del vero centro della luna in un certo punto a_1 tale che indicato con p l' effetto (in arco) della parallasse, dato per ogni istante dall' Effemeride, e con R quello della rifrazione, subìta dal raggio luminoso del centro lunare, si ha, con molta approssimazione, in questo caso di un piccolo arco (Delambre. Astronomie V. 1, XIII, 66°. Paris 1814)

$$\Delta = \text{arco } aa_1 = \frac{p - R}{\cos D \cos l \text{ sen } P} .$$

E qui pure a tutto rigore si dovrebbe instituire la proporzione

$$12 \text{ (ore tempo sid.)} : \Delta' : : T : x'$$

detto Δ' il tempo siderale corrispondente all' arco Δ; e per conseguenza $x - x'$ sarebbe il tempo, che tolto dal tempo medio solare del passaggio del centro della Luna pel Meridiano Superiore, darebbe l' istante del Nascere della Luna. Chè se si trattasse del Tramonto, allora $x - x'$ sarebbe il tempo che unito a quello del passaggio per lo stesso Meridiano darebbe l' istante del Tramonto del centro lunare.

In pratica senza errore sensibile si vedrebbe risultare anche assai bene e comoda la regola per pura approssimazione

$$12^{\text{or. sid.}} : t - \Delta' :: T : X \ ,$$

ove X terrebbe luogo di $x - x'$.

Finalmente ad abbreviare i calcoli è cosa utile assai per non dire necessaria il preparare idonee Tavole come si vedrà nella parte pratica.

Parte Pratica

Proponiamoci di determinare gl' istanti del Nascere e del Tramontare della Luna p. es. ne' primi giorni dell' anno 1880.

In primo luogo, come si disse, imprenderemo a determinare gl' istanti dei Passaggi del centro della Luna pel Meridiano (nel nostro caso) dell' Osservatorio di Bologna e per la maggiore approssimazione possibile, conforme a ciò che si disse, tanto pel Meridiano Inferiore che Superiore lo faremo.

Dalle Effemeridi di Parigi (Connaissance des Temps) per l' anno 1880 a pag. 67 tu troverai la colonna verticale sotto il titolo « Longitude des lieux où la lune passe au méridien » e facilmente ti accorgerai che queste longitudini (geografiche) sono occidentali ossia all' Ovest di Parigi Pp (Tav. I, Fig. 3ª); e quindi sapendo che la longitudine dell' Osservatorio di Bologna là ove è collocato il gran Circolo d' Ertel è di

$$36^{ore}\ 4^{m}$$

all' Est di Parigi, tu dovrai ridurla alla longitudine Ovest di Parigi stessa, e dirai che la longitudine di Bologna Bd all' Ovest di Parigi è di

$$23^{ore}\ 23^{m}\ 56^{s}\ .$$

Allora pel 1° di gennaio 1880 vedrai che nella suddetta colonna il meridiano di Bologna è situato fra i due Aa e Cc, notati dirimpetto alle ore 14 e 15, il primo di longitudine

$$22^{ore}\ 35^{m}\ 47^{s},27$$

e il secondo di longitudine

$$23^{ore}\ 33^{m}\ 58^{s},36$$

e ponendo per semplicità

		ore	m	s
per l' ora 14	$A_1 =$	22	35	47,27
" t_1	$B_1 =$	23	23	56,00
" 15	$C_1 =$	23	33	58,36

si ricaveranno le due differenze

$$C_1 - A_1 = 58^{m}\ 11^{s},09 \qquad\qquad B_1 - A_1 = 48^{m}\ 8^{s},73\ .$$

Sarà agevol cosa il trarre quanto tempo dovrà trascorrere nel passaggio del centro della Luna dal meridiano *Aa* (A_1) al meridiano *Bb* (B_1) di Bologna, conoscendo che in un' ora di tempo medio (solare) il centro lunare passa dal meridiano (A_1) al meridiano (C_1) colla proporzione

$$C_1 - A_1 : B_1 - A_1 :: 1^{ora} : t_1$$

e nel nostro caso, intendendo con t_1 il tempo in minuti secondi, colla

$$58^{m}\ 11^{s},09 : 48^{m}\ 8^{s},73 :: 3600^{s} : t_1\ .$$

E qui non importa ridurre tutto a secondi; il perchè le tavole logaritmiche di Callet o di Köhler o simili servono a ciò per ispeditezza (il che è cosa di qualche momento quando si trattasse di un anno come avviene in ogni Osservatorio) ed infatti si ha da Callet (Paris 1795)

	ora	m	s			
log (	1	0	0,00)	=	3.5563025	(N. 360)
log (	0	48	8,73)	=	3.4607069	(N. 288)
C log (	0	58	11,09)	=	6.4580390	(N. 348)

$$\log t_1 = 3.4740484 \quad ; \quad t_1 = 49^{m}\ 39^{s}\ .$$

Adunque il passaggio del centro lunare pel meridiano di Bologna accadrà a

$$14^{ore}\ 49^{m}\ 39^{s}$$

a tempo medio di Parigi.

Aggiungendo la differenza di meridiano in tempo

$$0^{ore}\ 36^{m}\ 4^{s}$$

si ottiene pel detto Passaggio al Meridiano (Superiore) a tempo medio di Bologna

$$T_1 = 15^{ore}\ 25^{m}\ 43^{s} = 15^{ore}\ 25^{m},7\ .$$

Chè se si volesse a tempo medio di Roma, come ora si usa per tutta Italia, siccome Roma è all' Est di Bologna per la differenza di meridiano di

$$0^{ore}\ 4^{m}\ 31^{s}$$

così è chiaro avvenire il detto Passaggio a tempo medio di Roma a

$$15^{ore}\ 30^{m}\ 14^{s}\ .$$

E qui usando delle sole Effemeridi Parigine utile cosa è il formare le Tavole, siccome io ho fatto, e come ognuno può fare col doppio argomento di

$$C - A \quad \text{e} \quad B - A$$

estendendole rispetto al 1.° argomento da

$$57^{m}\ 25^{s} \quad \text{a} \quad 58^{m}\ 42^{s}$$

e quanto al 2.° da

$$1^{m}\ 0^{s} \quad \text{a} \quad 58^{m}\ 0^{s}$$

il che si è potuto ritrarre, analizzando *estesamente* le Effemeridi parigine.

Alla fine ho riportato le Tav. 2ª, 3ª, 4ª e 5ª le quali sono il compendio delle nostre più estese, e che ognuno può con queste estendere.

Frattanto con queste sole vediamo come pur si possa dedurre il

$$t_1 = 49^{m}\ 39^{s}$$

cogli argomenti

$$C_1 - A_1 = 58^{m}\ 11^{s} \quad ; \quad B_1 - A_1 = 48^{m}\ 9^{s}\ .$$

Dalla Tav. 5.ª cogli argomenti

$$C - A = 58^m\ 12^s \quad , \quad B - A = 48^m\ 0^s$$

si ha

$$49^m\ 29^s$$

colla variazione di un minuto secondo salendo verticalmente per ogni minuto secondo dell' argomento analogo $C - A$, e colla variazione di 63 secondi per un minuto primo per l' altro argomento; laonde pel 1° argomento si ha nel nostro caso un aumento di un secondo, e per l' altro argomento si ha un aumento di 9 secondi pel passaggio di

$$B - A = 48^m\ 0^s \qquad \text{a} \qquad B_1 - A_1 = 48^m\ 9^s$$

e perciò si ha

$$t_1 = 49^m\ 29^s + 1^s + 9^s = 49^m\ 39^s$$

come sopra.

Similmente coi dati parigini (Pag. 67 e seg.)

		ore	m	s		ore	m	s
2 genn.	15 e 16 . . . $A_2 =$	22	50	24,65 ;	$C_2 =$	23	48	35,32
3 „	16 e 17 . . . $A_3 =$	23	4	19,75 ;	$C_3 =$	24	2	27,28
4 „	17 e 18 . . . $A_4 =$	23	16	21,11 ;	$C_4 =$	24	14	22,55
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

essendo costantemente per Bologna

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \ldots = 23^{ore}\ 23^m\ 56^s\ ,$$

si ha

	m	s		m	s
$C_2 - A_2 =$	58	10,67 ;	$B_2 - A_2 =$	33	31,35
$C_3 - A_3 =$	58	7,53 ;	$B_3 - A_3 =$	19	36,25
$C_4 - A_4 =$	58	1,44 ;	$B_4 - A_4 =$	7	34,89

da cui colle tavole suddette si ottiene

	m	s		ore	m	s		ore	m
$t_2 =$	34	34	$T_2 =$	16	10	38	=	16	10,6
$t_3 =$	20	13	$T_3 =$	16	56	17	=	16	56,3
$t_4 =$	7	50	$T_4 =$	17	43	54	=	17	43,9.

Scolio — In coteste Effemeridi parigine esiste una lacuna, perciocchè per certi giorni nauticamente parlando non viene data la longitudine dei luoghi, ai cui meridiani nelle successive ore del giorno passa il centro lunare. A questa lacuna si può sempre supplire colla seguente osservazione.

Siccome le Ascensioni Rette degli astri sono generalmente espresse in ore siderali, come accade per la Luna nella Connaissance des Temps, così fa d' uopo notare che ad un' ora di tempo medio corrisponde (Pag. 678: Conn. des Temps 1880, Tav. VI) il tempo siderale

$$1^{ora}\ 0^m\ 9^s{,}856\ .$$

Se ora p. e. pel primo giorno gennaio 1880 si voglia considerare per l' ora 5ª di tempo medio l' Ascensione Retta della Luna (Pag. 67)

$$\alpha_5 = 9^{ore}\ 50^m\ 44^s{,}80$$

a cui corrisponde il luogo *Ll* di longitudine (Fig. 4.ª, Tav. I)

$$L_5 = 13^{ore}\ 52^m\ 9^s{,}50$$

e se si desideri p. e. la longitudine del luogo $L_1 l_1$ corrispondente all' ora 10ª, si dovrà prima supporre che il centro della Luna resti in *Ll* e che perciò la sua Ascensione Retta diventi

$$A_i = 9^{ore}\ 50^m\ 44^s{,}80 + 5\ (1^{ora}\ 0^m\ 9^s{,}856)$$

ossia

$$A_i = 14\ \ 51\ \ 34{,}082\ .$$

Ma realmente l' Ascensione Retta della Luna all' ora decima è (Pag. 67)

$$\alpha_{10} = 10^{ore}\ 0^m\ 40^s{,}26$$

la cui differenza coll' ipotetica è di

$$4^{ore}\ 50^m\ 53^s{,}822$$

ed è evidente che questa differenza aggiunta alla longitudine di *Ll* dà la longitudine del luogo $L_1 l_1$ ossia dà pel

1° genn. ora 10ª $\qquad L_{10} = 13^{ore}\ 52^m\ 9^s{,}50$

come realmente si trova alla Pag. 67 Conn. des Temps dell' anno 1880.

Dobbiamo anche notare che pel luogo particolare, Bologna, la cui longitudine geografica è

$$B = 23^{ore}\ 23^m\ 56^s$$

all' Ovest di Parigi, sarà necessario il cercare *solo* le longitudini *Limiti* di questa, come si è fatto superiormente allorchè esse erano date dalle Effemeridi parigine.

Così cominciando dal giorno 7 Genn. 1880, pel quale mancano le longitudini dei luoghi di passaggio della luna ai loro corrispondenti, si osserverà che alle ore 23 del 6 corrisponde la longitudine

$$L\ (6,23) = 3^{ore}\ 20^{m}\ 54^{s},970$$

e quindi avuto bene in mente la B si calcoleranno le longitudini di Passaggio per le ore 19 e 20 del 7 gennaio, partendo naturalmente dalla Ascensione Retta dell' ora 23 del giorno 6 che è (Pag. 69)

$$A\ (6,23) = 14^{ore}\ 44^{m}\ 39^{s},540\ .$$

E siccome dall' ora 23 del 6 all' ora 19 del 7 corrono 20 ore, così l' Ascensione Retta fittizia resta aumentata per

$$20^{ore}\ 3^{m}\ 17^{s},129 \qquad \text{(Tav. VI. Pag. 678)}$$

e quindi l' Ascensione Retta Fittizia è

$$A\ (7,19,\ f) = 34^{ore}\ 47^{m}\ 56^{s},669$$

indicando col 7 il giorno, col 19 l' ora e colla f l' essere fittizio di quest' Ascensione Retta.

E per essere realmente

$$A\ (7,19) = 15^{ore}\ 35^{m}\ 43^{s},720$$

si ha

$$A\ (7,19,f) - A\ (7,19) = 19^{ore}\ 12^{m}\ 12^{s},949$$

la quale differenza va aggiunta alla longitudine L (6,23) per avere la longitudine cercata L (7,19), la quale perciò sarà

$$L\ (7,19) = 22^{ore}\ 33^{m}\ 7^{s},919\ .$$

Per l' ora successiva si ha

$$A\ (7,20,f) = A\ (7,19) + 1^{ora}\ 0^{m}\ 9^{s},856$$

ossia $A\ (7,20,f) = 16\ \ 35\ \ 53,576$.

Ma è $A\ (7,20) = 15\ \ 38\ \ 20,920$ (Pag. 70)

e quindi si ricava la differenza

$$A\ (7{,}20{,}f)\ -\ A\ (7{,}20) = 57^m\ 32^s{,}656\ ,$$

dalla quale unita alla L (7,19) si ha

$$L\ (7{,}20) = 23^{ore}\ 30^m\ 40^s{,}585\ .$$

E così proseguendo si dedurrebbero le longitudini limiti della B per tutti i giorni, in cui non sono date queste dalle Effemeridi parigine.

Qui per brevità riporteremo soltanto i risultamenti pel primo periodo

			ore	m	s				ore	m	s		
A_8	=	L (8,20) =	22	30	18,21	;	L (8,21) =		23	27	44,60	=	C_8
A_9	=	L (9,22) =	22	23	29,74	;	L (9,23) =		24	20	56,24	=	C_9
A_{10}	=	L (10,23) =	23	20	39,84	;	L (11, 0) =		24	18	12,88	=	C_{10}
A_{12}	=	L (12, 0) =	23	21	24,94	;	L (12, 1) =		24	19	8,26	=	C_{12}
A_{13}	=	L (13, 0) =	22	28	45,99	;	L (13, 1) =		23	26	39,75	=	C_{13}
A_{14}	=	L (14, 1) =	22	38	6,85	;	L (14, 2) =		23	36	9,95	=	C_{14}
A_{15}	=	L (15, 2) =	22	50	51,29	;	L (15, 3) =		23	49	1,16	=	C_{15}

notando che a Pag. 72 Connaissance des Temps 1880 si trova

$$L\ (15{,}2) = 22^{ore}\ 50^m\ 51^s{,}30$$

con la differenza appena di un centesimo di un minuto secondo dal dedotto da me

$$L\ (15{,}2) = 22^{ore}\ 50^m\ 51{,}29\ .$$

Pei Passaggi del centro lunare al meridiano inferiore si dovrà evidentemente supporre la longitudine di Bologna

$$B_1 = 11^{ore}\ 23^m\ 56^s$$

e disporre le operazioni per mezzo delle Effemeridi parigine alla stessa guisa, usata pel meridiano superiore, e cioè (Conn. des Temps. 1880. Pag. 67 e seg.)

			ore	m	s			ore	m	s
1 genn.	ora	2 e 3 . . . A_1 =	10	56	38	;	C_1 =	11	55	48
2 „	„	3 e 4 . . . A_2 =	11	12	13	;	C_2 =	12	10	24
3 „	„	3 e 4 . . . A_3 =	10	28	27	;	C_3 =	11	26	37
4 „	„	4 e 5 . . . A_4 =	10	41	37	;	C_4 =	11	39	42 ,

. . . .

essendo costantemente per Bologna

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \ldots = 11^{ore}\ 23^m\ 56^s$$

e da qui

$$\begin{array}{ll} C_1 - A_1 = \overset{m}{58}\ \overset{s}{10} & B_1 - A_1 = \overset{m}{26}\ \overset{s}{18} \\ C_2 - A_2 = 58\ 11 & B_2 - A_2 = 11\ 43 \\ C_3 - A_3 = 58\ 10 & B_3 - A_3 = 55\ 29 \\ C_4 - A_4 = 58\ \ 5 & B_4 - A_4 = 42\ 19 \end{array}$$

ed adoperando le tavole 2-5 si ottiene pei Passaggi del centro lunare al meridiano inferiore a tempo medio di Bologna

$$\begin{array}{l} T_1' = \overset{ore}{2}\ \overset{m}{27}\ \ \overset{s}{8} + \overset{m}{36}\ \overset{s}{4} = \overset{ore}{3}\ \ \overset{m}{3}\ \overset{s}{12} = \overset{ore}{3}\ \ \overset{m}{3{,}2} \\ T_2' = 3\ 12\ \ 5 + 36\ 4 = 3\ 48\ \ 9 = 3\ 48{,}2 \\ T_3' = 3\ 57\ 14 + 36\ 4 = 4\ 33\ 18 = 4\ 33{,}3 \\ T_4' = 4\ 43\ 43 + 36\ 4 = 5\ 19\ 47 = 5\ 19{,}8. \end{array}$$

Chi desiderasse eseguire il calcolo colle proporzioni, troverebbe gli stessi risultamenti, i quali al più possono riuscire differenti per un minuto secondo; il che ci fa sicuri di tali tavole con risparmio di tempo e di fatica.

Quanto ai giorni, in cui le Effemeridi parigine non porgono le longitudini dei luoghi, si procederà come si è detto superiormente.

Determiniamo i Passaggi stessi coll' Effemeridi di Greenwich.

Con alcune indagini vedremo che fa d' uopo servirci delle variazioni semi-diurne dei Passaggi superiori ed inferiori, notando che per essere Bologna all' Est di Greenwich di

$$45^m\ 25^s$$

il centro lunare giunge prima al meridiano di Bologna e che per conseguenza la variazione si deve sottrarre dai tempi dei Passaggi al meridiano inglese.

Alla pag. 5 (The Nautical Almanac. 1880) si trova

			ore	m	
1 genn.	Passaggio	Inferiore	3	4,6	$= I_1$
	„	Superiore	15	27,1	$= S_1$
2	„	I.	3	49,6	$= I_2$
	„	S.	16	21,1	$= S_2$
3	„	I.	4	34,8	$= I_3$
	„	S.	16	57,8	$= S_3$
4	„	I.	5	21,3	$= I_4$
	„	S.	17	45,5	$= S_4$

. . . .

le cui variazioni semi-diurne ossia in 12 ore sono

$$
\begin{array}{l}
S_1 - I_1 = 12^{ore}\ 22^m,5 \ ; \quad I_2 - S_1 = 12^{ore}\ 22^m,5 \\
S_2 - I_2 = 12\ 22,5 \ ; \quad I_3 - S_2 = 12\ 22,7 \\
S_3 - I_3 = 12\ 23,0 \ ; \quad I_4 - S_3 = 12\ 23,5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

che porgono le proporzioni

$$
\begin{array}{l}
12^{ore} : 45^m\ 25^s :: 22^m,5 : t_1 \\
12 : 45\ 25 :: 22,7 : t_2 \\
12 : 45\ 25 :: 23,0 : t_4 \\
12 : 45\ 25 :: 23,5 : t_4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

le quali dànno

$$t_1 = 1^m,4 \ ; \quad t_2 = 1^m,4 \ ; \quad t_3 = 1^m,5 \ ; \quad t_4 = 1^m,5$$

e quindi pei Passaggi al meridiano superiore si ha a tempo medio di Bologna

$$
\begin{array}{l}
T_1 = 15^{ore}\ 27^m,1 - 1^m,4 = 15^{ore}\ 25^m,7 \\
T_2 = 16\ 12,1 - 1,4 = 16\ 10,7 \\
T_3 = 16\ 57,8 - 1,5 = 16\ 56,3 \\
T_4 = 17\ 45,5 - 1,5 = 17\ 44,0
\end{array}
$$

e pei Passaggi al meridiano inferiore si ha

$$
\begin{array}{l}
T_1' = 3\ \ 4,6 - 1,4 = 3\ \ 3,2 \\
T_2' = 3\ 49,6 - 1,4 = 3\ 48,2 \\
T_3' = 4\ 34,8 - 1,5 = 4\ 33,3 \\
T_4' = 5\ 21,3 - 1,5 = 5\ 19,8
\end{array}
$$

con differenze insensibili dalle ottenute per mezzo della Effemeridi parigine.

E qui pure ad evitare il calcolo delle successive proporzioni serve la seguente tavoletta o specchietto

$$
\left|\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 20^m,0 \ldots 21^m,4 \\ 1,3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 21^m,5 \ldots 22^m,9 \\ 1,4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 23^m,0 \ldots 24^m,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 24,6 \ldots 26,1 \\ 1,6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 26,2 \ldots 27,7 \\ 1,7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 27,8 \ldots 29,3 \\ 1,8 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 29,4 \ldots 30,9 \\ 1,9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 31,0 \ldots 32,4 \\ 2,0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 32,5 \ldots 33,0 \\ 2,1 \end{pmatrix}
\end{array}\right|
$$

facile a formarsi e ad usarsi.

Se p. e. si avesse

$$I - S = 12^{ore}\ 24^m,7$$

ossia se la variazione per 12 ore fosse di

$$24^m,7\ ,$$

allora la quantità da sottrarsi sarebbe di

$$1^m,6$$

come si scorge nella quarta delle parentesi la quale ci dice che per le variazioni, comprese fra

$$24^m,6 \quad e \quad 26^m,1$$

incluso le stesse estreme, si ha

$$1^m,6\ .$$

Determinazione dei Passaggi colle Effemeridi di Berlino (Berliner Astronomiches Jahrbuch 1880).

A pag. 5 si trova

			ore	m	Differenze ore	m
1	genn. Pass.	I.	3	2,9		
	„	S.	15	25,5	12	22,6
2	„	I.	3	47,9	12	22,4
	„	S.	16	10,4	12	22,5
3	„	I.	4	33,0	12	22,6
	„	S.	16	56,0	12	23,0
4	„	I.	5	19,5	12	23,5
	„	S.	17	43,6	12	24,1

e per essere Bologna all' Ovest di Berlino per

$$8^m\ 10^s$$

si devono risolvere le proporzioni, come si è fatto per Greenwich e cioè le

$$12^{ore} : 8^m\ 10^s : : 22^m,6 : t_1$$
$$12 : 8\ 10 : : 22,4 : t_2$$

. . . .

o più speditamente coll' analoga tavoletta riportata per London vale a dire collo specchietto

$$\left(\overset{m}{20,0} \ldots . \overset{m}{22,0} \atop 0,2\right) \quad \left(\overset{m}{23,0} \ldots . \overset{m}{30,0} \atop 0,3\right) \quad \left(\overset{m}{31,0} \ldots . \overset{m}{35,0} \atop 0,4\right)$$

e coll' aumentarne i passaggi, ottenendo

$$\begin{array}{ll} T_1 = \overset{ore}{15}\ \overset{m}{25,7} & T_1' = \overset{ore}{3}\ \ \overset{m}{3,2} \\ T_2 = 16\ 10,7 & T_2' = 3\ 48,2 \\ T_3 = 16\ 56,3 & T_3' = 4\ 33,3 \\ T_4 = 17\ 43,9 & T_4' = 5\ 19,8 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

come si è avuto superiormente con insensibilissime differenze.

In 2° luogo, come si è detto, si ha a determinare la declinazione del centro lunare al meridiano sì superiore che inferiore.

I. Colla « Connaissance des Temps » per l' anno 1880.

Osserviamo che a pag. 67 e seg. la declinazione della Luna è data per ogni ora e colla variazione, subìta dalla stessa declinazione, per ogni minuto primo; per la qual cosa avremo a determinare coll' istante già ottenuto del passaggio della luna al meridiano la declinazione corrispondente, la quale sarà perciò quella che si cerca.

Se non che trattandosi di usare delle Effemeridi di Parigi si dovranno determinare, bensì le declinazioni corrispondenti agl' istanti dei passaggi del centro lunare pel meridiano di Bologna, ma questi istanti dovranno essere quelli che sono espressi in tempo medio di Parigi; e per conseguenza saranno i seguenti, superiormente dedotti, e che ora si disporranno a fine della maggiore possibile approssimazione (sempre per gennaio 1880) nella seguente maniera

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ Pass.} & I_1 = \overset{ore}{2}\ \overset{m}{27}\ \ \overset{s}{8} & = \overset{ore}{2} + \overset{m}{27,13} \\ \quad " & S_1 = 14\ 49\ 39 & = 15 - 10,35 \\ 2 \quad " & I_2 = 3\ 12\ \ 5 & = 3 + 12,08 \\ \quad " & S_2 = 15\ 34\ 34 & = 16 - 25,43 \\ 3 \quad " & I_3 = 3\ 57\ 14 & = 4 - \ \ 2,77 \\ \quad " & S_3 = 16\ 20\ 13 & = 16 + 20,22 \\ 4 \quad " & I_4 = 4\ 43\ 43 & = 5 - 16,28 \\ \quad " & S_4 = 17\ \ 7\ 50 & = 17 + \ \ 7,83 \end{array}$$

e ciò perchè, come fu detto, le variazioni delle declinazioni sono state calcolate per ogni minuto primo, o per ogni 10 minuti primi, il che è lo stesso, giacchè in questo ultimo caso è subitamente pronta la variazione per ogni solo minuto primo.

Ora indicate con d_1, d_2, ... le declinazioni della Luna al meridiano inferiore e con D_1, D_2, ... quelle al meridiano superiore, prese dalla Pag. 67 e seg. (Conn. des Temps 1880) le declinazioni secondo i giorni e le ore superiormente ricavate e le corrispondenti variazioni, si ha, ponendo bene attenzione ai segni

$$
\begin{array}{lllllll}
d_1 & = + & 9^\circ\,59'\,47'' & - & 27{,}13 \times 12{,}746'' & = + & 9^\circ\,54'\,0'' \\
D_1 & = + & 7\;\;9\;\;56 & + & 10{,}35 \times 13{,}359 & = + & 7\;\;12\;\;14 \\
d_2 & = + & 4\;\;26\;\;55 & - & 12{,}08 \times 13{,}789 & = + & 4\;\;24\;\;8 \\
D_2 & = + & 1\;\;25\;\;27 & + & 25{,}43 \times 14{,}102 & = + & 1\;\;31\;\;26 \\
d_3 & = - & 1\;\;24\;\;45 & + & 2{,}77 \times 14{,}241 & = - & 1\;\;24\;\;6 \\
D_3 & = - & 4\;\;15\;\;44 & - & 20{,}22 \times 14{,}227 & = - & 4\;\;20\;\;32 \\
d_4 & = - & 7\;\;19\;\;36 & + & 16{,}28 \times 14{,}028 & = - & 7\;\;15\;\;48 \\
D_4 & = - & 10\;\;5\;\;53 & - & 7{,}83 \times 13{,}655 & = - & 10\;\;7\;\;40 \\
\ldots & & & & & &
\end{array}
$$

E qui giova notare che pel Nascere e Tramontare della Luna certa cosa è essere sufficiente il calcolare gli accrescimenti o le diminuzioni con un solo decimale, ed allora serve p. e. la Tavola 7ª assai bene e speditamente, se non si volessero poi adoperare le tavole di moltiplicazione coi fattori di 4 cifre estendendole per l' uno dei fattori a 30 e per l' altra a 15 unità.

Ecco intanto l' uso di questa nostra Tav. 6ª. Si debba p. e. calcolare la d_1: col doppio argomento degl' interi (27 e 12) si ha dalla Tav. 6ª

$$5'\ 24''$$

e poscia senza neppure osservare la Tav. suddetta si consideri la prima cifra decimale dei due fattori

$$27{,}13 \quad \text{e} \quad 12{,}746$$

e si moltiplichi la prima cifra decimale del 1° fattore col numero intero dell' altro e così viceversa e si prenda il decimo della somma dei due prodotti parziali, con riduzione d' abbondanza; così nel nostro caso si avrà

$$1 \times 13'' + 8 \times 27'' = 229''$$

il cui decimo è

$$23'' \quad \text{che con} \quad 5'\ 24'' \quad \text{fa} \quad 5'\ 47''$$

e perciò si avrà

$$d_1 = + 9^0\ 59'\ 47'' - 5'\ 47'' = + 9^0\ 54'\ 0''$$

come sopra. E così dicasi degli altri casi, ove al più troverai la differenza di un qualche secondo in arco, mentre un minuto secondo in tempo corrisponde a 15 secondi in arco nel movimento siderale.

II. Determinazione delle declinazioni colle Effemeridi di Greenwich.

Con queste si procederà come si è fatto colle parigine, imperciocchè qui pure sono date le declinazioni per ogni ora e colle variazioni per ogni 10 minuti primi, e però il decimo di queste variazioni sta per ogni minuto primo; se non che Greenwich è all' Ovest di Bologna per

$$45^m\ 25^s \quad \text{ossia per} \quad 45^m,4$$

e quindi fa d' uopo prima ridurre i tempi degl' istanti de' Passaggi della Luna al meridiano di Bologna, ricavati soltanto a tempo medio di Bologna stessa, in tempi medî di Greenwich, affine di potere a questi così ridotti applicare i dati delle Effemeridi di Greenwich, col sottrarvi la detta differenza di Meridiano.

Si avrà adunque per Gennaio 1880

$$
\begin{array}{llrrrrrrrl}
 & & & \overset{ore}{} & \overset{m}{} & & \overset{m}{} & & \overset{ore}{} & \quad \overset{m}{} \\
1 \text{ Pass.} & I_1 & = & 3 & 3,2 & - & 45,4 & = & 2 & + 17,8 \\
\text{"} & S_1 & = & 15 & 25,7 & - & 45,4 & = & 15 & - 19,7 \\
2 \text{ "} & I_2 & = & 3 & 48,2 & - & 45,4 & = & 3 & + 2,8 \\
\text{"} & S_2 & = & 16 & 10,7 & - & 45,4 & = & 15 & + 25,3 \\
3 \text{ "} & I_3 & = & 4 & 33,3 & - & 45,4 & = & 4 & - 12,1 \\
\text{"} & S_3 & = & 16 & 56,3 & - & 45,4 & = & 16 & + 10,9 \\
4 \text{ "} & I_4 & = & 5 & 19,8 & - & 45,4 & = & 5 & - 25,6 \\
\text{"} & S_4 & = & 17 & 44,0 & - & 45,4 & = & 17 & - 1,4\ .
\end{array}
$$

Ed ora coi dati della Pag. 6 e seguenti (The Nautical Almanac for the year 1880) si avrà, usando, se si crede per ispeditezza, la Tav. 7ª,

$$
\begin{array}{lcl}
d_1 & = & + \ 9^0\ 57'\ 48'' - 17,8 \times 12'',8 = + \ 9^0\ 54'\ 1'' \\
D_1 & = & + \ 7\ \ 7\ 51 + 19,7 \times 13,4 = + \ 7\ 12\ 15 \\
d_2 & = & + \ 4\ 24\ 46 - \ 2,8 \times 13,8 = + \ 4\ 24\ \ 7 \\
D_2 & = & + \ 1\ 37\ 21 - 25,3 \times 14,1 = + \ 1\ 31\ 24 \\
d_3 & = & - \ 1\ 26\ 58 + 12,1 \times 14,2 = - \ 1\ 24\ \ 6 \\
D_3 & = & - \ 4\ 17\ 56 - 10,9 \times 14,2 = - \ 4\ 20\ 31 \\
d_4 & = & - \ 7\ 21\ 47 + 25,6 \times 14,0 = - \ 7\ 15\ 49 \\
D_4 & = & - 10\ \ 8\ \ 1 + \ 1,4 \times 13,6 = - 10\ \ 7\ 42
\end{array}
$$

i quali risultamenti poco differiscono da quelli dedotti con la Connaissance des Temps.

III. Determinazione delle declinazioni meridiane colle « Berliner Astronomiches. Jahrbuch für 1880. »

Si noti che queste Effemeridi porgono soltanto le declinazioni al proprio meridiano colle variazioni orario-siderali, se non che è così piccola la differenza di meridiano con Bologna che si riesce ad ottenersi una sufficiente approssimazione, colla seguente approssimazione

$$0^{ore}\ 59^m\ 50^s : 8^m\ 10^s :: v : \delta$$

essendo il 1° termine il tempo medio, equivalente ad un' ora siderale; il 2° rappresentando la differenza di meridiano; il 3° indicando la variazione orario-siderale della declinazione, e δ la quantità da unirsi alla data declinazione, e notando in fine che Bologna è all' Ovest di Berlino.

Formando la Tav. 7ª colla suddetta proporzione estesa da

$$v = 0'\ 0'' \quad \text{a} \quad v = 15'\ 9''$$

come si ricava dall' analisi o dalla indagine fatta sull' intero anno rispetto alla variazione oraria della declinazione, si ha ora (Pag. 5. Berliner Astron. Jahrbuch) sempre pel gennaio 1880

$$d_1 = +\ 9^0\ 55',9 - ((13',2)) = +\ 9^0\ 54'\ 6''$$

indicando col simbolo

$$((13',2))$$

la quantità che si ottiene dalla Tav. 7ª per 13',2 variazione oraria data dalla Effemeride, la quale quantità è 1' 48'' la quale sottratta dalla declinazione

$$+\ 9^0\ 55'\ 54''$$

dà precisamente la

$$\begin{aligned}
d_1 &= +\ 9^0\ 55',9 - ((13',2)) = +\ 9^0\ 54'\ 6'' \quad ;\ \text{e così}\\
D_1 &= +\ 7\ 14,2 - ((13,8)) = +\ 7\ 12\ 13\\
d_2 &= +\ 4\ 26,2 - ((14,2)) = +\ 4\ 24\ 16\\
D_2 &= +\ 1\ 33.5 - ((14,5)) = +\ 1\ 31\ 31\\
d_3 &= -\ 1\ 22,0 - ((14,7)) = -\ 1\ 24\ 0\\
D_3 &= -\ 4\ 18,4 - ((14,7)) = -\ 4\ 20\ 24\\
d_4 &= -\ 7\ 13,7 - ((14,5)) = -\ 7\ 15\ 41\\
D_4 &= -\ 10\ 5,6 - ((14,1)) = -\ 10\ 7\ 31
\end{aligned}$$

con un decimo di un primo in arco per differenza dalle ottenute superiormente.

In 3° luogo, come fu detto, dobbiamo indagare o piuttosto scoprire colla maggiore possibile approssimazione la declinazione del centro lunare all' orizzonte, sì all' Oriente che all' Occidente, denominando la prima « Declinazione Orientale » e l' altra « Declinazione Occidentale ».

Si disse poi che la parte principale di questo nostro metodo sta specialmente nel potere far uso de' moti veri, tratti dalle suddette Effemeridi, in luogo dei moti medî di cui usò il Caturegli, seguace dei Manfredi, dei Delambre, dei Lalande; se non che lo stesso metodo dei moti medî ci porge favorevole opportunità di giovarcene nel medesimo nostro metodo, tanto più che ciò ci spinge ad esporre teorico-praticamente il processo di questo metodo dei nostri padri antichi, modificato da me stesso nell' uso che io ne feci per questi ultimi anni. Per la quale cosa, come già accennai, imprenderò prima a trattare co' fatti del Metodo dei Moti Medî combinati coi Veri, e poscia del Metodo dei Moti puramente Veri; il primo denominando *Indiretto* od *a Posteriori*; il secondo chiamando *Diretto* od *a Priori.*

Primo Metodo.

Si pongano nella 2.ª colonna (Tav. 8.ª) i tempi dei Passaggi della Luna pel meridiano (di Bologna) sì inferiore che superiore, determinati p. e. colle Effemeridi parigine, e corrispondenti ai giorni, notati nella 1.ª colonna: si formino le differenze di questi tempi, collocandole nella 3.ª colonna; e formando anche i doppi delle differenze, che sono stati posti nella 4.ª colonna.

Si trascrivano nella 5ª colonna le declinazioni meridiane, sempre già dedotte colle Effemeridi parigine, e si formino le loro differenze nella 6.ª colonna ed i loro doppi nella colonna 7.ª.

Il Caturegli ed il Piani facevano uso di una Tavola, designata da loro col N. 16 Luna, e che da noi viene prodotta nella Tav. 10.ª colla quale data la declinazione meridiana superiore e data la variazione diurna di questa fra i due mezzodì medî che comprendono l' arco in quistione si deduce con una certa approssimazione la declinazione al Nascere ed al Tramonto; e della cui costruzione diremo in fine, insieme colla spiegazione delle altre, adoperate dagli astronomi bolognesi nel calcolare il Nascere e Tramontare della Luna.

Per ora proseguiamo a vedere come facevano allora. Cominciando dalla ricerca della declinazione del Nascere della Luna pei 3 primi giorni dell' anno 1880 si dovranno combinare gli argomenti verticali (colonna 5.ª Tav. 8.ª)

$$+\ 7^{o}\ 12'\ 14''\ ;\ +\ 1^{o}\ 31'\ 26''\ ;\ -\ 4^{o}\ 20'\ 32''\ ;$$

cogli argomenti orizzontali (colonna 7.ª)

$$5^{o}\ 23'\ 32''\ ;\ \ 5^{o}\ 45'\ 24''\ ;\ \ 5^{o}\ 52'\ 52''$$

o semplicemente per uso della Tav. 10.ª del Caturegli si combineranno gli argomenti verticali

$$+ 7^0\ 15' \ ; + 1^0\ 30' \ ; - 4^0\ 15'$$

cogli argomenti orizzontali

$$5^0\ 20' \ ; \ 5^0\ 45' \ ; \ 5^0\ 50'$$

e colla Tav. 10.ª si otterranno le così dette parti proporzionali

$$+ 1^0\ 28' \ ; + 1^0\ 30' \ ; + 1^0\ 27' \qquad \text{(colonna 8.ª)}$$

notando che le declinazioni (colonna 5.ª) vanno diminuendo, e per conseguenza le declinazioni agl' istanti corrispondenti del Nascere della Luna saranno (colonna 9.ª) trascurando i secondi,

$$+ 8^0\ 40' \ ; + 3^0\ 1' \ ; - 2^0\ 54' .$$

Quanto alla declinazione al Tramonto si avranno a combinare gli argomenti verficali (col. 5.ª)

$$+ 7^0\ 15' \ ; + 1^0\ 30' \ ; - 4^0\ 15'$$

cogli argomenti orizzontali corrispondenti

$$5^0\ 35' \ ; \ 5^0\ 50' \ ; \ 5^0\ 50'$$

già ridotti per l' uso della Tav. Cat. e notando che rispetto alle declinazioni meridiane decrescenti si devono sottrarre le così dette parti proporzionali, avute coi detti argomenti, si ha

$$- 1^0\ 32' \ ; - 1^0\ 30' \ ; - 1^0\ 25' \qquad \text{(col. 10.ª)}$$

e quindi le declinazioni probabili ai corrispondenti istanti dei Tramonti sono

$$+ 5^0\ 40' \ ; + 0^0\ 1' \ ; - 5^0\ 46' \qquad \text{(col. 11.ª)}$$

Ora fa d' uopo secondariamente determinare il tempo che è impiegato dal centro lunare *apparente* a percorrere l' arco ortivo e l' arco occiduo, e cioè il tempo che si richiede dal nascere del centro lunare apparente al suo passaggio pel meridiano superiore, e il tempo che si richiede dal passaggio suddetto all' orizzonte occidentale ossia al tramonto del centro stesso lunare e sempre senza dubbio

apparente; il perchè questi tempi ottenuti, si dovrà sottrarre il primo dal tempo del passaggio al meridiano superiore per trarre l' istante del Nascere, e si dovrà aggiungere il secondo tempo a quello del passaggio meridiano suddetto affine di fissare l' istante del Tramonto.

Ad ottenere pertanto questi archi ortivi ed occidui il Caturegli adoperava una tavola che contrassegnò col N. 15 Luna, e che noi abbiamo riportata nella Tavola 11, alquanto ridotta, colla quale data la declinazione al Nascere od al Tramonto e data la differenza dei tempi dei passaggi consecutivi del centro lunare allo stesso meridiano si trova il tempo degli archi ortivi od occidui suddetti.

Così nel caso che consideriamo e rispetto al Nascere della luna si avranno a combinare gli argomenti verticali (colonna 9.ª)

Decl. Ort. $+ 8^0\ 40'$; $+ 3^0\ 1'$; $- 2^0\ 54'$

cogli argomenti orizzontali (colonna 4.ª)

Pass. $24^{ore}\ 45^m\ 2^s$; $24^{ore}\ 44^m\ 58^s$; $24^{ore}\ 45^m\ 58^s$;

o meglio per l' uso della Tav. 11 si avranno a combinare gli argomenti verticali ridotti a

Decl. Ort. $+ 8^0\ 45'$; $+ 3^0\ 0$; $- 3^0\ 0$

cogli argomenti orizzontali ridotti a

Pass. $24^{ore}\ 45^m$; $24^{ore}\ 45^m$; $24^{ore}\ 46^m$

e si ottengono facilmente in tale guisa pegli

Archi Ortivi . . . . $6^{ore}\ 44^m$; $6^{ore}\ 21^m$; $5^{ore}\ 57$ (col. 12.ª)

trascurando i secondi in siffatta approssimazione.

Similmente pel Tramonto della Luna si dovranno combinare gli argomenti verticali (col. 11.ª) ridotti a

Decl. Occid. $+ 5^0\ 45'$; $0^0\ 0'$; $- 5^0\ 45'$

cogli argomenti orizzontali (col. 4.ª) ridotti a

Pass. $24^{ore}\ 45^m$; $24^{ore}\ 45^m$; $24^{ore}\ 47^m$;

e si ottengono così sempre colla Tav. 11 pegli

Archi Occidui . . . . $6^{ore}\ 32^m$; $6^{ore}\ 9^m$; $5^{ore}\ 46^m$. . . . (col. 13.ª).

Ora sottraendo dai tempi dei passaggi superiori i rispettivi tempi degli archi ortivi si ottengono i tempi per gl' istanti del Nascere del centro della Luna, ed aggiungendo ai tempi dei medesimi passaggi superiori i tempi degli archi occidui si ottengono gl' istanti del Tramonto del centro della Luna.

Nel nostro caso si ha pel Nascere (col. 14) per mezzo delle due colonne 2ª e 12ª

		ore m		ore m		ore m
1 genn. 1880	$t_1 =$	15 26	—	6 44	=	8 42
2 " "	$t_2 =$	16 11	—	6 21	=	9 50
3 " "	$t_3 =$	16 56	—	5 57	=	10 59

a tempo medio di Bologna, chè civilmente si dice

8^{ore} 42^{m} ; 9^{ore} 50^{m} ; 10^{ore} 50^{m} , sera.

Pel Tramonto si ha (col. 15ª) per mezzo delle due colonne 2ª e 13ª

		ore m		ore m		ore m
1 genn. 1880	$t_1' =$	15 26	+	6 32	=	21 58
2 " "	$t_2' =$	16 11	+	6 9	=	22 20
3 " "	$t_3' =$	16 56	+	5 46	=	22 42

a tempo medio di Bologna; chè civilmente si dice

		ore m	
2 genn. 1880	$t_1' =$	9 58	mattina.
3 " "	$t_2' =$	10 20	"
4 " "	$t_3' =$	10 42	"

Costruzione della Tav. 15 Luna — Caturegli

Degli Archi Semi-diurni Lunari Apparenti

Non sarà nè discaro nè disutile il dare, come fu detto, qualche spiegazione sul Processo del nostro Caturegli, affine di scoprire la maniera colla quale gli fu dato di formare le suddette due Tavole N. 9 e N. 10 colle quali gli Astronomi bolognesi hanno determinato fin qui il Nascere e il Tramontare del centro della Luna.

In 1° luogo sarà cosa ben fatta il considerare la Tav. 11 P. I e II, denominata od indicata dagli Astronomi bolognesi col N. 15 Luna — Caturegli (Archivio Astron. Bol.).

Senza dubbio questa Tavola è stata ricavata dai dati delle due Tavole XVI, XXVIII di Eustachio Manfredi bolognese (Introductio in Ephemerides cum opportunis Tabulis ad usum bononiensis Scientiarum Instituti. Bononiae MDCCL. Editio

altera), le quali due tavole sono state da me riprodotte ed accomodate nelle Tavole 12ª e 13ª.

Per vederne la costruzione si ha dapprima a cercare come sia stata formata la prima colonna (verticale) cogli argomenti, orizzontale 24 ore, e verticale la declinazione.

E cominciando dalla declinazione 0^0, è evidente che, quando il centro lunare percorresse apparentemente l' equatore con moto equabile in 24 ore, l' arco semidiurno sarebbe di 6 ore, senza tenere a calcolo l' effetto della refrazione e della parallasse. Rispetto alla rifrazione si vedrà che alla nostra latitudine geografica di

$$+ 44^0\ 30'$$

e per la declinazione 0^0 della luna (o di un qualsiasi astro) secondo la Tav. 13ª nostra, corrispondente alla Tav. XXVIII del Manfredi, è di

$$3^m\ 2^s.$$

Siccome poi la parallasse orizzontale della Luna (in media) presso gli Astronomi bolognesi è di 57′ 45″, e la refrazione della luce all' orizzonte è di 33′, così l' effetto composto è di

$$57'\ 45'' - 33'\ 0'' = 24'\ 45''.$$

E qui si dirà se all' arco della rifrazione (33′) corrisponde un tempo di

$$3^m\ 2^s.$$

all' arco di

$$24'\ 45''$$

quale tempo t corrisponderà? e perciò si avrà

$$t = 2^m\ 17^s$$

se il tempo, impiegato apparentemente dal centro lunare in questo caso nel passare dall' orizzonte (ortivo) al meridiano superiore, è

$$6^{ore} - 2^m\ 17^s = 5^{ore}\ 57^m\ 43^s$$

come si vede nella Tav. 11 P. I e P. II.

Vediamo in 2° luogo come si forma uno qualunque degli archi semi-diurni della prima colonna sotto all' argomento orizzontale di

$$24^{ore}\ 0^{m}\ 0^{s}$$

p. e. quello, corrispondente all' argomento verticale di $\pm\ 18^{0}\ 0'$ (Declinazione).

Colla Tav. 12ª delle Differenze Ascensionali, corrispondente alla Tav. XVI Manfredi si trova che per $\pm\ 18^{0}\ 0'$ di declinazione e per la latitudine nostra di

$$44^{0}\ 30'$$

la differenza ascensionale è di

$$\pm\ 1^{ora}\ 14^{m}\ 32^{s} \qquad \text{(circa)}$$

e quindi pel tempo di $24^{ore}\ 0^{m}\ 0^{s}$ si ha l' arco semi-diurno di

$$6^{ore} \pm 1^{ora}\ 14^{m}\ 32^{s}$$

e cioè per la declinazione (+) si ha

$$7^{ore}\ 14^{m}\ 32^{s}$$

e per la declinazione (—) si ha

$$4^{ore}\ 45^{m}\ 28^{s}\ .$$

Tenendo a calcolo la Rifrazione si trova nella Tav. 13ª (Manfredi Tav. XXVIII) che per la declinazione

$$\pm\ 18^{0}\ 0'$$

e per la latitudine di $44^{0}\ 30'$ è

$$\text{Rifrazione in tempo} = 3^{m}\ 11^{s}$$

e qui colla indicata proporzione

$$33' : 24'\ 45'' :: 3^{m}\ 11^{s} : t$$

si ha per l' effetto composto della parallasse e della rifrazione il tempo

$$-\ 2^{m}\ 23^{s} \qquad \text{(circa)}$$

e per conseguenza rispetto alla declinazione settentrionale ($+ 18^0\ 0'$) l' arco semi-diurno è in tempo medio

$$7^{ore}\ 14^m\ 32^s - 2^m\ 23^s = 7^{ore}\ 12^m\ 9^s$$

e rispetto alla declinazione meridionale ($- 18^0\ 0'$) l' arco semi-diurno è di

$$4^{ore}\ 45^m\ 28^s - 2^m\ 23^s = 4^{ore}\ 43^m\ 5^s$$

come si trova precisamente nella Tav. 11 P. I e P. II colonna delle

$$24^{ore}\ 0^m\ 0^s$$

e così dicasi di qualsiasi altro caso della suddetta colonna delle 24 ore.

Vediamo in 3° luogo come si deducano le altre colonne, e consideriamo p. e. il caso cogli argomenti

Verticale $+ 18^0\ 0'$
Orizzontale $24^{ore}\ 54^m$

che è segnato nella Tav. 11 P. I in

$$7^{ore}\ 29^m\ 33^s\ .$$

Si noti da prima che, prescindendo dalla rifrazione e dalla parallasse, alla stessa declinazione $+ 18^0$ l' arco semi-diurno viene percorso nel tempo

$$7^{ore}\ 14^m\ 32^s$$

quando la velocità del centro lunare si suppone di 24 ore di moto equabile, e che questo stesso arco semi-diurno viene percorso in un tempo T incognito ma con una nota velocità e cioè colla velocità di

$$24^{ore}\ 58^m$$

e siccome per spazi eguali i tempi sono in ragione diretta dei tempi impiegati a percorrere spazi eguali, multipli o submultipli dei primi, così si avrà

$$24^{ore}\ 0^m : 7^{ore}\ 14^m\ 32^s :: 24^{ore}\ 58^m : T$$

da cui si ha

$$T = 7^{ore}\ 32^m\ 2^s\ .$$

D' altronde l'arco, dovuto all' effetto composto della parallasse e della rifrazione, è percorso dal centro lunare nel tempo di

$$2^m\ 23^s$$

quando il moto lunare è di 24 ore, come di sopra si è visto; laonde detto t il tempo, corrispondente allo stesso arco percorso dal centro lunare allorchè sia percorso col moto di $24^{ore}\ 58^m$, è chiaro dovere essere

$$24^{ore}\ 0^m : 24^{ore}\ 58^m :: 2^m\ 23^s : t$$

per la stessa ragione che governa T, e da questa si ha

$$t = 2^m\ 29^s$$

e perciò il cercato sarà

$$T - t = 7^{ore}\ 29^m\ 33^s$$

come sta nella Tav. 11ª P. I.

E così dicasi d'ogni altro caso della Tavola 15 Luna Manfredi (Tav. 11).

Costruzione della Tav. 16 Luna — Caturegli.

Delle Parti Proporzionali di Declinazione Lunare.

La Tav. 9ª P. I, e P. II, corrispondente alla Tav. 16 Luna Caturegli (Arch. Astr. Bolognese) risolve, come si è detto, il problema: Data la declinazione meridiana della Luna e data la variazione subìta dalla declinazione lunare fra due mezzodì medî, trovare con una certa approssimazione la parte che si deve aggiungere o togliere dalla declinazione meridiana per avere la Declinazione Probabile all' istante del Nascere o del Tramontare della Luna.

Per risolvere questo problema si è supposto costante il giorno lunare di

$$24^{ore}\ 40^m$$

e perciò si è preso per Tipo d' ogni Arco semi-diurno quello che si ottiene colla data declinazione corrispondente sotto la colonna verticale della Tav. 11ª (Tav. 15 Luna. Caturegli) designata coll' argomento orizzontale di

$$24^{ore}\ 40^m$$

che noi abbiamo collocata in fine delle colonne stesse verticali, e che d'altronde colla media fra la colonna delle

$$24^{ore}\ 38^{m}$$

e quella delle

$$24^{ore}\ 42^{m}$$

si deduce immediatamente.

Ciò posto per costruire la Tav. 10ª si prenda p. e. a determinare la riga orizzontale della declinazione (meridiana)

$$+\ 15^{0}\ 0'\ .$$

Nella Tav. 11ª P. I (Tav. 15 Luna. Caturegli) cogli argomenti

oriz. $24^{ore}\ 40^{m}$ vertic. $+\ 15^{0}\ 0'$

si trova l'arco semi-diurno

$$7^{ore}\ 10^{m}\ 23^{s}$$

che è stato collocato nella Tav. 11ª P. I ridotto per rapida approssimazione in

$$7^{ore}\ 10^{m}$$

corrispondente alla Declinazione suddetta, che si considera di

$$+\ 15^{0}\ 0'$$

e nella prima colonna col titolo di Arco semi-diurno per

$$24^{ore}\ 40^{m}\ .$$

Ora è facile a comprendere come sia stata costruita tutta la riga orizzontale corrispondente alla detta declinazione; imperciocchè se p. e. si sa che la variazione in declinazione fra due mezzodì medî è stata o deve essere di

$$6^{0}\ 0'$$

sarà facile a scoprire quale parte proporzionale x corrisponderà a

$$7^{ore}\ 10^{m}$$

giacchè in tal caso deve essere

$$24^{ore}\ 0^{m} : 7^{ore}\ 10^{m} :: 6^{o}\ 0' : x$$

da cui

$$x = 1^{o}\ 48'$$

come si vede nella Tav. 10 P. I.

In fine si deve notare che in luogo delle declinazioni dei mezzodì medî si è fatto uso delle declinazioni meridiane, e quindi a tutto rigore o meglio con maggiore rigore o con maggiore approssimazione si doveva dagli astronomi bolognesi calcolare la loro tavola 16 Caturegli (Tav. 9ª P. I e P. II — nostra) col giorno medio lunare, da loro assunto, di

$$24^{ore}\ 40^{m}$$

e quindi ricavare tale Tavola colla proporzione (nel caso indicato)

$$24^{ore}\ 40^{m} : 7^{ore}\ 10^{m} :: 6^{o}\ 0' : x$$

da cui si trae

$$x = 1^{o}\ 45'$$

come si vede nella Tav. nostra 10ª P. I, e P. II, costruite da me nella suddetta ultima ipotesi, notando per altro che questo poco o nulla influisce nel risultamento finale, e tanto più se di questo si voglia assumere come un dato di approssimazione, (di una prima approssimazione) pel nostro metodo 1° indiretto od a posteriori, dei Moti Medî combinati coi Veri.

Ed ecco spiegato teoricamente e dichiarato coll'esempio il Metodo tenuto dagli Astronomi bolognesi, basato soltanto sui moti medî; ed ora imprendiamo a trattare del nostro Metodo dei Moti Veri combinati coi Moti Medî, ricavando i primi dalle Effemeridi (Connaissance des Temps e The Nautical Almanac Jahrbucg) e giovandoci dei secondi come una prima opportuna approssimazione.

Si debba determinare il Nascere ed il Tramontare della Luna a Bologna p. e. pei primi giorni del 1880, pel quale già abbiamo trovati i valori approssimati dei tempi impiegati dal centro lunare a percorrere l'arco ortivo e l'arco occiduo, e cioè (Tav. 8ª col. 12ª)

			ore	m
1	genn. 1880	Arco Ortivo	6	44
2	"	"	6	21
3	"	"	5	57
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

e (Tav. 9ª col. 13)

			ore	m
1	genn. 1880	Arco Occiduo....	6	32
2	"	"	6	9
3	"	"	5	46
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .	. .

Supposto già notati come nelle colonne (1-7ª) Tav. 8ª i tempi dei Passaggi e le Declinazioni Meridiane e le rispettive differenze, poniamoci a trattare la quistione colle Effemeridi parigine (Pag. 67 e seg. anno 1880), riducendo da prima i tempi dei passaggi (col. 2ª) alle ore parigine, come si è fatto, e cioè

			ore	m	s	
1	genn. 1880 P.	I.	2	27	8	(Pag. 251)
	"	S.	14	49	39	
2	"	I.	3	12	5	
	"	S.	15	34	34	
3	"	I.	3	57	14	
	"	S.	16	20	13	
4	"	I.	4	43	43	
	"	S.	27	7	59	(Col. 16)

ed occupandoci del Nascere della luna nel solo primo giorno genn. 1880, osserviamo che l' istante probabile del centro lunare all' orizzonte è a

$$14^{ore}\ 49^{m}\ 39^{s} - 6^{ore}\ 44^{m} = 8^{ore} \qquad \text{(circa)}$$

e che gli estremi dell' arco ortivo, percorso dal centro lunare in detto giorno, corrispondono ai tempi parigini

$$8^{ore} \text{ e } 15^{ore} \qquad \text{(Col. 17.ª)}$$

e perciò per le

$$6^{ore}\ 44^{m}$$

dell' arco ortivo si dovrebbero calcolare le variazioni *vere* delle declinazioni dalle 8 ore alle 15 (Pag. 67. Conn. des Temps. 1880). E qui si noti che per le ore (parigine)

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

si hanno le variazioni per ogni minuto primo rispettivamente

13″, 047 ; 13″, 095 ; 13″, 141 ; 13″, 187 ; 13″, 231 ; 13″, 317 ; 13″, 359

il cui medio è di 13″, 197 , il quale differisce di una quantità insensibile dalla variazione mediana 13″, 187 ; e per conseguenza si otterrà la maggiore possibile approssimazione, usando della 13″, 2 , formando la proporzione

$$1^{m} : 6^{ore}\ 44^{m} :: 13'', 2 : x$$

indicando con x la variazione *vera* che è subìta dalla declinazione del centro lunare dall' orizzonte orientale al Meridiano Superiore ; e si ha

$$x = 1^{o}\ 29',$$

trascurando i secondi (col. 18ª.) Tav. 8.ª e quindi la declinazione all' istante del Nascere con molta approssimazione si può tenere essere

$$d_{1} = \text{Decl. Mer. Sup.} + 1^{o}\ 29'$$

ossia

$$d_{1} = + 7^{o}\ 12' + 1^{o}\ 28' = + 8^{o}\ 40' \qquad \text{(col. 20.ª)}$$

notando il decrescere di queste declinazioni.

E qui non sarà stato disutile l' aver formato la Tav.ª 14 coi due argomenti, Variazioni della Declinazione e Tempi degli archi, esteso il primo argomento da 0″, 0 a 14″, 0 come si desume da tutta la serie della Effemeride, ed il secondo argomento da $3^{ore}\ 40^{m}$ ad $8^{ore}\ 40^{m}$, come si trae dalla Tav. 10.ª , notando che queste tavole sono assai ristrette a cagione della brevità, ma che ognuno può facilmente ampliare, mentre p. e. nel nostro caso dei due argomenti

$$6^{ore}\ 44^{m}\ ;\ 13'', 2$$

si trova dalla Tav. 14.ª per

$$6^{ore}\ 40^{m}\ ,\ 13'', 0$$

la parte proporzionale 1° 26′ 40″, e siccome per ogni minuto verticale si ha un aumento di 13 secondi, e per ogni decimo di secondo orizzontale si ha un aumento di 40 secondi in arco, così è evidente che la parte totale proporzionale è, sempre come sopra, di

$$+ 1^{o}\ 29'$$

le quali indagini si eviterebbero, estendendo la Tav. 14 specialmente rispetto alla riga (orizzontale). E così dicasi di tutte le nostre tavole ridotte per ragione di brevità a minimi termini.

Similmente pei successivi giorni quanto al Nascere si ha per la colonna 17.ª (Tav. 8.ª)

		ore		m
2	giorno 1880 . . .	9	e	16
3	„ „	10	e	17

. . . .

e poscia per la colonna 18.ª dalle Effemeridi (Pag. 67 e seg. 1880) si ha

		ore m		''
2	giorno 1880 per	6 21	la var.ᵉ	14, 0
3	„ „	5 57	„	14, 2

. . . .

e per la colonna 19.ª Tav. 8.ª colla Tav. 14.ª si ha

2	giorno 1880 p.ᵉ p.ᵉ	$+ 1^{0}\ 29'$
3	„ „ „	$+ 1\ \ 24$

. . . .

ed in fine per la colonna 20 Tav. 8.ª

2	giorno 1880 . . . Decl. al Nascere	$+ 3^{0}\ 0'$
3	„ „ „	$- 2\ \ 57$

. . . .

In 2.° luogo nota la declinazione lunare al Nascere si dovrà calcolare l' arco ortivo colla nota formola

$$\cos. P = - \tan. l \ \text{tant.}\ D$$

ove P, come si disse, è l' angolo orario, l la latitudine geografica dell' Osservatorio

$$44^{0}\ 29'\ 55''$$

e D la declinazione all' orizzonte e pel 1.° giorno 1880 è (Tav. 8.ª col. 20.ª).

$$D = + 8^{0}\ 41'$$

E qui pure per brevità abbiamo formato la Tav. 15.ª P. I, II, III la quale ci porge il cercato valore di P, e cioè

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ genn. } 1880 \ldots\ldots & P_1 = 98^0 & 37' & 52'' \\ 2 \quad\quad\quad " & P_2 = 92 & 57 & 7 \\ 3 \quad\quad\quad " & P_3 = 87 & 5 & 51 \end{array}$$

. . . .

per la Tav. 8.ª Colonna 21ª.

A ciascuno di questi archi ortivi si deve sottrarre l' arco aa_1 (Tav. I.ª Fig. 2.ª) dovuto all' effetto composto della parallasse lunare orizzontale p e della refrazione della luce R, da calcolarsi colla formola, già indicata superiormente, (Pag. 240)

$$\Delta_1 = aa_1 = \frac{p_1 - R}{\cos D_1 \cos l \operatorname{sen} P_1}.$$

A pag. 67 Conn. des Temps 1880 pel 1.° genn. 1880 si trova pel Nascere della Luna

$$p_1 = 56' \ 25'' \text{ ed } R = 33' \ 58'' \qquad \text{(Pag. 673)}$$

essendo

$$D_1 = + 8^\circ \ 41' \ ; \ l = 44^0 \ 29' \ 55'' \ ; \ P_1 = 98^\circ \ 37' \ 52''$$

e quindi, fatto il calcolo, si ha

$$aa_1 = \Delta_1 = 32' \ 12'' \qquad \text{(col. 22 Tav. 8ª).}$$

Similmente si ha

$$\begin{array}{lll} 2 \text{ genn. } 1880 \ldots\ldots & p_2 = 56' & 1'' \\ 3 \quad\quad " \quad\quad " & p_3 = 57 & 39 \end{array}$$

. . . .

e quindi

$$\Delta_2 = 32' \ 24'' \ ; \ \Delta_3 = 33' \ 17'' \ ; \qquad \text{(col. 22)}$$

. . . .

Gli archi ortivi adunque *veramente* percorsi dal centro lunare sono (col. 23 Tav. 8ª)

$$\begin{array}{llcl} 1 \text{ genn. } 1880 \ldots\ldots & A_1 & = & 98^0 \ \ 5' \ 40'' \\ 2 \quad \text{»} & A_2 & = & 92 \ \ 24 \ \ 43 \\ 3 \quad \text{»} & A_3 & = & 86 \ \ 32 \ \ 34 \end{array}$$

. . . .

Per semplicità si possono ridurre a tempo siderale (colla Tav.ª VII Pag. 679 Conn. 1880) e si ha

$$\begin{array}{llcl} 1 \text{ genn. } 1880 \ldots\ldots & t_1 & = & 6^{ore} \ 32^{m} \ 23^{s} \\ 2 \quad \text{»} & t_2 & = & 6 \ \ 9 \ \ 39 \\ 3 \quad \text{»} & t_2 & = & 5 \ \ 46 \ \ 10 \end{array} \qquad \text{(col. 24 Tav. 8ª)}$$

. . . .

In 3° luogo si noterà che 180^0 sono stati percorsi dal centro lunare, passando dal meridiano inferiore al superiore, nel 1° giorno del 1880 in tempo medio in

$$12^{ore} \ 22^{m} \ 31^{s}$$

come si vede dalla colonna 3ª Tav. 8ª e perciò si determinerà il tempo medio θ_1 o meglio si determineranno le ore di tempo medio che si richiedono dal centro lunare a percorrere l' arco ortivo

$$A_1 = 98^0 \ 5' \ 40''$$

se quello di 180 gradi è stato percorso in

$$12^{ore} \ 22^{m} \ 31^{s}$$

di tempo medio colla proporzione

$$\overset{ore}{12} : \overset{ore}{6} \ \overset{m}{32} \ \overset{s}{23} :: \overset{ore}{12} \ \overset{m}{22} \ \overset{s}{31} : \theta_1$$

essendo il primo rapporto di ore siderali equivalente al rapporto

$$180^0 : 98^0 \ 5' \ 40''$$

e da qui si ha pel cercato arco artivo

$$\theta_1 = 6^{ore} \ 44^{m} \ 39^{s} \ .$$

Nè possiamo ottenere approssimazione maggiore, il perchè la variazione della declinazione in tal caso è appunto, come sopra

$$6^{ore} \ 45^{m} \times 13'', 2 = 405 \times 13'', 2 = + 1^0 \ 29'$$

dove il 1° fattore, scritto abusivamente per $6^{ore}\ 45^m$, indica il numero astratto 405 (in concreto 405 minuti primi) da moltiplicarsi per la variazione in decl.

$$13'',2$$

data per ogni minuto primo di tempo medio.

Come verifica di questo risultamento θ_1 si può far uso dei *Moti Veri* dell' Ascensione Retta ossia dei Moti Ascensionali lunari.

Si avrà pertanto a calcolare il vero moto ascensionale per

$$6^{ore}\ 44^m\ 39^s = 404^m,7$$

di tempo medio ; e quindi per essere il moto ascensionale vero per un minuto primo fra i tempi parigini o meglio fra le ore 8 e 15 parigine di

$1^s, 9818$ (Pag. 67 Conn. 1880)

si ha la variazione di questo moto per le suddette

$$6^{ore}\ 44^m\ 39^s$$

espressa da

$$404,7 \times 1^s,9818 = 13^m\ 22^s$$

in tempo siderale.

A questa variazione si deve evidentemente unire il tempo siderale dell' arco $a_1\ b$ (Fig. 2. Tav. 1.) che è (Tav. 8. col. 24) di

$$6^{ore}\ 32^m\ 23^s$$

e perciò si ha per somma la

$$6^{ore}\ 45^m\ 45^s.$$

Ridotto a tempo medio colla Tav. V Pag. 677. (Connaissance des Temps 1880) si ha

$$6^{ore}\ 45^m\ 45^s - 1^m\ 6^s = 6^{ore}\ 44^m\ 39^s.$$

Similmente coi dati delle colonne 3ª e 24ª procedendo come sopra si ha per la colonna 25ª Tav. 8ª

		ore	m	
2 genn. 1880	$\theta_2 =$	6	21	12^s
3 „	$\theta_3 =$	5	57	13
. . . .				

Sottratti ordinatamente questi tempi da quelli dei passaggi pel meridiano superiore (col. 2ª Tav. 8ª) si ottengono gl' istanti del nascere del centro della luna (Col. 26ª Tav. 8ª)

			ore	m	
1 genn. 1880	N_1	=	8	41	4^s
2 „	N_2	=	9	49	26
3 „	N_3	=	10	59	4
. . . .					

Pel Tramonto

Assumendo i tempi approssimati Caturegliani (Col. 13ª Tav. 8ª) degli archi occidui

	ore	m
1 genn. 1880	6	32
2 „	6	9
3 „	5	46
. . . . . .		

colle ore medie delle già preparate come si è fatto pel Nascere (col. 17ª Tav. 8) prese le corrispondenti variazioni (Pag. 67 e seg. Conn. des T. 1880)

13″, 5 ; 14″,2 ; 14″,2 ;
. . . .

si trarranno colla Tav. 14ª le parti proporzionali da unirsi colle declinazioni meridiane superiori affine di avere le declinazioni al tramonto; e queste avuto riguardo al decrescere della stessa declinazione, sono nel nostro caso

(col. 19ª Tav. 8) — 1° 28′ ; — 1° 27′ ; — 1° 22′,
. . . .

e per conseguenza le declinazioni agl' istanti dei Tramonti successivi sono (col. 20ª)

(*D*) + 5° 44′ ; + 0° 4′ ; — 5° 43′
. . . .

Colle Tavole 15 si ottengono gli archi occidui corrispondenti

(*P*) 95° 39′ 43″ ; 90° 3′ 56″ ; 84° 21′ 17″ ;
. . . .

per la colonna 21 Tav. 8.

Colle ore approssimative dei Tramonti colonna 18 Tav. 8 dalla Pag. 67 e seg. (Connaissance des Temps 1880) si ha

$$p_1 = 56' \ 44'' \ ; \ p_2 = 57' \ 19'' \ ; \ p_3 = 57' \ 58''$$

. . . .

e colla formola

$$\Delta = \frac{p - R}{\cos D \cos l \text{ sen } P}$$

si ottengono gli effetti, composti della parallasse orizzontale lunare e della refrazione della luce, espressi dagli archi

32′ 14″ ; 32′ 44′ ; 33′ 59″

posti nella colonna 22 Tav. 8 e per conseguenza i veri archi bc_1 (Fig. 3 Tav. 1) occidui saranno (colonna 23 Tav. 8)

95° 7′ 29″ ; 89° 31′ 12″ ; 83° 47′ 18″, ecc.

che ridotti in tempi siderali colla Tav. VII (Conn. des T. 1880 Pag. 679) diventano (col. 24 T. 8)

6^{ore} 20^m 30^s ; 5^{ore} 58^m 5^s ; 5^{ore} 35^m 9^s ;

. . . .

In appresso colle variazioni (col. 3. Tav. 8)

12^{ore} 22^m 26^s ; 12^{ore} 22 40 ; 12^{ora} 23^m 30^s,

. . . .

si formeranno le proporzioni

		ore	m	s		ore	m	s		
12^{ore}	:	6	20	30	: :	12	22	26	:	θ'_1
12	:	5	58	5	: :	12	22	40	.	θ'_2
12	:	5	35	9	: :	12	23	30	:	θ'_3

. . . .

da cui a tempo medio (solare)

			ore	m	s
1 genn. 1880	θ'_1	=	6	32	21
2 „	θ'_2	=	6	9	21
3 „	θ'_3	=	5	46	5

. . . .

poste nella colonna 25 Tav. 8 e quindi i tempi dei Tramonti sono

		ore	m	s
1 genn. 1880	$T_1 =$	21	58	4
2 „	$T_2 =$	22	19	59
3 „	$T_3 =$	22	42	22
. . . .				

collocati nella col. 26 Tav. 8.

In fine ciò, che si disse per maggiore sicurezza, si può eseguire in ognuno di questi casi.

Secondo Metodo o Metodo Diretto

Dei Moti Veri.

Supposto non usato il metodo Caturegliano, si può procedere nella seguente maniera.

Si calcoli per sei ore il moto vero in declinazione, il quale è alla Pag. 67 (Connais. des Temps 1880) per le ore 11 e 12 del 1. giorno genn. 1880, medie delle 8 e 16, in cui accade all'incirca il passaggio della luna dall' orizzonte (orientale) al meridiano superiore, di

$$13'', 2 \text{ per ogni minuto primo; e si ha}$$

$$\text{Var.}^e = + 360 \times 13'', 2 = + 1^\circ\ 19',$$

la quale unita alla declinazione già calcolata (al Meridiano Superiore) dà

$$D_1 = + 7^\circ\ 12' + 1^\circ\ 19' = + 8^\circ\ 31'.$$

Colla declinazione D_1 si calcoli l'arco ortivo colla Tav. 15 e si ha

$$98^\circ\ 27'\ 43''.$$

Da questo si deve sottrarre l' arco, dovuto all' azione unita della parallasse e della rifrazione, il quale già è stato valutato in

$$32'\ 10''$$

e che coi dati superiori è di

$$32'\ 12''.$$

Preso il secondo, comechè a nulla influirebbe il primo risultamento, si ottiene l' arco ortivo, percorso dal centro lunare nel tempo che corre dall' istante del suo nascere apparente al passaggio pel meridiano (superiore) espresso da

$$97^{0}\ 55'\ 33''$$

ed in tempo siderale da

$$6^{ore}\ 31^{m}\ 42^{s} \quad ; \quad \text{oppure} \quad 6^{ore}\ 32^{m}$$

come si è ottenuto col metodo caturegliano (Col. 13ª Tav· 8ª).

Chè se ciò non si fosse ottenuto, si partiva da questo dato, e procedendo come sopra, con una o due serie di calcoli saremmo pervenuti al giusto od al più prossimo risultato, tanto più che si può sempre procedere alla verifica come si è fatto superiormente.

E ciò, che sì è detto pel 1° giorno genn. 1880 e pel solo Nascere, si dica per qualsiasi giorno e pel Tramonto altresì.

Finalmente questo procedimento sia col Metodo a Posteriori, sia col Metodo a Priori si può tenere *perfettamente* coll' uso delle Effemeridi Inglesi o propriamente col « The Nautical Almanac — Greenwich 1880 » solo avvertendo (il che è cosa da comprendersi facilmente) che le variazioni dei moti veri vengono date per ogni dieci minuti primi.

Non accade così con quelle di Berlino, le quali non porgono tali variazioni, con quella approssimazione, che dànno le prime due nominate Effemeridi.

F. 3.

Nord
Ovest
Est
Sud
L P C B A
l p c b a

F. 4.

L_1 L P
α β γ
l_1 l p

C. Bettini inc. Lit. G. Wenk

Tav. II.

Argomento orizzontale B-A. *Argomento verticale* C-A.

m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s
	1 0	2 0	3 0	4 0	5 0	6 0	7 0	8 0	9 0	10 0	11 0	12 0	13 0	14 0	15 0
57 24	1 3	2 5	3 8	4 11	5 14	6 16	7 19	8 22	9 24	10 27	11 30	12 33	13 35	14 38	15 41
28	3	5	8	11	13	16	19	21	24	26	29	32	34	37	40
32	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29	31	34	36	39
36	3	5	8	10	13	15	18	20	23	25	28	30	33	35	38
40	2	5	7	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37
44	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	26	28	31	33	35
48	2	5	7	9	11	14	16	18	21	23	25	27	30	32	34
52	2	4	7	9	11	13	16	18	21	22	24	26	29	31	33
56	2	4	6	9	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32
58 0	2	4	6	8	10	12	15	16	19	21	23	25	27	29	31
4	2	4	6	8	10	12	14	16	19	20	22	24	26	28	30
8	2	4	6	8	10	11	14	15	18	20	21	23	25	27	29
12	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	20	22	24	26	28
16	2	4	5	7	9	10	13	14	17	18	19	21	23	25	27
20	2	3	5	7	9	10	12	13	16	17	19	21	22	24	26
24	2	3	5	7	8	10	12	13	15	16	18	20	21	23	25
28	2	3	5	6	8	9	11	12	15	16	17	19	20	22	24
32	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21	23
36	1	3	4	6	7	9	10	11	13	14	16	17	19	20	22
40	1	3	4	5	7	9	10	11	13	14	15	16	18	19	21
44	1	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	15	17	18	20

Tav. III.

Argomento orizzontale B-A. *Argomento verticale* C-A.

m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s
	16 0	17 0	18 0	19 0	20 0	21 0	22 0	23 0	24 0	25 0	26 0	27 0	28 0	29 0	30 0
57 24	16 43	17 46	18 49	19 52	20 54	21 57	23 0	24 2	25 5	26 8	27 11	28 13	29 16	30 19	31 22
28	42	45	48	51	53	56	22 58	1	4	6	9	11	14	17	20
32	41	44	46	49	51	54	56	23 59	2	4	7	9	12	15	17
36	40	43	45	48	50	53	55	58	0	3	5	8	10	13	15
40	39	42	44	46	49	51	54	56	24 58	1	3	6	8	11	13
44	38	40	42	44	47	49	52	54	56	25 59	1	4	6	8	11
48	37	39	41	43	46	48	50	53	55	57	26 59	2	4	6	9
52	36	38	40	42	45	47	49	51	53	55	58	0	2	4	7
56	34	36	38	40	43	45	47	49	51	53	56	27 59	0	2	4
58 0	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	54	57	28 58	0	2
4	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	55	56	29 58	0
8	31	33	34	36	38	40	42	44	46	48	50	53	54	56	30 58
12	30	32	33	35	37	39	41	43	45	46	48	51	52	54	56
16	29	31	32	34	36	38	39	41	43	45	46	49	50	52	54
20	27	29	31	32	34	36	37	39	41	43	44	47	48	50	51
24	26	28	30	31	33	35	36	38	39	41	43	45	46	48	49
28	25	27	29	30	32	33	35	36	38	39	41	43	44	46	47
32	24	25	27	28	30	31	33	34	36	37	39	41	42	44	45
36	23	24	26	27	29	30	32	33	34	36	37	39	40	42	43
40	22	23	25	26	28	29	30	32	33	34	36	37	38	40	41
44	21	22	24	25	27	28	29	31	32	33	34	36	37	38	39

Tav. IV.

Argomento orizzontale B-A. *Argomento verticale C-A.*

m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s
		31	0	32	0	33	0	34	0	35	0	36	0	37	0	38	0	39	0	40	0	41	0	42	0	43	0	44	0	45	0
57	24	32	24	33	27	34	30	35	32	36	35	37	38	38	41	39	43	40	46	41	49	42	51	43	54	44	57	46	0	47	2
	28		22		25		28		30		33		36		39		41		44		46		49		52		54	45	57	46	59
	32		20		22		25		28		30		33		36		38		41		43		46		49		51		54		56
	36		18		20		23		25		28		30		33		35		38		40		43		45		48		50		53
	40		16		18		21		23		26		28		30		33		35		38		40		42		45		47		50
	44		13		16		18		20		23		25		27		30		32		35		37		39		42		44		47
	48		11		13		15		18		20		22		24		27		29		31		34		36		39		41		43
	52		9		11		13		16		18		20		22		25		27		29		31		33		36		38		40
	56		6		9		11		13		15		17		20		22		24		26		28		30		33		35		37
58	0		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26		29		31		33
	4		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26		28		30
	8		0		2		4		6		8		10		12		14		16		18		19		21		23		25		27
	12	31	58	32	59		1		3		5		7		9		11		12		14		16		18		20		22		24
	16		56		57	33	59		1		3		5		7		8		10		12		14		15		17		19		21
	20		53		55		57	34	58		0		2		4		5		7		9		11		12		14		16		18
	24		51		53		54		56	35	57	36	59		1		2		4		6		8		9		11		13		14
	28		49		51		52		54		55		57	37	59		0		2		4		5		7		8		10		11
	32		47		48		50		51		53		54		56	38	57	39	59		1		2		4		5		7		8
	36		44		46		47		49		50		52		53		54		56	40	57	41	59		0		2		3		5
	40		42		44		45		47		48		50		51		52		54		55		56	42	58	43	59		0		2
	44		40		42		43		44		46		47		48		49		51		52		53		55		56	44	57	45	59

Tav. V.

Argomento orizzontale B-A. *Argomento verticale* C-A.

m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s
		46	0	47	0	48	0	49	0	50	0	51	0	52	0	53	0	54	0	55	0	56	0	57	0	58	0	59	0	60	0
57	24	48	5	49	8	50	10	51	13	52	16	53	19	54	21	55	24	56	27	57	29	58	32	59	35	60	37	61	40	62	43
	28		2		5		7		10		12		15		18		20		23		25		28		31		33		36		39
	32	47	59		2		4		7		9		12		14		17		19		22		24		27		29		32		35
	36		55	48	58		0		3		5		8		10		13		15		18		20		23		25		28		30
	40		52		54	49	57	50	59		2		4		6		9		11		14		16		19		21		24		26
	44		49		51		54		56	51	58		0		3		5		7		10		12		14		17		19		22
	48		45		47		50		52		54	52	56	53	59		1		3		6		8		10		12		15		17
	52		42		44		46		49		51		53		55	54	57		0		2		4		6		8		11		13
	56		39		41		43		45		47		49		51		53	55	56	56	58		0		2		4		6		9
58	0		35		37		39		41		43		45		47		49		52		54	57	56	58	58		0		2		4
	4		32		34		36		38		40		42		44		46		48		50		52		54	59	56	60	58		0
	8		29		31		33		35		37		39		40		42		44		46		48		50		52		54	61	56
	12		25		27		29		31		33		35		36		38		40		42		44		46		48		49		51
	16		32		24		26		28		29		31		33		35		36		38		40		42		43		45		47
	20		19		21		23		25		26		28		29		31		32		34		36		38		39		41		43
	24		16		17		19		21		22		24		25		27		29		30		32		34		35		37		39
	28		13		14		16		17		19		20		22		24		25		27		28		30		31		33		35
	32		10		11		13		14		16		17		19		20		21		23		24		26		27		29		30
	36		6		7		9		10		12		13		15		16		17		19		20		22		23		35		26
	40		3		4		6		7		8		10		11		12		14		15		16		18		19		21		22
	44		0		1		3		4		5		6		8		9		10		11		12		14		15		16		18

Tav. VI.

Tavola di moltiplicazione.

m	0′ 1″	0′ 2″	0′ 3″	0′ 4″	0′ 5″	0′ 6″	0′ 7″	0′ 8″	0′ 9″	0′ 10″	0′ 11″	0′ 12″	0′ 13″	0′ 14″	0′ 15″
1	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	0 10	0 11	0 12	0 13	0 14	0 15
2	0 2	0 4	0 6	0 8	0 10	0 12	0 14	0 16	0 18	0 20	0 22	0 24	0 26	0 28	0 30
3	0 3	0 6	0 9	0 12	0 15	0 18	0 21	0 24	0 27	0 30	0 33	0 36	0 39	0 42	0 45
4	0 4	0 8	0 12	0 16	0 20	0 24	0 28	0 32	0 36	0 40	0 44	0 48	0 52	0 56	1 0
5	0 5	0 10	0 15	0 20	0 25	0 30	0 35	0 40	0 45	0 50	0 55	1 0	1 5	1 10	1 15
6	0 6	0 12	0 18	0 24	0 30	0 36	0 42	0 48	0 54	1 0	1 6	1 12	1 18	1 24	1 30
7	0 7	0 14	0 21	0 28	0 35	0 42	0 49	0 56	1 3	1 10	1 17	1 24	1 31	1 38	1 45
8	0 8	0 16	0 24	0 32	0 40	0 48	0 56	1 4	1 12	1 20	1 28	1 36	1 44	1 52	2 0
9	0 9	0 18	0 27	0 36	0 45	0 54	1 3	1 12	1 21	1 30	1 39	1 48	1 57	2 6	2 15
10	0 10	0 20	0 30	0 40	0 50	1 0	1 10	1 20	1 30	1 40	1 50	2 0	2 10	2 20	2 30
11	0 11	0 22	0 33	0 44	0 55	1 6	1 17	1 28	1 39	1 50	2 1	2 12	2 23	2 34	2 45
12	0 12	0 24	0 36	0 48	1 0	1 12	1 24	1 36	1 48	2 0	2 12	2 24	2 36	2 48	3 0
13	0 13	0 26	0 39	0 52	1 5	1 18	1 31	1 44	1 57	2 10	2 23	2 36	2 49	3 2	3 15
14	0 14	0 28	0 42	0 56	1 10	1 24	1 38	1 52	1 6	2 20	2 34	2 48	3 2	3 16	3 30
15	0 15	0 30	0 45	1 0	1 15	1 30	1 45	2 0	1 15	2 30	2 45	3 0	3 15	3 30	3 45
16	0 16	0 32	0 48	1 4	1 20	1 36	1 52	2 8	1 24	2 40	2 56	3 12	3 28	3 44	4 0
17	0 17	0 34	0 51	1 8	1 25	1 42	1 59	2 16	1 33	2 50	3 7	3 24	3 41	3 58	4 15
18	0 18	0 36	0 54	1 12	1 30	1 48	2 6	2 24	1 42	3 0	3 18	3 36	3 54	4 12	4 30
19	0 19	0 38	0 57	1 16	1 35	1 54	2 13	2 32	1 51	3 10	3 29	3 48	4 7	4 26	4 45
20	0 20	0 40	1 0	1 20	1 40	2 0	2 20	2 40	2 0	3 20	3 40	4 0	4 20	4 40	5 0
21	0 21	0 42	1 3	1 24	1 45	2 6	2 27	2 48	2 9	3 30	3 51	4 12	4 33	4 54	5 15
22	0 22	0 44	1 6	1 28	1 50	2 12	2 34	2 56	2 18	3 40	4 2	4 24	4 46	5 8	5 30
23	0 23	0 46	1 9	1 32	1 55	2 18	2 41	3 4	2 27	3 50	4 13	4 36	4 59	5 22	5 45
24	0 24	0 48	1 12	1 36	2 0	2 24	2 48	3 12	2 36	4 0	4 24	4 48	5 12	5 36	6 0
25	0 25	0 50	1 15	1 40	2 5	2 30	2 55	3 20	2 45	4 10	4 35	5 0	5 25	5 50	6 15
26	0 26	0 52	1 18	1 44	2 10	2 36	3 2	3 28	2 54	4 20	4 46	5 12	5 38	6 4	6 30
27	0 27	0 54	1 21	1 48	2 15	2 42	3 9	3 36	3 3	4 30	4 57	5 24	5 51	6 18	6 45
28	0 28	0 56	1 24	1 52	2 20	2 48	3 16	3 44	3 12	4 40	5 8	5 36	6 4	6 32	7 0
29	0 29	0 58	1 27	1 56	2 25	2 54	3 23	3 52	3 21	4 50	5 19	5 48	6 17	6 46	7 15
30	0 30	1 0	1 30	2 0	2 30	3 0	3 30	4 0	3 30	5 0	5 30	6 0	6 30	7 0	7 30

Tav. VII.

Tavola di moltiplicazione.

	0		1		2		3		4	
0′	0′	0″	0′	1″	0′	2″	0′	2″	0′	3″
I	0	8	0	9	0	10	0	11	0	11
2	0	16	0	17	0	18	0	19	0	20
3	0	25	0	25	0	26	0	27	0	28
4	0	33	0	34	0	34	0	35	0	36
5	0	41	0	42	0	43	0	43	0	44
6	0	49	0	50	0	51	0	52	0	52
7	0	57	0	58	0	59	1	0	1	1
8	1	6	1	6	1	7	1	8	1	9
9	1	14	1	15	1	15	1	16	1	17
10	1	22	1	23	1	24	1	24	1	25
11	1	30	1	31	1	32	1	33	1	33
12	1	38	1	39	1	40	1	41	1	42
13	1	46	1	47	1	48	1	49	1	50
14	1	55	1	55	1	56	1	57	1	58
15	2	3	2	4	2	4	2	5	2	6

Seguito della Tavola.

	5		6		7		8		9	
0′	0′	4″	0′	5″	0′	6″	0′	7″	0′	7″
1	0	12	0	13	0	14	0	15	0	16
2	0	20	0	21	0	22	0	23	0	24
3	0	29	0	29	0	30	0	31	0	32
4	0	37	0	38	0	38	0	39	0	40
5	0	45	0	46	0	47	0	47	0	48
6	0	53	0	54	0	55	0	56	0	57
7	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5
8	1	10	1	10	1	11	1	12	1	13
9	1	18	1	19	1	19	1	20	1	22
10	1	26	1	27	1	28	1	28	1	29
11	1	34	1	35	1	36	1	37	1	37
12	1	42	1	43	1	44	1	45	1	46
13	1	51	1	51	1	52	1	53	1	54
14	1	59	2	0	2	0	2	1	2	2
15	2	7	2	8	2	9	2	9	2	10

Tav. VIII.

1ª 1880 Gennaio	2ª Pass. al Mer.	3ª Differenze	4ª Doppie Diff.	5ª Decl. Mer.	6ª Differenze	7ª Doppi	8ª P. P. pel N.
	ore m s	ore m s	ore m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′
1	I 3 3 12			+ 9 54 0			
	S 15 25 43	12 22 31	24 45 2	7 12 14	— 2 41 46	— 5 23 32	+ 1 28
2	I 3 48 9	12 22 26	24 44 52	4 24 8	2 48 6	5 36 12	
	S 16 10 38	12 22 29	24 44 58	+ 1 31 26	2 52 42	5 45 24	+ 1 30
3	I 4 33 18	12 22 40	24 45 20	— 1 24 6	2 55 32	5 51 4	
	S 16 56 17	12 22 59	24 45 58	4 20 32	2 56 26	5 52 52	+ 1 34
4	I 5 19 47	12 23 30	24 47 0	7 15 48	2 55 16	5 50 32	
	S 17 43 54	12 24 7	24 48 11	10 7 40	2 51 52	5 43 44	

	9ª Decl. Nasc.	10ª P. P. pel T.	11ª Decl. Tra.	12ª Arco Ort.	13ª Arco Occ.	14ª Nascere	15ª Tramonto
	I			ore m		ore m	
1	S + 8° 40′			6 44		8 42	
	I	— 1° 32′	+ 5° 40′		ore m 6 32		ore m 21 58
2	S + 3 1			6 21		9 50	
	I	— 1 30	+ 0 1		6 9		22 20
3	S — 2 54			5 57		10 59	
		— 1 25	— 5 46		5 46		22 42

	16ª	17ª	18ª	19ª	20ª	21ª
	ore m s	ore ore	ore m ″ ′	° ′	° ′	° ′ ″
1	2 27 8	8 15	6 44; 13 2	+ 1 29	+ 8 41	98 37 52
	14 49 39	15 22	6 32; 13 5	— 1 28	+ 5 44	95 39 43
2	3 12 5	9 16	6 21; 14 0	+ 1 29	+ 3 0	92 57 7
	15 34 34	16 23	6 9; 14 2	— 1 27	+ 0 4	90 3 56
3	3 57 14	10 17	5 57; 14 2	+ 1 24	— 2 57	87 5 51
	16 20 13	16 23	5 46; 14 2	— 1 24	— 5 43	84 21 17

	22ª	23ª	24ª	25ª	26ª
	′ ″	° ′ ″	ore m s	ore m s	ore m s
1	— 32 12	98 5 40	6 32 23	6 44 39	8 41 4
	32 14	95 7 29	6 20 30	6 32 21	21 58 4
2	32 24	92 24 43	6 9 39	6 21 12	9 49 26
	32 44	89 31 12	5 58 6	6 9 21	22 19 59
3	33 17	86 32 34	5 46 10	5 57 13	10 59 4
	— 33 59	83 47 18	5 35 9	5 46 5	22 42 22

Argomento verticale. Declinazione della Luna al Merid.
Argomento orizzontale. Differenza di Declinazione.

Tav. della parte proporzionale di Declinazione. TAV. 16. DELL' OSS. LUNA.

Decl. (+)		Arco S. 24 40																			
		ore	*m*	0°	15'	1°	0'	2°	0'	3°	0'	4°	0'	5°	0'	6°	0'	7°	0'	8°	0'
0°	0'	6	8	0	4	0	15	0	31	0	46	1	1	1	17	1	32	1	47	2	3
1	0		12		4		15		31		46		2		17		33		48		4
2	0		16		4		16		31		47		3		18		34		50		5
3	0		20		4		16		32		47		3		19		35		51		7
4	0		24		4		16		32		48		4		20		36		52		8
5	0		28		4		16		32		48		5		21		37		53		9
6	0		32		4		16		33		49		5		22		38		54		11
7	0		36		4		16		33		49		6		22		39		55		12
8	0		41		5		17		33		50		7		24		40		57		14
9	0		45		5		17		34		51		7		24		41		58		15
10	0		49		5		17		34		51		8		25		42	1	59		16
11	0		53		5		17		34		52		9		26		43	2	0		18
12	0	6	57		5		17		35		52		9		27		44		2		19
13	0	7	2		5		18		35		53		10		28		45		3		21
14	0		6		5		18		35		53		11		29		46		4		22
15	0		10		5		18		36		54		12		30		48		6		24
16	0		15		5		18		36		54		12		31		49		7		25
17	0		20		5		18		37		55		13		32		50		8		27
18	0		25		5		19		37		56		14		33		51		10		28
19	0		29		5		19		37		56		15		34		52		11		30
20	0		34		5		19		38		57		16		35		53		12		31
21	0		39		5		19		38		57		16		36		55		14		33
22	0		44		5		19		39		58		17		37		56		15		35
23	0		49		5		20		39		59		18		38		57		17		36
24	0	7	55		5		20		40		59		19		39	1	59		19		38
25	0	8	0		5		20		40	1	0		20		40	2	0		20		40
26	0		6		5		20		40		1		21		41		1		22		42
27	0		11		5		20		41		1		22		42		3		23		44
28	0		17		5		21		41		2		23		44		4		25		46
29	0		23		5		21		42		3		24		45		6		27		48
30	0		29		5		21		42		3		24		46		7		28		50

Decl. (—)		Arco S. 24 40																			
		ore	*m*	0°	15′	1°	0′	2°	0′	3°	0′	4°	0′	5°	0′	6°	0′	7°	0′	8°	0′
0°	0′	6	8	0	4	0	15	0	31	0	46	1	1	1	17	1	32	1	47	2	3
1	0		4		4		15		30		45		1		16		31		46		1
2	0	5	59		4		15		30		45	1	0		15		30		45		0
3	0		56		4		15		30		44	0	59		14		29		44	1	59
4	0		52		4		15		29		44		59		13		28		43		57
5	0		47		4		14		29		43		58		12		27		41		56
6	0		43		4		14		29		43		57		11		26		40		54
7	0		39		4		14		28		42		56		11		25		39		53
8	0		35		3		14		28		42		56		10		24		38		52
9	0		31		3		14		28		41		55		9		23		37		50
10	0		27		3		14		27		41		54		8		22		35		49
11	0		22		3		13		27		40		54		7		20		34		47
12	0		18		3		13		26		40		53		6		19		33		46
13	0		14		3		13		26		39		52		5		18		32		45
14	0		9		3		13		26		39		51		4		17		30		43
15	0		5		3		13		25		38		51		4		16		29		42
16	0	5	0		3		12		25		37		50		3		15		27		40
17	0	4	56		3		12		25		37		49		2		14		26		39
18	0		51		3		12		24		36		48		1		13		25		37
19	0		46		3		12		24		36		48	1	0		11		23		35
20	0		41		3		12		23		35		47	0	59		10		22		34
21	0		36		3		11		23		34		46		57		9		20		32
22	0		31		3		11		23		34		45		56		8		19		30
23	0		26		3		11		22		33		44		55		6		18		29
24	0		21		3		11		22		33		43		54		5		16		27
25	0		15		3		11		21		32		42		53		4		14		25
26	0		9		3		10		21		31		41		52		2		13		23
27	0	4	4		3		10		20		30		41		51	1	1		11		21
28	0	3	58		2		10		20		30		40		50	0	59		9		19
29	0		50		2		10		19		29		38		48		57		7		17
30	0		42		2		10		19		28		37		47		56		5		15

Argomento verticale. Declinazione Meridiana della Luna.
Argomento orizzontale. Differenza di Declinazione.

	Arco S																			
Decl. (+)	24	40																		
	ore	*m*	0°	15′	1°	0′	2°	0′	3°	0′	4°	0′	5°	0′	6°	0′	7°	0′	8°	0′
0°	6	8	0	4	0	15	0	30	0	45	1	0	1	15	1	30	1	44	1	59
1		12		4		15		30		45		0		15		30		46	2	1
2		16		4		15		30		46		1		16		31		47		2
3		20		4		15		31		46		2		17		32		48		3
4		24		4		16		31		47		2		18		33		49		5
5		28		4		16		31		47		3		19		34		50		6
6		32		4		16		32		48		4		19		35		51		7
7		36		4		16		32		48		4		20		36		52		8
8		41		4		16		33		49		5		21		38		54		10
9		45		4		16		33		49		6		22		39		55		11
10		49		4		17		33		50		6		23		39		56		13
11		53		4		17		33		50		7		24		40		57		14
12	6	57		4		17		34		51		8		25		41		58		15
13	7	2		4		17		34		51		8		25		42		59		16
14		6		4		17		35		52		9		26		44	2	1		18
15		10		4		17		35		53		10		27		45		2		20
16		15		4		18		35		53		11		28		46		3		21
17		20		4		18		35		53		11		29		47		5		23
18		25		5		18		36		54		12		30		48		6		24
19		29		5		18		37		55		13		31		49		8		25
20		34		5		18		37		55		14		32		50		9		27
21		39		5		19		37		56		15		33		52		10		29
22		44		5		19		38		56		15		34		53		11		30
23		49		5		19		38		57		16		35		55		13		32
24	7	55		5		19		39		58		17		36		56		15		34
25	8	0		5		20		39		59		18		37		57		17		36
26		6		5		20		39		59		19		38		58		18		38
27		11		5		20		40	1	0		20		39	1	0		20		40
28		17		5		20		40		0		21		41		1		21		41
29		23		5		21		41		1		22		42		3		23		43
30		29		5		21		41		2		23		43		4		24		45

Argomento verticale. Declinazione Meridiana della Luna.
Argomento orizzontale Differenza di Declinazione.

Decl. (—)	Arco S																			
	24	40																		
	ore	*m*	0°	15′	1°	0′	2°	0′	3°	0′	4°	0′	5°	0′	6°	0′	7°	0′	8°	0′
0°	6	8	0	4	0	15	0	30	0	45	1	0	1	15	1	30	1	44	1	59
1		4		4		15		30		44	0	59		14		29		43		58
2	5	59		4		15		29		44		58		13		27		42		56
3		56		4		14		29		43		58		12		27		41		55
4		52		4		14		29		43		57		11		26		40		54
5		47		4		14		28		42		56		10		24		38		53
6		43		3		14		28		42		56		10		23		37		51
7		39		3		14		27		41		55		9		22		36		50
8		35		3		14		27		41		54		8		21		35		49
9		31		3		13		27		40		54		7		21		34		47
10		27		3		13		27		40		53		6		20		33		46
11		22		3		13		26		39		52		5		18		31		44
12		18		3		13		26		39		52		4		17		30		43
13		14		3		13		25		38		51		4		16		29		42
14		9		3		13		25		38		50		3		16		28		40
15		5		3		12		25		37		49		2		14		27		39
16	5	0		3		12		24		36		49		1		13		25		38
17	4	56		3		12		24		36		48	1	0		12		24		36
18		51		3		12		24		35		47	0	59		11		23		34
19		46		3		12		23		35		46		58		10		22		33
20		41		3		11		23		34		46		57		8		20		31
21		36		3		11		22		34		45		56		7		18		30
22		31		3		11		22		33		44		55		6		17		28
23		26		3		11		22		32		43		54		5		15		26
24		21		3		11		21		32		42		53		3		14		25
25		15		3		10		21		31		41		52		2		12		23
26		9		3		10		20		30		40		50	1	1		11		21
27	4	4		3		10		20		30		40		49	0	59		9		19
28	3	58		3		10		19		29		39		48		58		8		17
29		50		2		9		18		28		37		47		56		5		15
30		42		2		9		18		27		36		45		54	1	3	1	12

Argomento verticale. Declinazione della Luna.
Argomento orizzontale. Differenza dei passaggi allo stesso Meridiano.

Tav. 15 dell' Oss. Luna.

Decl. (+)	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s
	24	0	0	24	38	0	24	42	0	24	46	0	24	50	0	24	54	0	24	58	0	25	2	0	25	6	0	24	40	0
0°	5	57	43	6	7	9	6	8	9	6	9	9	6	10	8	6	11	7	6	12	7	6	13	7	6	14	6	6	7	39
1	6	1	39		11	12		12	12		13	12		14	12		15	12		16	13		17	13		18	13		11	42
2		5	35		15	14		16	14		17	15		18	16		19	17		20	18		21	19		22	20		15	44
3		9	31		19	16		20	17		21	19		22	20		23	22		24	23		25	25		26	27		19	47
4		13	28		23	19		24	21		25	23		26	26		27	28		28	31		29	33		30	36		23	50
5		17	27		27	25		28	27		29	30		30	33		31	36		32	39		33	42		34	45		27	56
6		21	26		31	30		32	33		33	37		34	40		35	44		36	47		37	51		28	54		32	2
7		25	26		35	36		36	40		37	44		38	49		39	53		40	58		42	2		43	6		36	8
8		29	27		39	44		40	48		41	53		42	58		44	3		45	8		46	13		47	18		40	16
9		33	31		43	54		44	59		46	5		47	10		48	16		49	21		50	27		51	32		44	27
10		37	37		48	7		49	13		50	19		51	25		52	31		53	38		54	44		55	50		48	40
11		41	45		52	22		53	28		54	34		55	41		56	48		57	55		59	2	7	0	9		52	55
12		45	55		56	38		57	45		58	53	7	0	0	7	1	8	7	2	15	7	3	23		4	30		57	12
13		50	7	7	0	56	7	2	4	7	3	12		4	21		5	29		6	38		7	46		8	55	7	1	30
14		54	24		5	20		6	29		7	38		8	47		9	56		11	5		12	14		13	23		5	55
15		58	45		9	48		10	58		12	7		13	17		14	27		15	37		16	47		17	57		10	23
16	7	3	9		14	19		15	29		16	39		17	50		19	0		20	11		21	21		22	31		14	54
17		7	37		18	54		20	5		21	16		22	28		23	39		24	50		26	2		27	14		19	30
18		12	9		23	33		24	45		25	57		27	9		28	21		29	33		30	45		31	57		24	9
19		10	45		28	17		29	29		30	42		31	54		33	7		34	20		35	33		36	46		28	53
20		21	26		33	5		34	18		35	32		36	45		37	59		39	12		40	26		41	39		33	42
21		26	13		38	0		39	14		40	28		41	42		42	56		44	11		45	26		46	41		38	37
22		31	7		43	2		44	16		45	31		46	47		48	2		49	18		50	33		51	49		43	39
23		36	10		48	12		49	28		50	44		52	0		53	16		54	32		55	48		57	4		48	50
24		41	19		53	30		54	47		56	3		57	20		58	37		59	53	8	1	10	8	2	27		54	8
25		46	36		58	55	8	0	13	8	1	30	8	2	48	8	4	6	8	5	24		6	42		7	0		59	34
26		52	2	8	4	30		5	48		7	6		8	25		9	43		11	2		12	20		13	38	8	5	9
27		57	39		10	15		11	34		12	54		14	13		15	33		16	52		18	12		19	32		10	55
28	8	3	26		16	12		17	32		18	52		20	13		21	33		22	54		24	14		25	35		16	52
29		9	28		22	23		23	34		25	6		26	27		27	49		29	10		30	32		31	54		23	4

Argomento verticale. Declinazione della Luna.
Argomento orizzontale. Differenza dei passaggi allo stesso Meridiano.

Tav. 15 dell' Oss. Luna.

Decl. (—)	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s	ore	m	s
	24	0	0	24	38	0	24	42	0	24	46	0	24	50	0	24	54	0	24	58	0	25	2	0	25	6	0	24	40	0
0°	5	57	43	6	7	9	6	8	9	6	9	9	6	10	8	6	11	7	6	12	7	6	13	7	6	14	6	6	7	39
1		53	47		3	7		4	6		5	6		6	5		7	4		8	3		9	2		10	1		3	37
2		49	51	5	59	5		0	3		1	2		2	0		2	58		3	56		4	54		5	52	5	59	34
3		45	55		55	3	5	56	1	5	56	58	5	57	56	5	58	54	5	59	51		0	49		1	46		55	32
4		41	58		50	59		51	57		52	54		53	51		54	48		55	45	5	56	42	5	57	39		51	28
5		37	59		46	54		47	52		48	47		49	44		50	40		51	37		52	33		53	30		47	22
6		34	0		42	49		43	45		44	41		45	36		46	32		47	27		48	23		49	18		43	17
7		30	0		38	42		39	38		40	33		41	28		42	23		43	18		44	13		45	8		39	10
8		26	58		34	33		35	28		36	22		37	17		38	11		39	6		40	0		40	55		35	0
9		22	54		30	23		31	16		32	10		33	4		33	58		34	51		35	45		36	38		30	49
10		17	47		26	11		27	4		27	57		28	50		29	53		30	36		31	29		32	22		26	37
11		13	37		21	53		22	46		23	38		24	31		25	23		26	15		27	7		27	59		22	20
12		9	27		17	37		18	29		19	21		20	12		21	4		21	55		22	47		23	38		18	3
13		5	13		13	16		14	7		14	58		15	49		16	39		17	30		18	21		19	11		13	42
14		0	56		8	53		9	43		10	33		11	23		12	13		13	3		15	53		16	43		9	18
15	4	56	35		4	24		5	4		6	4		6	53		7	43		8	32		9	22		10	11		4	49
16		52	9	4	59	52		0	40		1	29		2	18		3	6		3	55		4	43		5	32		0	16
17		47	40		55	15	4	56	3	4	56	51	4	57	39	4	58	27	4	59	15		0	3		0	51	4	55	39
18		43	5		50	34		51	21		52	9		52	56		53	43		54	30	4	55	17	4	56	4		50	58
19		38	28		45	48		46	35		47	21		48	8		48	54		49	41		50	27		51	13		46	12
20		33	43		40	59		41	45		42	31		43	16		44	2		44	48		45	34		46	20		41	22
21		28	57		36	2		36	47		37	32		38	17		39	2		39	47		40	32		41	17		36	25
22		24	0		30	58		31	42		32	26		33	10		33	54		34	38		35	22		36	6		31	20
23		18	55		25	45		26	29		27	12		27	55		28	38		29	21		30	4		30	47		26	7
24		13	43		20	24		21	7		21	49		22	32		23	14		23	57		24	39		25	21		20	45
25		8	24		14	57		15	39		16	21		17	2		17	44		18	25		19	6		19	47		15	18
26		2	55		9	20		10	0		10	40		11	21		12	1		12	42		13	22		14	2		9	40
27	3	57	15		3	30		4	10		4	50		5	29		6	9		6	49		7	29		8	9		3	50
28		51	25	3	57	32	3	58	11	3	58	49	3	59	28		0	6		0	45		1	23		2	1	3	57	51
29		45	20		51	36		51	55		52	33		53	10	3	53	48	3	54	25	3	55	3	3	55	41		51	30

Argomento orizzontale. Latitudine geografica.

Tav. XVI. Manfredi.

DIFFERENZA ASCENSIONALE

Declinazione (+) (−)	44° 0′			44° 30′			45° 0		
	ore	*m*	*s*	*ore*	*m*	*s*	*ore*	*m*	*s*
1	0	3	52	0	3	56	0	4	0
2		7	44		7	52		8	0
3		11	36		11	49		12	1
4		15	29		15	46		16	2
5		19	23		19	44		20	5
6		23	18		23	43		24	8
7		27	14		27	44		28	13
8		31	12		31	46		32	19
9		35	12		35	50		36	27
10		39	13		39	55		40	37
11		43	16		44	4		44	52
12		47	24		48	14		49	4
13		51	32		52	27		53	24
14		55	44		56	44		57	44
15	1	0	0	1	1	6	1	2	12
16		4	20		5	30		6	40
17		8	40		9	51		11	12
18		13	12		14	32		15	52
19		17	40		19	6		20	32
20		22	20		23	52		25	24
21		27	0		28	38		30	16
22		31	52		33	36		35	20
23		36	48		38	38		40	28
24		41	52		43	48		45	44
25		47	0		49	6		51	12
26		52	24		54	34		56	44
27		57	52	2	0	12	2	2	32
28	2	3	36		6	2		8	28
29		9	28		12	4		14	40
30		15	32		18	18		21	4

Tav. XIII.

Argomento verticale. Declinazione dell' Astro... Argomento orizzontale. Latitudine geografica.

Tav. XXVIII Manfredi.

RIFRAZIONE

	40° 0' 0''	40° 30' 0''	41° 0' 0''	41° 30' 0''	42° 0' 0''	42° 30' 0''	43° 0' 0''	43° 30' 0''	44° 0' 0''	44° 30' 0''	45° 0' 0''
0°	0 2 49	0 2 50	0 2 52	0 2 53	0 2 55	0 2 56	0 2 57	0 2 59	0 3 0	0 3 2	0 3 3
5	49	50	52	53	55	56	57	59	0	2	3
6	50	51	53	54	56	57	58	0 3 0	1	3	4
7	50	51	53	54	56	57	58	0	1	3	4
8	50	52	53	55	56	58	59	1	2	4	5
9	51	52	54	55	57	58	59	1	2	4	5
10	51	53	54	56	57	59	0 3 0	2	3	5	6
11	52	53	55	56	58	59	0	2	3	5	6
12	52	54	55	57	58	0 3 0	1	3	4	6	7
13	53	54	56	57	59	0	1	3	4	6	7
14	54	55	57	58	0 3 0	1	2	4	5	7	8
15	55	56	58	59	1	2	3	5	6	8	9
16	56	57	59	0 3 0	2	3	4	6	7	9	10
17	57	58	0 3 0	1	3	4	5	7	8	10	11
18	58	59	1	2	4	5	6	8	9	11	12
19	59	0 3 0	2	3	5	6	7	9	10	12	13
20	0 3 0	2	3	4	6	8	9	11	12	14	15
21	2	4	5	6	8	10	11	13	14	16	17
22	3	5	6	7	9	11	12	14	15	17	18
23	4	6	7	8	10	12	13	15	16	18	19
24	5	7	8	10	11	13	15	16	18	19	21
25	6	8	9	11	12	14	16	17	19	20	22
26	7	9	10	12	13	15	17	18	20	21	23
27	9	11	12	14	15	17	19	20	22	23	25
28	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
29	13	15	16	18	19	21	23	24	26	27	29
30	15	17	18	20	21	23	25	26	28	29	31

Tav. XIV

Argomento verticale. Tempo dell' Arco
Argomento orizzontale. Variazione della Declinazione.

ore m														
0 0	0° 0′ 1″	0° 0′ 2″	0° 0′ 3″	0° 0′ 4″	0° 0′ 5″	0° 0′ 6″	0° 0′ 7″	0° 0′ 8″	0° 0′ 9″	0° 0′ 10″	0° 0′ 11″	0° 0′ 12″	0° 0′ 13″	0° 0′ 14″
3 40	3 40	7 20	11 0	14 40	18 20	22 0	25 40	29 20	33 0	36 40	40 20	44 0	47 40	51 20
50	50	40	30	15 20	19 10	23 0	26 50	30 40	34 30	38 20	42 10	46 0	49 50	53 40
4 0	4 0	8 0	12 0	16 0	20 0	24 0	28 0	32 0	36 0	40 0	44 0	48 0	52 0	56 0
10	10	20	30	40	50	25 0	29 10	33 20	37 30	41 40	45 50	50 0	54 10	58 20
20	20	40	13 0	17 20	21 40	26 0	30 20	34 40	39 0	43 20	47 40	52 0	56 20	1 0 40
30	30	9 0	30	18 0	22 30	27 0	31 30	36 0	40 30	45 0	49 30	54 0	58 30	3 0
40	40	20	14 0	40	23 20	28 0	32 40	37 20	42 0	46 40	51 20	56 0	1 0 40	5 20
50	50	40	30	19 20	24 10	29 0	33 50	38 40	43 30	48 20	53 10	58 0	2 50	7 40
5 0	5 0	10 0	15 0	20 0	25 0	30 0	35 0	40 0	45 0	50 0	55 0	1 0 0	5 0	10 0
10	10	20	30	40	50	31 0	36 10	41 20	46 30	51 40	56 50	2 0	7 10	12 20
20	20	40	16 0	21 20	26 40	32 0	37 20	42 40	48 0	53 20	58 40	4 0	9 20	14 40
30	30	11 0	30	22 0	27 30	33 0	38 30	44 0	49 30	55 0	1 0 30	6 0	11 30	17 0
40	40	20	17 0	40	28 20	34 0	39 40	45 20	51 0	56 40	2 20	8 0	13 40	19 20
50	50	40	30	23 20	29 10	35 0	40 50	46 40	52 30	58 20	4 10	10 0	15 50	21 40
6 0	6 0	12 0	18 0	24 0	30 0	36 0	42 0	48 0	54 0	1 0 0	6 0	12 0	18 0	24 0
10	10	20	30	40	50	37 0	43 10	49 20	55 30	1 40	7 50	14 0	20 10	26 20
20	20	40	19 0	25 20	31 40	38 0	44 20	50 40	57 0	3 20	9 40	16 0	22 20	28 40
30	30	13 0	30	26 0	32 30	39 0	45 30	52 0	58 30	5 0	11 30	18 0	24 30	31 0
40	40	20	20 0	40	33 20	40 0	46 40	53 20	1 0 0	6 40	13 20	20 0	26 40	33 20
50	50	40	30	27 20	34 10	41 0	47 50	54 40	1 30	8 20	15 10	22 0	28 50	35 40
7 0	7 0	14 0	21 0	28 0	35 0	42 0	49 0	56 0	3 0	10 0	17 0	24 0	31 0	38 0
10	10	20	30	40	50	43 0	50 10	57 20	4 30	11 40	18 50	26 0	33 10	40 20
20	20	40	22 0	29 20	36 40	44 0	51 20	58 40	6 0	13 20	20 40	28 0	35 20	42 40
30	30	15 0	30	30 0	37 30	45 0	52 30	1 0 0	7 30	15 0	22 30	30 0	37 30	45 0
40	40	20	23 0	40	38 20	46 0	53 40	1 20	9 0	16 40	24 20	32 0	39 40	47 20
50	50	40	30	31 20	39 10	47 0	54 50	2 40	10 30	18 20	26 10	34 0	41 50	49 40
8 0	8 0	16 0	24 0	32 0	40 0	48 0	56 0	4 0	12 0	20 0	28 0	36 0	44 0	52 0
10	10	20	30	40	50	49 0	57 10	5 20	13 30	21 40	29 50	38 0	46 10	54 20
20	20	40	25 0	33 20	41 40	50 0	58 20	6 40	15 0	23 20	31 40	40 0	48 20	56 40
30	30	17 0	30	34 0	42 30	51 0	59 30	8 0	16 30	25 0	33 30	42 0	50 30	59 0
40	40	20	26 0	40	43 20	52 0	1 0 40	9 20	18 0	26 40	36 20	44 0	52 40	2 1 20

Declinazione		Arco Nord				Arco Sud				Variazione per 1'			Differenza	
		semi-diurni												
0°	0'	90°	0'	0''	00	90°	0'	0''	00					
	10	90	9	49	59	89	50	10	41	0'	58''	959		
	20	90	19	39	20	89	40	20	80		58	961	0''	002
	30	90	29	28	84	89	30	31	16		58	964	0	003
	40	90	39	18	52	89	20	41	48		58	968	0	004
	50	90	49	8	26	89	10	51	74		58	974	0	006
1	0	90	58	58	07	89	1	1	93		58	981	0	007
	10	91	8	47	97	88	51	12	03		58	990	0	009
	20	91	18	37	98	88	41	22	02		59	001	0	011
	30	91	28	28	11	88	31	31	89		59	013	0	012
	40	91	38	18	37	88	21	41	63		59	026	0	013
	50	91	48	8	77	88	11	51	23		59	040	0	014
2	0	91	57	59	34	88	2	0	66		59	057	0	017
	10	92	7	50	09	87	52	9	91		59	075	0	018
	20	92	17	41	03	87	42	18	97		59	094	0	019
	30	92	27	32	18	81	32	27	82		59	115	0	021
	40	92	37	23	55	87	22	36	45		59	137	0	022
	50	92	47	15	16	87	12	44	84		59	161	0	024
3	0	92	57	7	03	87	2	52	97		59	187	0	026
	10	93	6	59	16	86	53	0	84		59	213	0	026
	20	93	16	51	57	86	43	8	43		59	241	0	028
	30	93	26	44	28	86	33	15	72		59	271	0	030
	40	93	36	37	31	86	23	22	69		59	303	0	032
	50	93	46	30	67	86	13	29	33		59	336	0	033
4	0	93	56	24	37	86	3	35	63		59	370	0	034
	10	94	6	18	43	85	53	41	57		59	406	0	036
	20	94	16	12	86	85	43	47	14		59	443	0	037
	30	94	26	7	68	85	33	52	32		59	482	0	039
	40	94	36	2	91	85	23	57	09		59	523	0	041
	50	94	45	58	56	85	14	1	41		59	565	0	042
5	0	94	55	54	65	85	4	5	35		59	609	0	044
	10	95	5	51	19	84	54	8	81		59	654	0	045
	20	95	15	48	20	84	44	11	80		59	701	0	047
	30	95	25	45	69	84	34	14	31		59	749	0	048
	40	95	35	43	68	84	24	16	32		59	799	0	050
	50	95	45	42	19	84	14	17	81		59	851	0	052
6	0	95	55	41	23	84	4	18	77		59	904	0	053
	10	96	5	40	81	83	54	19	19		59	958	0	054
	20	96	15	40	95	83	44	19	05	1	0	014	0	056
	30	96	25	41	67	83	34	18	33	1	0	072	0	058
	40	96	35	42	99	83	24	17	01	1	0	132	0	060
	50	96	45	44	93	83	14	15	07	1	0	194	0	062
7	0	96	55	47	50	83	4	12	50	1	0	257	0	063
	10	97	5	50	71	82	54	9	29	1	0	321	0	064
	20	97	15	54	58	82	45	5	42	1	0	387	0	066
	30	97	25	59	12	82	34	0	88	1	0	454	0	067
	40	97	36	4	36	82	23	55	64	1	0	524	0	070
	50	97	46	10	31	82	13	49	69	1	0	595	0	071
8	0	97	56	16	99	82	3	43	01	1	0	668	0	073
	10	98	6	24	42	81	53	35	58	1	0	743	0	075
	20	98	16	32	62	81	43	27	38	1	0	820	0	077
	30	98	26	41	60	81	33	18	40	1	0	898	0	078

Declinazione		Arco Nord				Semi-diurni Arco Sud				Variazione per 1'			Differenza	
8°	40'	98°	36'	51"	37	81°	23'	8"	63	1'	0"	977	0"	079
	50	98	47	1	95	81	12	58	05	1	1	058	0	081
9	0	98	57	13	36	81	2	46	64	1	1	141	0	083
	10	99	7	25	62	80	52	34	38	1	1	226	0	085
	20	99	17	38	74	80	42	21	26	1	1	312	0	086
	30	99	27	52	75	80	32	7	25	1	1	401	0	089
	40	99	38	7	67	80	21	52	33	1	1	492	0	091
	50	99	48	23	52	80	11	36	48	1	1	585	0	093
10	0	99	58	40	31	80	1	19	69	1	1	679	0	094
	10	100	8	58	05	79	51	1	95	1	1	774	0	095
	20	100	19	16	76	79	40	43	24	1	1	871	0	097
	30	100	29	36	46	79	30	23	54	1	1	970	0	099
	40	100	39	57	18	79	20	2	82	1	2	072	0	102
	50	100	50	18	94	79	9	41	06	1	2	176	0	104
11	0	101	0	41	76	78	59	18	24	1	2	282	0	106
	10	101	11	5	65	78	48	54	35	1	2	389	0	107
	20	101	21	30	62	78	38	29	38	1	2	497	0	108
	30	101	31	56	70	78	28	3	30	1	2	608	0	109
	40	101	42	23	91	78	17	36	09	1	2	721	0	113
	50	101	52	52	28	78	7	7	72	1	2	837	0	116
12	0	102	3	21	82	77	56	38	18	1	2	954	0	117
	10	102	13	52	55	77	46	7	45	1	3	073	0	119
	20	102	24	24	48	77	35	35	52	1	3	193	0	120
	30	102	34	57	64	77	25	2	36	1	3	316	0	123
	40	102	45	32	06	77	14	27	94	1	3	442	0	126
	50	102	56	7	75	77	3	52	25	1	3	569	0	127
13	0	103	6	44	73	76	53	15	27	1	3	698	0	129
	10	103	17	23	03	76	42	36	97	1	3	830	0	132
	20	103	28	2	67	76	31	57	33	1	3	964	0	134
	30	103	38	43	67	76	21	16	33	1	4	100	0	136
	40	103	49	26	05	76	10	33	95	1	4	238	0	138
	50	104	0	9	83	75	59	50	17	1	4	378	0	140
14	0	104	10	55	03	75	49	4	97	1	4	520	0	142
	10	104	21	41	68	75	38	18	32	1	4	665	0	145
	20	104	32	29	81	75	27	30	19	1	4	813	0	148
	30	104	43	19	44	75	16	40	56	1	4	963	0	150
	40	104	54	10	59	75	5	49	41	1	5	115	0	152
	50	105	5	3	27	74	54	56	73	1	5	268	0	153
15	0	105	15	57	51	74	44	2	49	1	5	424	0	156
	10	105	26	53	33	74	33	6	67	1	5	582	0	158
	20	105	37	50	77	74	22	9	23	1	5	744	0	162
	30	105	48	49	85	74	11	10	15	1	5	908	0	164
	40	105	59	50	60	74	0	9	40	1	6	075	0	167
	50	106	10	53	04	73	49	6	96	1	6	244	0	169
16	0	106	21	57	19	73	38	2	81	1	6	415	0	171
	10	106	33	3	08	73	26	56	92	1	6	589	0	174
	20	106	44	10	73	73	15	49	27	1	6	765	0	176
	30	106	55	20	17	73	4	39	83	1	6	944	0	179
	40	107	6	31	43	72	53	28	57	1	7	126	0	182
	50	107	17	44	53	72	42	15	47	1	7	310	0	184
17	0	107	28	59	51	72	31	0	49	1	7	498	0	188
	10	107	40	16	39	72	19	43	61	1	7	688	0	190

Declinazione		Arco Nord				Arco Sud				Variazione per 1′			Differenza	
		Semi-diurni												
17°	20′	107°	51′	35″	20	72°	8′	24″	80	1′	7″	881	0″	193
	30	108	2	55	97	71	57	4	03	1	8	077	0	196
	40	108	14	18	73	71	45	41	27	1	8	276	0	199
	50	108	25	43	49	71	34	16	51	1	8	476	0	200
18	0	108	37	10	28	71	22	49	72	1	8	679	0	203
	10	108	48	39	15	71	11	20	85	1	8	887	0	208
	20	109	0	10	13	70	59	49	87	1	9	098	0	211
	30	109	11	43	25	70	48	16	75	1	9	311	0	213
	40	109	23	18	53	70	36	41	47	1	9	527	0	216
	50	109	34	56	01	70	25	3	99	1	9	748	0	221
19	0	109	46	35	72	70	13	24	28	1	9	971	0	223
	10	109	58	17	68	70	1	42	32	1	10	196	0	225
	20	110	10	1	93	69	49	58	07	1	10	425	0	229
	30	110	21	48	50	69	38	11	50	1	10	657	0	232
	40	110	33	37	44	69	26	22	56	1	10	894	0	237
	50	110	45	28	78	69	14	31	22	1	11	134	0	240
20	0	110	57	22	55	69	2	37	45	1	11	377	0	243
	10	111	9	18	78	68	50	41	22	1	11	623	0	246
	20	111	21	17	50	68	38	42	50	1	11	872	0	249
	30	111	33	18	76	68	26	41	24	1	12	126	0	254
	40	111	45	22	60	68	14	37	40	1	12	384	0	258
	50	111	57	29	04	68	2	30	96	1	12	644	0	260
21	0	112	9	38	12	67	50	21	88	1	12	908	0	264
	10	112	21	49	89	67	38	10	11	1	13	177	0	269
	20	112	34	4	39	67	25	55	61	1	13	450	0	273
	30	112	46	21	65	67	13	38	35	1	13	726	0	276
	40	112	58	41	71	67	1	18	29	1	14	006	0	280
	50	113	11	4	62	66	48	55	38	1	14	291	0	285
22	0	113	23	30	42	66	36	29	58	1	14	580	0	289
	10	113	35	59	14	66	24	0	86	1	14	872	0	292
	20	113	48	30	82	66	11	29	18	1	15	168	0	296
	30	114	1	5	52	65	58	54	48	1	15	470	0	302
	40	114	13	43	29	65	46	16	71	1	15	777	0	307
	50	114	26	24	16	65	33	35	84	1	16	087	0	310
23	0	114	39	8	17	65	20	51	83	1	16	401	0	314
	10	114	51	55	36	65	8	4	64	1	16	719	0	318
	20	115	4	45	79	64	55	14	21	1	17	043	0	324
	30	115	17	39	52	64	42	20	48	1	17	373	0	330
	40	115	30	36	60	64	29	23	40	1	17	708	0	335
	50	115	43	37	08	64	16	22	92	1	18	048	0	340
24	0	115	56	41	00	64	3	19	00	1	18	392	0	344
	10	116	9	48	40	63	50	11	60	1	18	740	0	348
	20	116	22	59	33	63	37	0	67	1	19	093	0	353
	30	116	36	13	86	63	23	46	14	1	19	453	0	360
	40	116	49	32	05	63	10	27	95	1	19	819	0	366
	50	117	2	53	96	62	57	6	04	1	20	191	0	372
25	0	117	16	19	63	62	43	40	37	1	20	567	0	376
	10	117	29	49	13	62	30	10	87	1	20	950	0	383
	20	117	43	22	50	62	16	37	50	1	21	337	0	387
	30	117	56	59	80	62	3	0	20	1	21	730	0	393
	40	118	10	41	07	61	49	18	93	1	22	127	0	397
	50	118	24	26	39	61	35	33	61	1	22	532	0	405

RICERCA DEL FOSFORO

NELLE URINE IN CASO DI AVVELENAMENTO

E PRODOTTI CHE VI SI RISCONTRANO

MEMORIA

DEL PROF. FRANCESCO SELMI

(Letta nella Sessione ordinaria del 1.° Aprile 1880)

Una frase del Dragendorff nel suo riputatissimo *Manuale di Tossicologia* (1), in cui è dichiarato, che l' esame delle urine e delle feci riuscirebbe quasi sempre inutile nei casi di avvelenamento col fosforo, fu contraddetta da me nel 1874, come risulta da una *Nota* pubblicata nel Tomo V, Serie III delle *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* Ivi dimostrai che l' urina emunta da persona che aveva inghiottito del fosforo per suicidio, forniva prodotti volatili fosforati, i quali non si riscontrano nelle urine normali; corroborando tale osservazione con indagini sulla urina di cani a cui dal Prof. Vella erano stati amministrati in più volte pezzetti di fosforo involti nel cibo.

Posteriormente, cioè nel Dicembre del 1878, il Prof. Cesare Belluzzi, mi offerì da esaminare l' urina di una tale, che aveva inghiottito acqua, in cui a caldo aveva fatto digerire alcuni mazzi di fiammeri fosforici. Non potendo occuparmene io stesso, affidai le ricerche relative ai miei egregi allievi i Dottori Leone Pesci e Cesare Stroppa, i quali, dai risultati ottenuti, vennero alle conclusioni seguenti:

1.° Che l' urina degli avvelenati con fosforo, tenuta a bassa temperatura, ad impedire che si putrefaccia, svolge idrogeno fosforato, od altro prodotto volatile contenente del fosforo, capace d' imbrunire la carta di nitrato d' argento;

2.° Che scaldandola in bagno-maria bollente ed in atmosfera d' idrogeno, fornisce un distillato contenente del fosforo.

(1) Manual de Toxicologie. Paris. Savy 1873 pag. 5.

3.° Che trattandola come per gli acidi minori del fosforo, si comporta come se realmente ne contenesse.

Sull' urina di coloro che hanno assorbito il fosforo, giova rammentare una vecchia osservazione del Vauquelin, il quale si avvide che la sua orina nell' uscire fosforeggiava nell' oscuro, dopo che egli era stato esposto a vapori di fosforo.

Bouis, avvertendo che, stando al Dottore Bejale, le urine degli avvelenati con fosforo, sono talvolta albuminose e contengono una proporzione maggiore di fosfati, aggiunge, che si pretese di averle viste a fosforeggiare quando dopo raccolte colla sonda, si sottopongono a bollitura nell' apparecchio di Mitscherlich (1): ma dal modo con cui quell' autore si esprime, appare chiaramente che poco vi prestava fede. Su tale argomento non riscontrai negli scrittori altro da essere qui ricordato.

Avrei creduto, dopo la mia pubblicazione del 1874 e dopo la conferma datale dai Dottori Pesci e Stroppa, che, nelle ricerche periziali per sospetto di fosforo somministrato, il perito avrebbe procurato d' istituire le sue indagini in conformità delle rettificazioni a quanto aveva affermato il Dragendorff; se non che, dovetti disilludermi in proposito nell' occasione che mi fu data da leggere in manoscritto, una perizia recente, nella quale chi la fece, dopo cercato il fosforo e gli acidi minori nel ventricolo, passò semplicemente a verificare, se l' urina fosse albuminosa o no; argomentando che il sussistervi dell' albumina potesse valere a meglio confermare la propinazione del fosforo.

Perchè mai, leggendo quella Relazione, domandai fra me, il perito non procedette anche ad investigare se vi fossero contenuti quei prodotti speciali, de' quali io ed i miei due allievi rendemmo conto in due notizie, che furono riprodotte da parecchi giornali scientifici? La ragione parmi molto chiara: i nostri periti giurano su quanto riscontrano in qualsivoglia trattato straniero di Tossicologia e non tengono nel debito conto quanto fu osservato dagli italiani.

Vedendo adunque la necessità di ritornare sull' argomento, perchè, a furia di repliche s' incominciasse a prestare qualche attenzione ad una osservazione da non trascurarsi nelle indagini periziali, erami nato un vivo desiderio che mi capitasse di nuovo l' occasione di rinnovare le ricerche sopra urine di detta maniera; occasione che mi fu offerta per mia fortuna dal mio Ch.mo Collega il Prof. Giovanni Brugnoli per un caso recentissimo di un uomo, che, trangugiato un liquido, in cui era stemperato del fosforo, fu portato all' Ospedale maggiore di questa Città. Potendo disporre di una certa quantità dell' urina che ne fu raccolta, io mi prefissi, non solo di aggiungere una conferma ulteriore a quanto di già io ed i miei allievi avevamo pubblicato in proposito; ma ben anco di studiare un processo adatto, con cui meglio riconoscere in che stato il fosforo vi sussistesse oltre a quello di acido fosforico, e quale la via che in una perizia tornerebbe meglio da seguire per accertarsi con sicurezza che una data urina è fosforata. I risultati

(1) Manuel complet di Médecine legale par Briaud, Chaudet e Bouis. Paris Bailleres et Fils 1874.

conseguiti riuscirono di una importanza maggiore di quello che aveva presupposto; tanto che possono giovare ad ischiarire in qual modo una parte del metalloide operi nell' economia animale, e vengono in appoggio di alcune mie opinioni già manifestate in precedenza, sulla convenienza per le diagnosi di certe malattie, di spingere più innanzi, di ciò che fecesi sino ad ora, le investigazioni sull' umore urinoso (1).

ORINA DEL PRIMO GIORNO

Primo esame dell' orina.

Era del colore consueto delle urine un po' cariche. Non esalava odore sensibile e speciale. Scaldandola s' intorbidava, ma ben poco. Possedeva reazione acida. Versatane una porzione in tubo d' assaggio e sospesovi al disopra una striscia di carta imbevuta di nitrato d' argento la imbruniva a termine di circa mezz' ora.

La quantità totale si ragguagliava a 240 c. c., 30 de' quali li adoperai per le accennate operazioni preliminari. Non volendole dar tempo a che incominciasse ad alterarsi, procedetti tosto ad operare nel modo che verrò esponendo.

Trattamento dell' urina con idrato di bario ed alcole.

Aggiunto all' urina tanto di idrato di bario in forma di latte chiaro da averne una reazione alcalina permanente, sentii dapprima se svolgevasi odore ammoniacale: esso fu leggerissimo. Vi sopraversai tanto di alcole assoluto finchè non apparisse più precipitato (2 $\frac{1}{2}$ volumi), lasciai in quiete ed introdussi nel collo del recipiente una lista di carta con acetato di piombo, ed altra di carta intrisa nel nitrato d' argento, sottoponendovi una cassulina, acciò, se dalla carta col tempo cadesse qualche goccia di liquido, questo non avesse a mischiarsi coll' alcole sottoposto. Nel mattino seguente la carta di piombo non aveva mutato, mentre quella di argento era imbrunita, ma poco. Presa la seconda, distrutta con acqua regia, ripreso con acido nitrico il residuo, diluito con un poco d' acqua l' acido e decantato dal cloruro d' argento, lo rievaporai e ritrattai con acido nitrico a caldo fino a

(1) L' uomo che tentò di suicidersi col fosforo, è certo M. V. di anni 31, trattovi da forti patemi d' animo. Tranguggiò verso le ore 7 della sera del 2 Marzo un bicchiere di acqua con aceto, in cui aveva macerato l' equivalente di quattro scatole di fiammiferi da un soldo ciascuna. Verso le undici cominciò a soffrire grave agitazione; verso la mezzanotte dolori all' epigastrio ed all' addome; due ore dopo comparve il vomito che divenne frequentissimo sino alle ore 6 del mattino; nella sera del 3 fu portato all' ospedale; nel giorno seguente gli fu propinato un purgante ed una bibita magnesiaca; nel 5 si cominciò ad amministrargli l' essenza di trementina. La prima urina fu raccolta nella notte dal 4 al 5; le altre due dal 5 al 6 e dal 6 al 7. Il 24 era in via di guarigione. (Notizie fornitemi dall' egregio Sig. Dott. Romlot, medico assistente alla Sezione diretta dal lodato Prof. Brugnoli.)

distruzione di qualsivoglia materia organica. Col reattivo molibdico non potei ottenere un contrassegno apprezzabile di acido fosforico.

Il liquido alcolico fu feltrato per separarlo dal precipitato baritico deposto sul fondo del pallone. Lavai più volte con alcole il detto precipitato sul feltro per indi sottoporlo alla prova che sto per dire.

Ricerca se il precipitato contenesse acidi minori del fosforo.

Presi zinco ed acido solforico diluito, ambedue di nota purezza, e introdotti in una boccia di Woulf, diedi tempo che incominciasse la reazione. Il gas si lavava in un poco di acqua, indi passava a gorgogliare in una soluzione di nitrato d' argento. Versatovi il precipitato baritico stemperato in acqua, si formò tosto molta spuma, per cui occorre che si abbia una boccia molto ampia e che la reazione proceda con lentezza. Essa continuò per due giorni; nel nitrato d' argento si formarono scarsamente dei fiocchi neri.

Aggiunto acido cloridrico al nitrato d' argento e scaldato alquanto finchè scomparissero i fiocchi neri, decantai il liquido quando fu limpido, lo evaporai dopo di avervi fatto cadere due o tre cristallini di cloruro di sodio, ridussi a secco e ridisciolsi il poco residuo nell' acido nitrico. Il *reattivo molibdico* v' indusse il noto precipitato cedrino che dà coll' acido fosforico.

Da ciò emerge che colla barite si era deposta una materia fosforata capace di cedere fosforo all' idrogeno nascente; materia cioè paragonabile agli acidi minori del fosforo.

Siccome la reazione col molibdato fu tenue, si vede che la proporzione del fosforo convertitosi negli acidi minori era stata scarsa.

Distillazione della soluzione alcoolica.

Il liquido alcoolico possedeva leggera reazione alcalina; fu versato dentro storta, congiunta con pallone, nel cui tubolo era innestato un cannello che pescava in un bicchiere contenente soluzione di nitrato d' argento. La distillazione fu condotta con corrente di acido carbonico.

Nel nitrato d' argento si formarono dei fiocchi neri in quantità piuttosto piccola. Cercai se la loro formazione proveniva o da gas fosforato o da acido solfidrico, epperciò vi aggiunsi tanto di acido cloridrico da precipitare tutto l' argento, scaldai quasi fino a secco acciò il cloruro d' argento si raggrumasse, indi lo ripresi con acido nitrico alquanto allungato ed a caldo per due volte, decantando i liquidi limpidi. A questo aggiunsi qualche granello di cloruro sodio, (1) evaporai a secco,

(1) Il cloruro di sodio è indispensabile, dacchè impedisce all' acido fosforico di disperdersi volatilizzando, allorchè si deve calcinare per la distruzione finale del residuo carbonoso; l' acido fosforico rimane fisso in istato di fosfato di sodio.

ridisciolsi il residuo in acido nitrico in cui versai del reattivo molibdico. Si produsse la reazione dell' acido fosforico, onde fu evidente che il vapore od il gas trasportato dall' acido carbonico durante la distillazione conteneva o *fosforo* o *idrogeno fosforato* od un composto volatile di fosforo capace di ridurre il sale di argento.

La distillazione dell' alcole fu continuata in bagno-maria fino a che quasi tutta la parte alcoolica fosse trasportata nel pallone. L' alcole raccolto nel pallone era perfettamente scolorito, possedeva reazione leggermente alcalina, mentre la parte acquosa rimasta nella storta era divenuta alquanto acida.

Lo sperimentai colle soluzioni alcooliche di nitrato d' argento e di biioduro di mercurio: in quella di nitrato d' argento non produsse il più che leggero imbrunimento, come neppure produsse ingiallimento col biioduro, tranne che in questo, trascorso un po' di tempo, si manifestò un intorbidamento giallo cedrino, che andò crescendo col tempo. La mancanza di reazione col nitrato d' argento escluse il sussistere del fosforo o libero o in istato d' idrogeno fosforato, poichè da quanto pubblicai in una mia *Memoria* nel 1872 (1) basta una soluzione alcoolica di fosforo ad $^{1}/_{1000}$ di milligrammo, poichè il nitrato d' argento s' imbrunisca alquanto nell' istante, deponendo poi a capo di molte ore un precipitato sensibile, mentre col biioduro di mercurio, nella detta minima proporzione, si produce un debole ingiallimento, a termine di 10 a 15 minuti, senza che il liquido s' intorbidi.

Tolto il sospetto o di fosforo libero o di idrogeno fosforato, era pure da cercare, non solo se l' alcole contenesse il fosforo in uno stato diverso dalle due condizioni indicate, ma ben anche se vi si riscontrasse qualche altra sostanza degna di considerazione.

Ridistillazione dell' alcole dopo averlo inacidito.

L' alcole distillato era alcalino come dissi; vi aggiunsi dell' acido solforico diluito con alcole, fino a reazione acida, e lo ridistillai in corrente di acido carbonico, finchè tutta la parte alcoolica fosse passata nel collettore. Feci la distillazione in bagno-maria.

Il liquido acquoso rimasto nella storta appariva torbidiccio appena e scolorito: misurava circa 30 c. c. ed era fortemente acido. Ne separai una sesta parte, che ossidai con acido nitrico, aggiungendovi due o tre piccoli cristallini di cloruro di sodio. Distrutta la materia carbonosa, insistendo coll' acido nitrico e la calcinazione, il po' di residuo che ne rimase fu sciolto nell' acido nitrico, indi trattato col reattivo molibdico. Ingiallì e diede il solito sedimento cedrino che si ha coll' acido fosforico.

Dunque la sostanza trattenuta dall' acido solforico e rimasta nella parte acquosa conteneva del fosforo.

(1) Tomo II della Serie III delle Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.

Gli altri cinque sesti del liquido medesimo furono saturati con acqua di barite limpida, fino ad alcalinità manifesta. Lo dibattei con etere, che trattai in appresso con acqua lievemente inacidita dall' acido cloridrico. Dall' evaporazione ne risultò un residuo torbidiccio, che precipitava coll' *acido iodidrico iodurato*, col *tannino* e col *tetracloruro* di *platino ;* coll' ultimo de' quali produsse cristallini ottaedrici di un giallo pallido somiglianti a quelli del cloroplatinato di ammonio.

Dubitando che vi fosse dell' ammoniaca feci la prova col reattivo di Nessler, il quale precipitò copiosamente.

Dunque l' ammoniaca vi sussisteva indubbiamente, mentre vi sussisteva pure un' altra base, come si desume dalla precipitazione col *tannino* e coll' *acido iodidrico iodurato.* Messo ad evaporazione spontanea il rimanente del cloridrato, questo cristallizzò nella forma dendritica del sale ammoniaco. Fu indi trattato coll' acido nitrico e un po' di cloruro di sodio nella maniera indicata, ma non si palesò la più che menoma traccia di fosforo.

Da ciò appariva che la materia fosforata non era stata tolta dall' etere, onde la convenienza di cercarla nel liquido su cui aveva fatto l' esaurimento etereo. Siccome possedeva reazione alcalina, volli accertarmi se conteneva barite : non ve ne riscontrai neppure una traccia. Forse quel po' di barite eccedente, che aveva aggiunto fino ad alcalinità, quando precipitai l' acido solforico, erasi separato pel contatto dell' aria in istato di carbonato.

Feltrai, presi la quinta parte dal feltrato e la trattai con acido nitrico e un cristallino di sale comune.

Quando l' acido nitrico fu tutto dissipato, rimase molta materia carbonosa di ossidazione difficile, che distrussi insistendo coll' acido nitrico e poi calcinando in ultimo. Ridisciolto il residuo nell' acido nitrico, ne ottenni la reazione del fosforo.

Gli altri $^4/_5$ furono neutralizzati con acido cloridrico, indi la soluzione neutra fu posta sotto campana con idrato di sodio. In due giorni si ridusse a secco, lasciando una materia salina bianca in ampie lamine a punta, che convergevano al centro e che trattate con alcole assoluto fornirono un sale che si sciolse, e fu la quantità minore, ed un sale che rimase indisciolto. Feltrato l' alcole ne versai due centimetri cubi in vetro da orologio, che misi a blandissima temperatura, cioè di circa 30,° fino a che il liquido fosse ridotto a metà volume, indi lo lasciai ad evaporazione spontanea, e in ultimo lo collocai sotto la campana con idrato di sodio.

Ne cristallizzò un bel sale bianco in lunghi aghetti trasparenti, che sciolti in qualche goccia d' acqua, si comportarono come segue.

Precipitazione immediata e bianca coll' *acido tannico.*

Precipitazione immediata in rosso di chermes coll' *acido iodidrico iodurato :* il precipitato non cristallizzò.

Nessuna precipitazione immediata coi *cloruri* di *platino, d' oro* e di *mercurio,* coll' *ioduro* di *bismuto* e *potassio* e coll' *acido picrico ;* trascorso un certo tempo, dal cloruro di platino si deposero pochi ottaedri di un giallo pallido, forse per

traccie di cloruro d' ammonio. Si formò anche intorbidamento dal bicloruro di mercurio.

L' altra porzione (era la maggiore), evaporata a 40,° lasciò un sale bianco circondato da un' aureola gialliccia, e mi fece dubitare di decomposizione avvenuta: difatto il residuo non si ridisciolse compiutamente nell' alcole.

Evaporata la nuova soluzione alcoolica e ripreso il residuo con acqua, il comportamento coi reattivi fu diverso da quanto descrissi di sopra.

S' intorbidò senza formare precipitato intenso coll' *acido tannico.*

Precipitò coll' *acido iodidrico iodurato,* meno copiosamente del sale antecedente.

Precipitò subito e in abbondanza in giallo pallido col *cloruro di platino.*

Non s' intorbidò nè precipitò cogli altri reattivi accennati.

Era adunque avvenuta una decomposizione evaporando a caldo, con formazione manifesta di sale ammoniaco.

Tutto ciò che rimase lo adoperai per la ricerca del fosforo, onde lo trattai con acido nitrico ed un poco di cloruro di sodio. Riducendo a secco, rimase un residuo carbonoso di combustione difficile, che distrussi al solito coll' acido nitrico e il calore, per esaminare il residuo col reattivo molibdico che diede la reazione del fosforo.

La parte salina che non era stata sciolta dall' alcole non precipitava col *tannino,* nè coll' *acido iodidrico iodurato;* precipitava invece col *cloruro di platino* e col *reattivo* di *Nessler.* Fatta l' indagine se conteneva del fosforo ve ne riscontrai qualche indizio appena.

Liquido urinoso che rimase nella storta quando fu distillato l' alcole con cui si precipitò l' urina.

Era di un giallo oscuro e possedeva reazione acida. Alcalizzato colla barita e dibattuto col cloroformio, questo ne acquistò reazione alcalina piuttosto gagliarda, oltre a che appariva lievissimamente opalino.

Dubitai di traccie d' idrato di bario, che avesse attraversato il feltro; ma cercatavi la barita, mi accertai che non ne conteneva punto.

Distillai il cloroformio, che lasciò un residuo giallo bruno, di cui la parte minore si disciolse quasi scolorita nell' acqua, mentre la parte maggiore si sciolse nell' alcool e si comportò come una resina.

La soluzione acquosa possedeva sapore amaro; non diede reazione alcalina apprezzabile colla carta arrossata.

Precipitò col *tannino* e coll' *acido iodidrico iodurato,* senza produrre cristalli col secondo.

Non precipitò col *cloruro* di *platino.*

S' intorbidò col *cloruro d' oro* che in breve ridusse a metallo e s' intorbidò pure col *bicloruro di mercurio.*

La piccolissima quantità di sostanza impedì che facessi indagini più circostanziate (1).

Il cloroformio distillato possedeva reazione alcalina. Lo dibattei con acqua inacidita alquanto dall' acido cloridrico fino a togliergli l' acidità, la posi ad evaporare a blanda temperatura, e notai che ad un certo punto di concentrazione svolse odore di *conina*. Posi il vetro d' orologio sotto campana con idrato di sodio; nel susseguente mattino il residuo era secco, bianco e cristallizzato; la materia, nell' atto in cui fu tolta dalla campana, esalava pur anco un lieve odore di conina, che poi si dileguò stando all' aria.

I cristalli avevano forma prismatica; li feci disegnare sotto il microscopio, e sono rappresentati dalla Fig. A.

Ridisciolto questo cloridrato in acqua, ne sperimentai un poco con un alcali, il quale ne sprigionò un tenuissimo odore di trimetilammina che tosto svanì, ed a cui non successe altro odore.

La soluzione medesima, diede coi reattivi i seguenti contrassegni.

Coll' *acido tannico* s' intorbidò a mala pena, e l' intorbidamento crebbe alquanto a poco a poco.

Coll' *acido iodidrico iodurato* fornì un precipitato giallo rosso che indi cristallizzò in laminette brune.

Col *tetracloruro di platino* produsse a poco a poco un sedimento cristallino della forma e colore del cloroplatinato d' ammonio, con qualche altro cristallo più grosso e di giallo più vivo, quale appunto suol essere il *cloroplatinato* di *trimetilammina*.

S' intorbidò col *cloruro d' oro* senza successiva riduzione; non s' intorbidò col *bicloruro* di *mercurio*.

Precipitò in giallo chiaro coll' *ioduro* di *bismuto* e *potassio*.

Non precipitò col *fosfomolibdato*, se non che la goccia nel concentrarsi divenne opaca e lasciò un residuo bianco non ridissolubile nell' acqua.

Non diede nè precipitato nè intorbidamento col *nitrato di palladio*.

Premendomi di accertarmi se l' alcaloido in discorso contenesse dal fosforo, ne ossidai la maggior parte con acido nitrico; la reazione fu nulla.

In ultimo, il liquido acquoso ch' era stato esaurito col cloroformio, venne da me sottoposto all' azione dello zinco coll' acido solforico; il gas gorgogliando nel nitrato d' argento, produsse un precipitato nero copioso.

Fatta la ricerca del fosforo del nitrato insieme col precipitato, non se ne palesò neppure una traccia.

(1) Nell' esame di altra urina, non fosforata, ma albuminosa, ebbi col mezzo della barite e del cloroformio una sostanza somigliantissima per le proprietà a quella ora descritta.

ORINE DEI DUE GIORNI SUCCESSIVI

Nei due giorni succeduti a quello in cui mi fu recato la prima urina, il collega Prof. Brugnoli mi spedì per ogni volta una boccetta dell' urina emessa dall' ammalata, e ciascuna della capacità di 150 c. c.

L' urina del secondo giorno (chiamando primo l' antecedente) era alquanto più colorata, esalava un lieve odore aromatico, manifestava reazione acida.

Tenutavi sospesa al di sopra una cartolina imbevuta di nitrato d' argento, non produsse in sedici ore riduzione in bruno tranne un grigio, apprezzabile a mala pena.

Scaldandola s' intorbidò; stillatavi qualche goccia di acido nitrico, l' intorbidamento si rese maggiore e il colore si offuscò.

Nell' atto stesso si svolse un odore evidentissimo di ragia, a cagione della cura coll' essenza di trementina, già in corso.

Si deposero fiocchi bianchi, con qualche particella bruna, e il precipitato occupava all' incirca un terzo del volume totale.

Fu adunque certo il sussistere dell' albumina, in quantità se non ragguardevole, per lo meno discreta.

L' urina del terzo giorno appariva di colore assai più cupo di quella del secondo, di odore un po' aromatico e di reazione acida.

Scaldandola s' intorbidò leggerissimamente; aggiuntovi acido nitrico, svolse odore come di mirra, divenne nera come inchiostro e depose col tempo un precipitato polveroso nero, scarso, forse meno di $^1/_{10}$ del volume totale del liquido.

Per le ricerche chimiche non credetti opportuno di operare separatamente sulle due urine, perchè la quantità parvemi piuttosto scarsa all' uopo, e perchè dubitava che i composti fosforati vi si trovassero in proporzione assai minore che nella prima urina, tanto pel quantitativo di essi già eliminato, quanto per l' andamento diverso nello stato patologico dell' infermo, prodotto dalla cura. Le mescolai adunque insieme e condussi le operazioni in modo uguale a ciò, che feci per l' urina precedente.

Saturate con idrato di bario, le precipitai con alcole. Il precipitato baritico, lavato con alcole e sottoposto all' idrogene nascente nel solito apparecchio, produsse fiocchi neri nella soluzione di nitrato d' argento ed in cui riscontrai il fosforo.

Il liquido alcalino da cui era stato tolto il precipitato fu messo a distillare fino a che tutto l' alcole fosse passato. Anche questa volta il distillato possedeva leggera reazione alcalina, e la parte acquosa rimasta nella storta era divenuta acida. Resi l' alcole leggermente acido con acido cloridrico, dandogli la preferenza al di sopra del solforico, perchè concentrandosi riesce meno gagliardo, e perchè nel caso di dovere evaporare il liquido, l' eccedente può essere sottratto ponendo

la materia sotto campana con un alcali caustico. Ridistillai in corrente di acido carbonico, facendo gorgogliare il gas, uscente dal cannello inserto nel tubulo del pallone, in una soluzione di nitrato d' argento. La distillazione fu protratta fino a che quasi tutto l' alcole fosse ricuperato.

Esaminato se la soluzione argentica e i fiocchi bruni che vi si erano formati, contenessero del fosforo, ve ne trovai effettivamente.

Questa volta volli anche cercare se nell' alcole ridistillato vi sussistesse qualche composto fosforato. Presa la metà dell' alcole vi gorgogliai del gas cloro in luogo non molto illuminato, fino a che il liquido fosse ingiallito, indi cessai dal cloro, lasciai che scomparisse l' ingiallimento, e poi evaporai in bagno maria, vi aggiunsi due o tre granellini di cloruro di sodio, ed ossidai il residuo con acido nitrico. Ivi pure riscontrai il fosforo.

La parte acquosa ed acida rimasta nella storta era un po' opalescente ed esalava odore aromatico. L' evaporai a blanda temperatura, con che rimase una materia salina bianca, circondata da un cerchio giallo bruniccio di una sostanza che non si ridisciolse nell' acqua.

La materia salina svolgeva forte odore di ammoniaca, misto con odore di pesce fracido. La posi a seccare del tutto sotto campana con idrato di sodio in pezzetti, affine di sottrarne l' umidità e l' acido cloridrico eccedente, indi la macinai con alcole quasi assoluto, con che rimase indisciolto del sale ammoniaco. Versando $^1/_3$ di etere nel liquido alcoolico feltrato, si depose non altro che sale ammoniaco, cui però era commista un' altra base volatile, dacchè sperimentandolo con un alcali caustico, svolse coll' odore ammoniacale anche quello di pesce fracido.

Il liquido alcoolico-etereo rimase colorito alquanto di gialliccio. Messo ad evaporare a blanda temperatura, lasciò una materia salina bianca, solubile per intero nell' acqua, meno le pellicelle della materia colorante che vi erano insolubili.

La soluzione acquosa concentratissima, esplorata con un alcali caustico, svolgeva un po' di odore di ammoniaca accompagnato fortemente dall' altro di pesce fracido; coi reattivi si comportava come segue:

Coll' *acido tannico* diede intorbidamento che andò aumentando senza produrre precipitato.

Col *cloruro di platino* si comportò come una soluzione diluitissima di sale ammoniaco.

S' intorbidò col *cloruro d' oro* e depose fiocchetti amorfi di un giallo pallido a cui successe riduzione di oro metallico:

S' intorbidò col *bicloruro di mercurio* e coll' *ioduro* di *potassio* e *bismuto*.

Coll' *acido iodidrico iodurato*, sciogliendo in una gocciola del medesimo un poco della sostanza solida, apparve un precipitato bruno che esaminato col microscopio, si vedeva composto di laminette sottili, brune, trasparenti, unite a due o a tre, pel lato più lungo, od anche in gruppi stellari (fig. B.) Dopo un' ora e mezzo i piccoli cristalli erano scomparsi, loro succedendone altri in lamine isolate romboidali di

grandezza assai maggiore, che dopo mezz' ora scomparvero pure convertendosi in gruppi di lamine a foglie di felce, le quali si vennero in appresso disfacendo.

I caratteri indicati non appartengono nè alle *metilammine*, nè alla *propilammina*, come si ha dalla reazione coll' *acido tannico*, col *cloruro d' oro* e coll' *ioduro* di *bismuto e potassio* (1).

Volli indagare se mai si trattasse di una base fosforata volatile, ed a quest' effetto, ossidai coll' acido nitrico e un po' di cloruro di sodio una parte del prodotto, e ne ottenni un precipitato, relativamente copioso, giallo cedrino, col reattivo molibdico.

Per sovrabbondanza di ricerche, esplorai anche se il sale ammoniaco, che aveva separato coll' alcole concentratissimo, contenesse del fosforo; non ve ne riscontrai il più che menomo indizio.

La parte acquosa, rimasta nella storta, dalla prima distillazione dell' alcole, con cui furono trattate la 2.ª e 3.ª urina, fu dibattuta col cloroformio, dopo di averla alcalizzata coll' idrato di bario.

Separato il cloroformio, ne estrassi, con qualche centm. cubo di acqua e due o tre goccie di acido cloridrico, quel tanto di sostanze basiche che vi si fossero disciolte. Messa ad evaporare spontaneamente una parte dell' acqua cloridrica, ne rimase un composto salino scolorito e cristallizzato, il quale coi reattivi si comportò come sto per dire:

Coll' *acido tannico* precipitò immediatamente in bianco.

Coll' *acido iodidrico iodurato* fornì un precipitato rosso di chermes, il quale osservato col microscopio, appariva in goccioline brune; dopo due ore vidi che parecchie delle goccioline tendevano ad assumere forma cristallina, in tavole romboidali. Nel giorno seguente alle gocciole erano sottentrati dei cristalli, di un giallo più o meno bruniccio, come quelli della Fig. C.

In talune delle gocciole si vedevano spuntare i cristalli, in via di genesi incipiente.

Col *cloruro* di *platino* nulla in sul principio; scorso un certo tempo si deposero alcuni ottaedri di *cloroplatinato di ammonio*, a cui successero altri cristalli assai più ampi a forma di arnioni, di un giallo d' oro intenso, accompagnati da alcune lamine, quasi scolorite, lunghe e terminate a punta.

Col *cloruro d' oro* avvenne un leggero intorbidamento nell' istante, che poi crebbe e si fece intenso.

Nel giorno appresso una parte dell' oro era ridotta, riduzione fattasi maggiore nel dì susseguente, rimanendo tuttavia parziale.

Col *cloruro* di *mercurio*, nulla nell' istante; un tenuissimo intorbidamento dopo un' ora circa, che non aumentò col tempo.

Coll' *ioduro* di *bismuto* e *potassio*, precipitato immediato di un giallo chiaro, che si andò colorando di più fino al rosso del minio.

(1) *Del modo di riconoscere la metilammina e la trimetilammina e distinguerle dalla propilammina* — Tom. VI, Serie III, delle Memorie dell' Accademia delle Scienze in Bologna 1875.

Col *fosfomolibdato*, un precipitato immediato bianco.

Il cloridrato per evaporazione spontanea, e tenuto in ultimo su piano tiepidissimo, cristallizzò con forme speciali, come sono indicate dalla Fig. D. Era alquanto deliquescente, tanto che per copiarne le forme col microscopio dovetti rimetterlo sul piano tiepido acciò si ricomponessero come in precedenza.

Presane una parte la evaporai con acido nitrico fino a secco. Non si produssero coloramenti, tranne un gialliccio percettibile appena. Ripreso il residuo con acido nitrico e qualche granellino di cloruro di sodio, e rievaporando n' ebbi un residuo di un carbone un po' rossiccio, che in breve scomparve per calcinazione. Sciolto in un poco di acido nitrico ciò che rimase, e provando col reattivo molibdico, si formò un precipitato copioso giallo cedrino piucchè in qualsivoglia altra operazione antecedente. Trattavasi adunque di una base fosforata.

Non sarà inutile rammentare che quelle ricavate dalla prima urina col mezzo del cloroformio, non contenevano del fosforo.

RIASSUNTO DEI RISULTATI OTTENUTI.

Dal complesso di quanto esposi, si raccoglie:

Per la prima orina, cioè per quella emunta più prossimamente all' ingestione del fosforo;

1.° Che svolse un gas o vapore, capace d' imbrunire la carta di nitrato d' argento, non quella di acetato di piombo;

2.° Che conteneva una proporzione scarsa di albumina.

3.° Che conteneva uno degli acidi minori del fosforo, od almeno un composto precipitabile dalla barite in liquido alcoolico, atto coll' idrogeno nascente a fornire idrogeno fosforato.

4.° Che fornì un prodotto volatilissimo fosforato, ammoniaca ed oltre a ciò due basi volatili, una delle quali era fosforata; sostanze che passarono coll' alcole, quando fu distillato il liquido alcoolico, con cui essa era stata trattata.

5.° Che fornì pure due altre basi organiche, una fissa e l' altra volatile, estraibili col mezzo del cloroformio dal residuo acquoso ed acido, quale rimase ridistillando l' alcole.

6.° Che insieme con questa base volatile somministrò un prodotto in quantità tenuissima, avente l' odore della *conina*, nonchè un poco di *trimetilammina*: la mentovata base volatile non era fosforata.

Per l'orina seconda, cioè dopo la cura in corso coll' essenza di trementina;

1.° Che non isvolse gas o vapore, valevole ad imbrunire la carta di argento.
2.° Che conteneva albumina in proporzione discreta oltre ai prodotti di trasformazione dell' essenza di trementina.

Per l' orina terza;

1.° Che a somiglianza della seconda non esalava gas o vapore d' onde la carta di argento fosse imbrunita.
2.° Che conteneva traccie soltanto di albumina, mentre vi abbondavano i pigmenti biliari ed il prodotto di trasformazione dell' essenza di trementina.

Per le orine seconda e terza insieme;

1.° Che colla barite e l' alcole diedero un precipitato, da cui coll' idrogeno nascente si svolse idrogeno fosforato.
2.° Che nella distillazione dell' alcole fornirono ammoniaca in proporzione piuttosto abbondante, una base volatile e fosforata, ed un altro prodotto pure volatile e fosforato.
3.° Che mediante il cloroformio somministrarono una base speciale molto fosforata, diversa da quelle ottenute in modo simile dalla prima orina.

CONSIDERAZIONI SULLE COSE ESPOSTE

In ordine tossicologico rimane adunque riconfermato, che nell' avvelenamento del fosforo, per verificarlo, l' esame delle orine fornisce dati preziosi, ed anzi diventa il solo mezzo con cui determinare (posto che l' infermo sia salvato dalla cura) se realmente la malattia provenga o no dall' avere inghiottito di quel metalloide o non da altra cagione.

Rimane provato che l' essenza di trementina è di fatto un antidoto efficace, per cui cadono le incertezze che si avevano in proposito. E per verità le indagini istituite posero in chiaro che, dopo la somministazione ripetuta dell' essenza, l' orina cessò di essere albuminosa e mutarono certi prodotti consecutivi; il che può significare che era venuto cessando il guasto prodotto dal fosforo nel plasma sanguigno o nei tessuti.

Dai prodotti riscontrati è pure manifesto, che una parte del fosforo ossidandosi, oltre ad ingenerare una copia maggiore di fosfati (cosa osservata da altri) si con-

verte ben anco in qualcuno degli acidi minori ; mentre altra parte aggredisce gli albuminoidi od altri principii immediati animali, e dà nascimento a composti fosforati.

Nel periodo maggiore dell' azione, quando cioè non sopravvenne il soccorso dell' antidoto o questo incominciò appena ad influire, devesi notare che fra i prodotti volatili e basici, uno possedeva l' odore della conina, quale appunto fu avvertito tra i prodotti della putrefazione cadaverica e della decomposizione a bassa temperatura dell' albumina.

Seguitando la cura, se l' albumina scompare in breve, non succede egualmente dei prodotti della decomposizione che può essere avvenutane, tranne che appariscono diversi parzialmente da quelli che risultarono prima che fosse somministrata l' essenza, la cui azione non può ben dirsi in che consista, occorrendovi studi più profondi. Forse i composti basici successivi, che sono tutti fosforati, e più che non quelli precedenti alla cura, si erano immagazzinati in qualche viscere, fegato od altro, onde vanno via via eliminandosi.

L' aumento dell' ammoniaca e la scomparsa dell' albumina farebbe supporre che il fosforo, influito dall' essenza, intervenisse in maniera meno pericolosa a decomporre gli albuminoidi od altri principii ; più probabilmente gli albuminoidi, da quanto si può congetturare.

Le ricerche sull' orina mentre giovano al Tossicologo, possono anche arrecare qualche lume per la diagnosi, allorquando il medico si trova a fronte di una di quelle itterizie gravi, che pei sintomi e per le lesioni degli organi si confondono cogli effetti patologici dell' avvelenamento del fosforo.

In tali circostanze converrà per la sicurezza maggiore dei risultati, che si proceda sollecitamente alle ricerche analitiche, non appena la malattia si manifesta, e, se fosse possibile, nel periodo preparatorio della medesima.

Qualora poi si volesse instituire uno studio metodico delle orine di animali avvelenati col fosforo, per estrarne integralmente, per quanto fattibile, i prodotti basici derivanti dalla scomposizione degli albuminoidi, potrebbesi tentare di operare alquanto differentemente dal modo indicato ad iscopo tossicologico, ad evitare cioè l' influenza del calore, perchè manifestamente altera i detti prodotti. Converrebbe alcalizzare l' urina colla barite, esaurirla coll' etere e poscia col cloroformio, e in ultimo coll' alcole assoluto, sottraendo dai due primi solventi con un poco di acqua inacidita gli alcaloidi che vi fossero disciolti ed evaporare la soluzione acquosa ed acida fino a secco e sotto campana con acido solforico e idrato di potassio.

Rispetto all' alcole si dovrebbe distillare conforme all' andamento già descritto in addietro.

Infine dovrebbesi ossidare col cloro l' etere ed il cloroformio (già esaurito coll' acqua acida) e l' alcole dopo che gli fossero state tolte le basi volatili colla ridistillazione, per accertarsi che nell' uno e nell' altro non fosse rimasto qualche composto fosforato neutro.

Comunque sia, stando pur anche tra i limiti dei risultati ottenuti per le indagini tossicologiche, l' azione aggrediente del fosforo sugli albuminoidi o qualche altro principio mi sembra evidente, tanto più essendo noto che le urine degli avvelenati con questo metalloide, sogliono racchiudere *leucina* e *tirosina:* avvertasi tuttavia che tale suggerimento è teorico, e che molte volte in pratica l' esperienza risponde diversamente da quanto si era immaginato.

In breve: dai prodotti conseguiti emerge un' azione analoga fino ad un certo punto a quella dei fermenti putrefattivi, e conforta l' opinione da me espressa in una lettera ad Armando Robin, ed in due Communicazioni fatte a questa Accademia nello scorso Decembre, che cioè nelle malattie provocate da organismi o da altri agenti fermentativi, gli albuminoidi possono soggiacere a decomposizione più o meno profonda, d' onde l' apparire di alcaloidi fissi e volatili, (da doversi poi ricercare nelle urine) e capaci, secondo che innocui o venefici, di provocare o no effetti più o meno gravi, fino ad un esito letale.

Laonde torno ad insistere presso i clinici, che per le diagnosi di certe malattie, quando principalmente le urine sono albuminose, e quando si ha sospetto di un principio infettivo nel sangue, procurino di indagare se l' umore urinoso contenga principii basici, non che organismi, studiando con maggiore diligenza, di quanto si fece fino ad ora, i caratteri dell' albumina emunta per la via delle reni, affine di scoprirne i contrassegni differenziali, essendo che, come mi potei accertare, l' albumina può essere alterata grandemente, putrefatta fino ad un dato punto, con perdite notevoli di composti solforati e fosforati, colla genesi di parecchie sostanze acide, basiche e neutre, senza che perciò perda in parte la sua coagulabilità.

Nel chiudere questa mia Memoria rendo grazie al mio Assistente Sig. Cesare Stroppa per l' aiuto intelligente che mi prestò nelle ricerche.

ESAME

DELL' URINA DI UN ITTERICO GRAVE

IN CORRELAZIONE COLL' ESAME

DI

UN URINA FOSFORATA

NOTA

DEL PROF. FRANCESCO SELMI

Una malattia che spesso conduce ad esito letale è l' *itterizia grave maligna*, detta anche *tifoide* od *emorragica*, di cui già si occuparono parecchi medici di grande vaglia e di cui diede descrizioni esatte, tra i miei colleghi, il Prof. Giovanni Brugnoli (1) nell' occasione che gli si offrì un qualche caso della medesima. Essa per le condizioni patologiche somiglia tanto agli effetti prodotti dall' avvelenamento del fosforo, che in certe circostanze torna impossibile di determinare le differenze per via della diagnosi. Stando alle osservazioni di Wandierlih si riscontra un' identità assoluta tanto pei sintomi quanto per le lesioni. Ossikoddsky a conclusione di una sua dissertazione sull' argomento, ne disse, che non si può stabilire una differenza sufficiente tra le due malattie; non si può dedurre dal volume del fegato, poichè l' esser maggiore o minore proviene dal tempo in cui dura l' infermità, e se la morte succede in breve, l' atrofia non si palesa; e neppure si può desumere dal riscontrarsi della leucina e della tirosina nelle urine, essendochè vi si trovano sì per l' una che per l' altra malattia.

Avvertii nella *Memoria* precedente che le indagini sull' urina possono valere come un mezzo sicuro d' onde accertarsi, nei casi dubbi, se la malattia sia sorta naturalmente o sia stata provocata dall' ingestione di cibi o bevande contenenti

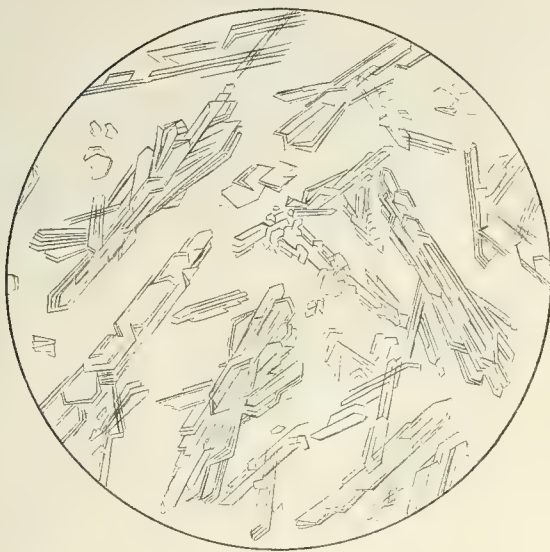
(1) *Storia di due casi di Atrofia gialla del Fegato, operati nell' Ospedale Maggiore di Bologna dal Prof. Cav. Giovanni Brugnoli,* — Bologna, 1864, Tipi Gamberini e Parmeggiani.

del fosforo in natura; e di fatti, qualora operando nel modo da me indicato, si ottengano i prodotti fosforati che descrissi, non può rimanere più incerto il giudizio. Tuttavolta, a maggiore conferma dell' asserto, mi premeva non poco di esaminare l' urina di un itterico grave, non essendo concesso, a mio avviso, di escludere in modo assoluto la possibilità di ricavarne qualche sostanza fosforata eterogenea alle urine normali, dacchè negli studi che sto facendo sulle alterazioni dell' albumina, vidi come, oltre a prodotti solforati, se ne svolgono anche de' volatili, nei quali il fosforo è contenuto. Ciò essendo, se nell' itterizie gravi succede una decomposizione profonda degli albuminoidi del sangue, non potrebbe accadere, che per conseguenza si formassero composti anormali con fosforo, i quali eliminati per le reni, trapassassero nell' urina, e porgessero contrassegno di sè nelle ricerche che si andrebbero instituendo? Per quanto paresse remoto il sospetto, era tuttavolta da dissipare in servigio principalmente della tossicologia, affine di non lasciare appiglio alla difesa, da ricavarne conseguenze opposte a quelle del perito.

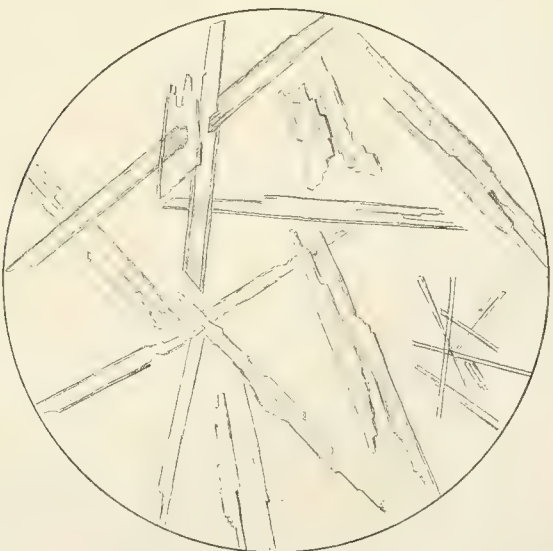
Fu buona ventura, che il lodato Prof. Brugnoli mi offrisse il destro di appagare quel mio voto, (e le ne rendo le debite grazie) mandandomi una quantità abbastanza cospicua dell' urina desiderata. Misuratala, la trovai corrispondere ad un litro; era di un bel giallo dorato; possedeva reazione acida; vi mancava l' albumina.

La trattai coll' idrato di barite e l' alcole assoluto; separai il precipitato, e volsi la mia attenzione al liquido urinoso-alcolico. Lo distillai in corrente di acido carbonico, che in ultimo feci gorgogliare in soluzione di nitrato d' argento. Durante la distillazione il sale argentico cominciò ad imbrunire e indi depose fiocchi neri, che potevano essere di solfuro o provenire da un composto fosforato. Operando nella maniera già descritta nella *Memoria*, verificai che di fosforo non vi era neppure una traccia.

L' alcole distillato era alcalino; alcalino risultò pur anco il liquido acquoso urinoso rimasto nella storta. Neutralizzai con acido cloridrico l' alcalinità dell'alcole e questo ridistillai: evaporata la parte acquosa e leggermente acida ottenuta dalla ridistillazione, mi assicurai che il residuo salino ricavatone constava di puro sale ammoniaco.

In appresso mi volsi ad indagare se il liquido acquoso-urinoso della prima distillazione fornisse qualche composto d'indole basica analogo a taluno di quelli che riscontrai nell' urina fosforata. Ne accrebbi l' alcalicità con acqua di barite, indi lo dibattei con cloroformio, il quale sciolse una certa quantità di materia colorante biliare, onde si colorò di giallognolo. Estrassi le basi con acqua lievemente inacidita dall' acido cloridrico, che si colorò pure, sebbene assai leggermente, di gialliccio. Affine di ottenere le basi purificate, alcalizzai il liquido, acquoso ed acido, con barite, e divisolo in due parti, una dibattei con cloroformio e l' altra con etere, che posi ad evaporare dopo stillatavi qualche goccia di acqua cloridrica. Ne risultarono due residui tenuissimi, ciascuno dei quali mostrò di

Figª A

Figª C

Figª D

Figª B

contenere una sostanza d' indole alcaloide, ma in proporzione sì esigua da non potersene fare uno studio alquanto particolareggiato, e da lasciare nel dubbio se fosse o propria dell' urina o derivante da qualche medicamento somministrato in precedenza. Su quel tanto che mi avanzò dall' osservazione coi reattivi generali degli alcaloidi, cercai se per caso racchiudesse del fosforo, e non ve ne riscontrai.

Con ciò si stabilisce che l' urina dall' itterizia grave e quella dell' avvelenamento col fosforo, differiscono in modo incontrovertibile da non potersi confondere neppure lontanamente, e questo in vantaggio del tossicologo e del clinico.

SULLA FALLACIA DEL REATTIVO

DI VAN-DEEN

PER DETERMINARE LE MACCHIE DI SANGUE

NOTA

del Prof. Francesco Selmi

Un dieci anni fa Van-Deen suggerì una nuova reazione per riconoscere se certe macchie dubbie sieno o no di sangue, avvertendo che colla stessa reazione si può svelare la materia sanguigna quand' anche sia stata lavata.

La reazione si eseguisce bagnando il tratto che si ha in sospetto con tintura di resina di guaiaco e poscia stillandovi sopra qualche goccia di essenza di trementina ozonizzata: se la macchia è di sangue, si svolge un azzurro più o meno manifesto.

Io non parlerei ora di questo argomento se non vi fossi stato indotto da una notizia pubblicata nella *Revue Medicale* N. 12, 1879, e che fu riprodotta da alcuni giornali italiani, notizia, nella quale il Dottore G. Ferry consiglia di valersi della reazione indicata per le macchie deboli nei tessuti di lana o di cotone tinti di azzurro, e per quelle sugli strumenti di ferro, specialmente allorchè si cercò lavando di detergerli.

Ferry consiglia di ritagliare un pezzetto di carta berzeliana in modo che abbia la larghezza della macchia, di sovrapporla, di bagnare la carta con una o due goccie di acqua stillata, e pigiarla per un minuto con un bastoncello di vetro, aggiungere un' altra goccia di acqua, staccare la carta dopo tre minuti circa, introdurla in tubetto di assaggio, versandovi poi tintura di guaiaco, ed in appresso l' essenza di trementina. Se la macchia era di sangue, egli dice, la carta sì tingerà di azzurro più o meno intenso, avvertendo che il coloramento può tardare di qualche poco. Per maggiore garanzia si ripete l' assaggio sopra un punto del medesimo tessuto ia cui non apparisca macchia di sorta.

La reazione del Van-Deen è fallace. Nel 1871, in occasione di una perizia giudiziaria affidatami dal Tribunale di Bologna, mi avvidi che non il sangue soltanto, ma parecchi sali, e perfino quelli contenuti comunemente nelle acque di

pozzo producono l' azzurro procedendo coi due liquidi mentovati. Nell' anno susseguente il Prof. Dioscoride Vitali, tanto benemerito della tossicologia in Italia, si accorse pure di ciò in modo poco diverso da me, e stampò i risultati relativi nel *Giornale di Farmacia, Chimica e Scienze affini* di Torino.

Io fino allora non aveva dato in luce le mie osservazioni, perchè, occupandomi contemporaneamente di altre indagini relative al sangue, era mia intenzione di comprendere le une e le altre in una sola *Memoria;* quando lessi il lavoro del Vitali, vedendomi prevenuto non cercai più di pubblicarle, parendomi oramai che non tornasse ad utile alcuno, tanto più che anche il Prof. Sestini aveva avvertito: „ non potersi dalla colorazione azzurra assunta dal reattivo, con sicurezza conchiudere sulla reale esistenza di macchie sanguigne, giacchè molte e diversissime sono le sostanze, che possono tingere di tal colore la tintura di guaiaco “.

Il Vitali verificò: 1. Che i cloruri di rame e di oro, i sesquiossidi di ferro, di manganese e di cobalto producono il coloramento come fa il sangue.

2. Che fanno l' ugual cosa i sesquiossidi di ferro e di manganese ed i loro sali, non che i biossidi di manganese e di piombo.

3. Che il cloruro di magnesio non manifesta azione a temperatura ordinaria, ma svolge l' azzurro scaldando a lieve calore.

4. Che un dato grado di calore fa scomparire le tinte prodotte coi sali ed ossidi mentovati.

5. Che i solfati ferroso e manganoso ed il protocloruro di rame impediscono il coloramento, ed anzi lo tolgono se fu fatto apparire.

6. Che gli albuminati di ferro e di manganese, bene lavati, non danno l' azzurro sulla tintura di guaiaco, nemmeno aggiungendovi un cloruro alcalino, mentre l' albuminato di rame opera all' opposto.

Le mie esperienze furono alquanto più variate.

In primo luogo trovai che colla tintura di guaiaco e l' essenza di trementina, la reazione succede tanto col sangue lavato, quanto col siero da cui si separò il coagulo spontaneamente, ed anche da quello d' onde fu sottratta la sierolina mediante la bollitura. Vidi che la reazione era impedita dall' acido fosforico officinale, dall' acido cloridrico diluito, dall' acido ossalico, dall' acido lattico e dal cianuro di potassio; coll' acido acetico avvenne l' ugual cosa, tranne che scorse 24 ore e svanito tutto l' acido, provando di nuovo coi due liquidi reattivi, l' azzurro riapparve. Col solfidrato d' ammoniaca, bagnando per una volta la pezzuola macchiata, l' intensità dell' azzurro risultò scemata; mancò poi quando ribagnai tre volte la pezza, lasciandola seccare tra una bagnatura e l' altra.

I cloruri di calcio, di sodio e di ammonio operarono coi due liquidi reattivi a somiglianza del sangue. Si eseguisce la prova in questo modo: si fanno cadere gocciole delle singole soluzioni su pezze di tela o di carta berzeliana; si lascia asciugare, indi vi si stilla la tintura ed in appresso l' essenza: l' azzurro si manifesta sollecito e cupo. Se fannosi cadere le goccie delle dette soluzioni saline su

piatti, in cambio di pezza o carta, si aspetta che l' acqua svapori, e si assaggiano i dischetti residui coi liquidi reattivi, la tinta comparisce, ma più languida assai di quanto avviene sulla pezza e sulla carta.

Ciò tornerebbe di conferma per dimostrare, che i tre cloruri mentovati agiscono determinando il trasporto dell' ozono dall' essenza sulla resina di guaiaco, piuttostochè per altra ragione.

L' influenza dei cloruri alcalini nel determinare la reazione mi spiegò la causa onde si svolse il noto colore su pezze bagnate con un' acqua di pozzo ricca di sali, tra cui il cloruro di calcio, poi messa a seccare, indi sperimentata nella maniera mentovata.

Il bicloruro ed il cianuro di mercurio danno pure la reazione, in maniera tuttavia assai più debole in confronto dei cloruri alcalini e dopo qualche tempo: non è adunque da meravigliare (come osservai) se il primo non la impedisce quando è associato coi cloruri alcalini e quando furono bagnate con esso macchie sanguigne.

La potassa fa dileguare l' azzurro, tanto se formato col mezzo dei cloruri alcalini, quanto dal sangue; le soluzioni acquosa ed alcoliea di ammoniaca producono nell' istante il medesimo effetto, tranne che la tinta torna a manifestarsi, specialmente se provenne dai cloruri; se dal sangue si riappalesa a mala pena.

Sperimentai i solfati di calcio, zinco e sodio come aveva fatto pei cloruri: nella pezzuola imbevuta del primo, l' azzurro fu sensibile dopo alcune ore; in quella imbevuta del secondo si vide a svolgere dopo un' ora, indi andò crescendo; in quella imbevuta del terzo la reazione non avvenne. Il solfato di sodio possiede anzi la prerogativa d' impedire lo sviluppo della tinta e di estinguerla dopo che si fu sviluppata. Pezzuole imbevute, ciascuna delle sostanze seguenti: cloruro di ammonio, percloruro di ferro, cloruro di calcio e sangue, non diedero l' azzurro se bagnate col solfato di sodio in antecedenza dei liquidi reattivi, o lo perdettero quando sulle parti colorate stillai qualche goccia di una soluzione del solfato.

Dibattendo del sangue secco con solfuro di carbonio, cloroformio, alcole ed etere acetizzati, o con alcole ammoniacale, se ne hanno soluzioni i cui residui producono la reazione; la quale pure ottenni con sangue di animali diversi: Bue, Asino, Cavallo, Pecora e Pollo.

Ne consegue, che male si affiderebbe chi si valesse della reazione di Van-Deen, già caduta presso che in dimenticanza, ed al presente risuscitata dal Ferry, e da qualche altro. Piuttosto sembrami da tentare il processo indicato da Sonnenschein conforme alla modificazione suggerita da me in una *Nota* inserita nel *Volume IX, Serie III, delle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Bologna (1878).*

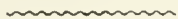
SOPRA

DUE ARSINE FORMATESI IN UNO STOMACO DI MAIALE

SALATO CON ANIDRIDE ARSENIOSA

NOTA

DEL PROF. FRANCESCO SELMI

(Letta nella Sessione Ordinaria 22 Aprile 1880)

In una notizia che comunicai alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 2 Giugno 1878 parlai di una ptomaina venefica e cristallizzabile, che estrassi col mezzo dell' etere dai visceri di due cadaveri esumati ed in cui fu trovato l' arsenico in copia. Ivi accennai il proposito di studiare la formazione di alcaloidi speciali nelle materie animali condite con anidride arseniosa, e mi vi accinsi salando con essa diversi visceri di maiale ed anche grossi pezzi di carne muscolare, sotterrando i pezzi della carne, per indi esaminarli dopo un certo tempo, e chiudendo i visceri in ampi recipienti di vetro che tappai accuratamente, lasciando solo a disfogo dei gas una canna di vetro infitta nel tappo e piegata a doppio angolo, per immergere il braccio esterno in una soluzione di solfato di rame.

La putrefazione, almeno pei visceri contenuti nei vasi, procedette assai diversa dal consueto; non si svolse veruno dei gas capaci di reagire col solfato di rame, quindi nè idrogeno solforato nè altri.

Delle materie preparate come dissi non potei esaminare che lo stomaco, dacchè qualora avessi voluto continuare per tutte le altre non avrei potuto a cagione della insufficienza dei mezzi fornitimi dal Laboratorio non provvistone a sufficienza.

Le ricerche sullo stomaco furono le prime a cui diedi mano; ne comunicai una breve nota all' Accademia delle Scienze di Bologna il 3 Aprile dell' anno scorso (1).

(1) Rendiconto delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze di Bologna — Anno Accademico 1878-79 pag. 104 — Bologna, tipi Gamberini e Parmeggiani.

Per allora mi restrinsi a brevissimi cenni, non essendomi caduta in quel tempo la speranza di compiere il lavoro sull' altro materiale, se non del tutto almeno in gran parte; ora, dacchè dovetti abbandonarne il pensiero, mi risolsi di raccogliere dati più particolareggiati nello scritto che presento.

Lo stomaco di maiale era stato tolto da un maiale morto improvvisamente in sulla fine dell' Agosto del 1878; rimase nella salamoia arsenicale sino al 16 ottobre dello stesso anno. Il recipiente che lo conteneva fu tenuto in una stanza al piano terreno, fresca e non soleggiata. Aprendo il vaso non esalava odore fetente; il viscere si era mantenuto intatto e non accennava a spappolamento. Fu separata la parte liquida o salamoia che possedeva leggiera reazione alcalina, e fu introdotta in istorta e distillata in corrente d' idrogeno. Il distillato risultò limpido, alcalino, con qualche fiocchetto galleggiante di materia bianca ed ontuosa. Fu feltrato, ne fu saturata cautamente l' alcalinità con acido cloridrico, indi evaporato a secco su bagno maria a blanda temperatura. Ne rimase un cloridrato bianco, cristallizzabile, in cristalli a croce. non deliquescenti e che si mantenne secco all' aria libera. Con una goccia di soda svolgeva un odore speciale che si accostava fino ad un certo punto a quello della trimetilammina, onde mi nacque sospetto che si trattasse di questa base, se non che dovetti convincermi che non si poteva confondere nè con essa nè con le altre metilammine, nè colla propilammina, per differenze di reazioni.

Il cloridrato della base volatile dello stomaco di maiale conteneva arsenico, come me ne accertai distruggendola, ossidando coll' acido nitrico, ripigliando il residuo coll' acido solforico, e riducendo ad acido arsenioso col mezzo dell'acido solforoso l' acido arsenico che si fosse formato ed indi esperimentando nell' apparecchio di Marsh.

La reazioni che diede coi reattivi generali furono quali sto per descrivere:

Non precipitò col *tannino.*

Precipitò coll' *acido iodidrico iodurato* formando bei cristalli di un colore grigio e dell' aspetto dell' iodio.

Precipitò coll' *acido picrico*, e il precipitato si convertì in lunghi aghi gialli intralciati assieme.

Col *solfato d' oro* non precipitò; se non che col tempo si depose un lievissimo polviscolo, il quale visto col microscopio apparve in rudimenti cristallini piccolissimi e trasparenti.

Coll' *ioduro di potassio* e *bismuto* non diede precipitato: col tempo però depose alcuni fiocchetti gialli.

Col *fosfotunstato di sodio* nulla da principio; in appresso precipitò in bianco.

Col *tetracloruro di platino* precipitò immediatamente, ed il precipitato era granuloso e di un giallo canarino; esaminato con ingrandimento di 600 diametri si vide essere in cristalli di forma speciale, i quali constavano di ottaedri inserti uno nell' altro, formando una specie di foglia lanceolata e quattro di queste unite per la base a modo di croce.

Col *cloruro d' oro*, quando la soluzione era concentratissima, fornì un precipitato piuttosto scarso e minuto, che al microscopio si presentò coll' aspetto di sottili laminette gialle di tendenza rombica.

Col *bicloruro* di *mercurio* non avvenne intorbidamento se non quando la soluzione del cloridrato fu molto concentrata.

Il cloridrato messo ad evaporare lentamente assunse la forma cristallina di croci bianche trasparenti ed anche talvolta seghettate.

Volendo riconoscere se possedeva azione tossica consegnai 24 milligrammi del sale secco al mio chiarissimo collega il Prof. Ciaccio, il quale lo esperimentò su di una rana e trovò che agì come un potente veleno ed a somiglianza della stricnina. Riporto in ultimo la descrizione dei fenomeni, quale fu dettata dal mio cortese collega a cui rendo le debite grazie (Vedi I).

Dopo le ricerche sulla base volatile passai a indagare se nella parte liquida rimasta dalla distillazione e nella parte solida sussistesse qualche alcaloido fisso. Tagliuzzai la parte solida, vi sopraversai il residuo dalla storta, inacidii coll' acido tartarico e vi aggiunsi quattro volumi di alcole. Digerii fino al giorno seguente, separai il liquido alcoolico dalla parte indisciolta, su cui feci una seconda digestione con alcole per compiere l' esaurimento. Feltrai i liquidi alcoolici e li distillai nel vuoto fino a che tutto l' alcole fosse passato nel collettore.

Ebbi un residuo bruno e torbido che resi alcalino coll' idrato di bario e dibattei tre volte con etere. Il primo trattamento etereo riuscì bruno; separato il liquido etereo, che possedeva reazione alcalina, lo distillai; il distillato aveva un odore speciale diverso da quello della base volatile già descritta. Posto ad evaporare spontaneamente, lasciò un residuo che in alcuni giorni assunse un odore tanto spiacevole da essere intollerabile, sebbene avessi convertita la base in cloridrato: questo poi cadeva in deliquescenza. La quantità troppo tenue m' impedì di esaminarlo convenientemente.

Il residuo della distillazione dell' etere era bruno, vischioso, alcalino, quasi totalmente insolubile nell' acqua; trattato con acido cloridrico diluitissimo e a caldo, se ne separò una materia grassa, che fu tolta per feltrazione. Siccome la soluzione era colorata di giallognolo, tentai di purificarla aggiungendo barita fino ad alcalinità e ripigliando con etere, che per distillazione lasciò un residuo di reazione alcalina, di odore un po' cadaverico, poco colorato dapprima, ma che stando all' aria s' imbrunì, divenendo insolubile nell' acqua. Aggiunsi qualche goccia di acido cloridrico diluito, cioè fino a lieve reazione acida; scaldando blandemente la materia si sciolse quasi del tutto in gialliccio. La soluzione possedeva sapore amaro, odore un po' sgradevole; postone sull' apice della lingua vi produsse pizzicore e poi intorpidimento. Coi reattivi si comportò come segue:

Diede un lento precipitato gialliccio col *tannino*.

Precipitò in giallo rossiccio e depose gocciole brune coll' *acido iodidrico iodurato*.

Precipitò in polvere gialliccia, che non divenne cristallina neppure dopo più ore, col *cloruro* di *platino*.

Precipitò anche in gialliccio col *cloruro d' oro;* in breve avvenne la riduzione metallica.

Col *bicloruro* di *mercurio* e col *reattivo di Meyer* diede un precipitato bianchiccio e pendente al giallognolo.

Coll' *ioduro* di *bismuto* e *potassio* il precipitato fu di un giallo arancione che mutò al rosso.

Coll' *acido picrico* diede un precipitato immediato non cristallino.

Col *bicromato* di *potassio* precipitò in giallo alquanto rossiccio.

Quest' alcaloido conteneva pure arsenico e possedeva azione venefica, quasi simile a quella degli alcaloidi cadaverici, come risultò dalle esperienze del Prof. Ciaccio (Vedi II).

La materia esaurita coll' etere fu indi ripresa col cloroformio, che si colorò di giallognolo e acquistò reazione alcalina; ma nulla potei ricavare degno di essere ricordato.

La formazione di ptomaine arsenicali nel ventricolo di maiale in salamoia coll' arsenico, e la potenza venefica che posseggono, renderebbe ragione del come, conosciuto empiricamente il fatto nei secoli andati, gli avvelenatori di professione, preparassero la così detta *Acquetta di Perugia* (dato che la tradizione orale dica il vero), uccidendo un maiale, squartandolo, spolverandolo e stropicciandolo coll'arsenico bianco, e raccogliendo l' umore arsenicale che ne gocciava. Il liquido ottenuto per tal modo avrebbe posseduto un' azione venefica assai più gagliarda che una semplice soluzione di anidride arseniosa, concorrendovi le arsine ad accrescerla. Potrebbesi chiedere a quanto avrebbe giovato, per mantenere velati i sintomi dell' avvelenamento, il sussistere nel liquido di un prodotto producente convulsioni tetaniche a somiglianza della stricnina e più; ma è da considerare, che l' anidride arseniosa mista coi tetanizzanti, senza menomarne l' efficacia tossica, ne maschera la qualità di eccitare il tetano. Ciò fu dimostrato da esperienze apposite istituite tra me ed il Prof. Vella in un caso di perizia giudiziaria, nel quale furono trovate ad un tempo, nei visceri, l' arsenico e la stricnina.

I.

Esperienze fisiologiche del Prof. Vincenzo Ciaccio, cogli alcaloidi mentovati.

Cloridrato della base volatile.

La quantità del cloridrato della base volatile fu di 24 milligrammi. L' esperienza fu fatta il 19 di Novembre 1878. — La rana era anzi che no, grande e assai vivace. Prima dell' esperienza, fu tenuta per mezz' ora in una stufa, la cui aria era riscaldata a 18 C°. La temperie dell' ambiente era di qualche grado meno.

Si mette allo scoperto il cuore della rana e se ne contano i battiti, e similmente si contano i movimenti respiratorj, che sono estesi e regolari.

I battiti cardiaci sono 41 per minuto. I movimenti respiratorj sono 60. All' 1,2 pom. s' injetta sotto la pelle di ambedue le cosce della rana con lo schizzetto del Pravaz tutta quanta la soluzione dell' alcaloide.

Dopo 10 minuti — Battiti cardiaci 37
Movimenti respiratori 51

Il cuore apparisce di colore rosso vermiglio ; i movimenti respiratori si mantengono ancora estesi e regolari. La cornea è assai sensibile ; la pupilla fuor di modo allargata ; la sensibilità della pelle pare che sia cresciuta.

Dopo 40 minuti — Battiti cardiaci 34
Movimenti respiratori 31

I movimenti respiratorj sono divenuti irregolari e meno estesi. La cornea e la pelle seguitano a mostrarsi più sensibili, e la pupilla continua ad essere allargata.

Dopo 1 ora e 30 minuti — Battiti cardiaci 31
Movimenti respiratori 0

La rana è colta da una fortissima contrazione tetanica, in forma di *opistotono*, la quale dura qualche minuto. La sensibilitá della pelle è divenuta talmente squisita, che toccando leggiermente con un pennellino morbidissimo la pelle dell' addome o delle membra posteriori subito si suscitano le convulsioni tetaniche. Le quali eziandio si suscitano col battere sopra l' assicella, dove giace la rana, col manico di un coltelletto. La regione milojoidea apparisce avvallata per la contrazione permanente de' muscoli che ivi sono. La pupilla è ristretta, da allargata ch' ella era. Il cuore si contrae con forza e per modo, che la sistole e la diastole sono assai più durabili dell' ordinario. E si noti, che durante la diastole, la quale non si compie ad un tratto, ma in due o tre tempi, la punta del cuore rimane vuota di sangue, perchè la contrazione muscolare in essa punta è quasi permanente.

Dopo 1 ora e 40 minuti — Battiti cardiaci 15
Movimenti respiratori 0

La rana di subito cade in tetano generale. La quale essendo presa e per le estremità di dietro levata su, sta così ritta e rigida, come se la fosse un legno. La sistole continua ad essere gagliarda, e la diastole a farsi in due tempi. E durante essa, il cuore si riempie di sangue bruno. Alle 4 pom. la rana è tuttora viva, ma

sempre con le membra stese e irrigidite. Alle 10 ant. del dì appresso, tornato io al Laboratorio, trovo la rana morta, col cuore in diastole e pieno di sangue.

Da questa esperienza si vede chiaro, che l' alcaloide estratto ecc. è dotato di una virtù venefica ben grande, e che l' azione di esso si somiglia a quella della stricnina.

II.

Esperienze sul Cloridrato della base fissa.

La quantità fu di 15 milligrammi di alcaloide alquanto impuro. — La rana era di mezzana grandezza e vivace. E avanti di esperimentare in essa l' azione dell' alcaloide, fu per lo spazio di mezz' ora tenuta in una stufa riscaldata a 18 C°. La temperie dell' ambiente era 16 C°.

Si mette alla rana a scoperto il cuore, ch' è grande, e di colore rosso scuro, e se ne annoverano i battiti, che sono 41 per minuto ; e similmente si annoverano i movimenti della respirazione, che sono 40 nello spazio di un minuto, e poco estesi. Alle ore 12,48 s' injetta col mezzo dello schizzetto del Pravaz sotto la pelle dell' una e l' altra coscia tutto il liquido, dove erano soluti i 15 milligrammi dell' alcaloide fisso. Nell' atto dell' injezione, la rana dà manifesti segni di sentir dolore, e poco poi le viene qualche leggiero movimento convulsivo.

Dopo 7 minuti da che l' alcaloide era stato injettato, si osserva il cuore, e trovasi che la sua mole di prima era sminuita di $1/3$, e di più il colore suo era da rosso scuro divenuto rosso chiaro, e la sistole si prolungava di molto, e la diastole era incompiuta, perchè il cuore solo verso la base si dilatava, ma la punta rimaneva permanentemente contratta.

Dopo 12 minuti — Movimenti respiratori 0
Battiti cardiaci 38

La sistole continua ad essere molto più durevole della diastole. La sensibilità della pelle e della cornea è diminuita. La pupilla si è notabilmente slargata. La virtù contrattile de' muscoli perdura. E l' eccitabilità de' nervi tarda a risvegliarsi. Toccata con un po' di acido acetico la membrana interdigitale, dopo poco si destano de' movimenti riflessi, i quali però sono ristretti soli agli estremi posteriori.

Dopo 24 minuti — Movimenti respiratori 0
Battiti cardiaci 37

Il cuore è tornato alla sua mole ordinaria. La diastole è molto estesa, e, durante essa, tutta la cavità del ventricolo si riempie di sangue. La sistole, per con-

trario, si è fatta più breve e sì svigorita, che non lascia al ventricolo che si vuoti di tutto il sangue, che in esso entra nel tempo della diastole. La sensibilità della pelle e della cornea è molto più diminuita ; e la pupilla tuttavia si mantiene larga. Qualche leggiera contrazione si vede ne' muscoli della regione milojoidea.

Dopo 42 minuti — Movimenti respiratori 0
Battiti cardiaci 35

Il cuore si mostra di nuovo rimpiccolito nella mole, e la sistole più duratura. La diastole invece è divenuta meno ampia, meno gagliarda, e più breve della sistole. La sensibilità della cornea è quasi spenta, e assai larga la pupilla. Premendo con un paio di mollette gli estremi di dietro della rana, vi appariscono de' movimenti riflessi, i quali però sono poco gagliardi.

Dopo 1 ora e 12 minuti — Movimenti respiratori 0
Battiti cardiaci 29

La sistole è di minor forza, ma più durevole della diastole, la quale è incompiuta, perchè la metà inferiore del ventricolo resta impervia al sangue. I movimenti riflessi attuati dal forte premere su gli estremi posteriori della rana sono molto limitati e deboli.

Dopo 2 ore e 7 minuti — Movimenti respiratori 0
Battiti cardiaci 28

Il cuore apparisce rimpiccolito della metà circa. La sistole è tarda e mette assai tempo a compiersi. In questo punto si lascia di più osservare la rana, perchè, sebbene il cuore continuasse a lentissimamente battere, nondimeno ella giaceva su l' assicella a guisa di morto.

Questa esperienza mostra indubitamente che l' alcaloide fisso estratto dallo stomaco del maiale è venefico, e l' operar suo si fa sul genere nervoso della vita animale, e specialmente sul centro nervoso respiratorio, ed anche, ma con meno efficacia, su quello cardiaco. Nel che esso ha senza dubbio somiglianza con altri alcaloidi velenosi che s' estraggono da' cadaveri in via di putrefazione.

RICERCHE

SOPRA UN LENTO PROCESSO ARTRITICO

AL TARSO DEL CAVALLO

MEMORIA

Del Professor ALFREDO GOTTI

(Letta nella Sessione ordinaria del 26 Febbraio 1880).

Sotto la denominazione di *sparaguagnolo, sparagagno, spavenio calloso*, i veterinari da Giordano Ruffo a noi, compresero quelle alterazioni, con andamento ordinariamente lento, che così spesso si sviluppano al tarso del cavallo e il di cui carattere fondamentale è una produzione ossea sul contorno delle ossette piatte della regione del garetto, che si dà a conoscere per la deformazione che si stabilisce in questa parte, e per alcuni sintomi più o meno importanti, il principale dei quali consisterebbe in un particolar modo di claudicazione ben noto ai pratici.

Dai più è ritenuto che questa neoproduzione ossea si sviluppi da un lento processo infiammatorio dei tessuti molli che circondano il tarso e particolarmente di quella parte del periostio che copre i bordi delle ossette della faccia interna del garetto; processo che vi sarebbe determinato e mantenuto dagli sforzi e violenze che di preferenza questa regione dell' arto posteriore del cavallo soffre durante il lavoro.

Sul modo però di prodursi dello *spavenio calloso* non tutti, come Percivall, Toggia, Hertwig, Lafosse di Tolosa ed altri, lo considerano quale l' esito di una periostite limitata al lato interno del garetto, anzi alcuni, non meno stimabili ed accurati osservatori, sostengono che la periostite e quindi la neoproduzione ossea non sia primitiva, ma una successione di alterazioni gravi che a tutta prima si sviluppano sulle superficie articolari di alcune delle ossette piane del tarso.

Pare che Havemann sia stato il primo ad insegnare che lo spavenio incomincia con una lesione alle superficie articolari; certo quest' insegnamento venne accolto con favore da parecchi suoi contemporanei e nel 1830 fu sostenuto con calore dal Goodwin.

H. Bouley in una sua comunicazione fatta alla Società Veterinaria di Parigi nel 1850 dimostrò che „ l'éparvin n'est pas seulement un tumeur estérieur situé sur le marge des articulations des os plats du tarse, c'est plus que cela, c'est l'espression constante d'une lésion intérieure des articulations des ces os entre eux. „ (1).

Ma molto prima della comunicazione del Bouley, nel 1839 G. W. Schrader descrisse con molta esattezza le lesioni articolari delle ossa del tarso del cavallo, rilevando l'importanza speciale che hanno nello spavenio calloso. Nelle quaranta osservazioni da lui riportate descrive i pezzi patologici raccolti in cavalli nei quali in vita aveva rilevati con sicurezza i sintomi dello spavenio. Trovò che a lesioni articolari d'ordinario molto estese ora si associava l'osteoma sui bordi delle superficie articolari alterate; ora l'osteoma era appena accennato, o mancava del tutto. (2)

Nel 1860 Schrader figlio in un importantissimo lavoro (3) torna sopra a queste lesioni articolari delle ossa tarsiche e riporta nuove osservazioni in appoggio a quelle del padre. Le osservazioni dei due Schrader sopra queste lesioni articolari del tarso sono le più complete ed importanti che a tutt'oggi si possiedono e permettono di farsi del cosidetto spavenio calloso un concetto molto più esatto di quello che generalmente è in corso fra i pratici.

Sono pochi anni però che W. Dieckerhoff in un lavoro speciale sullo *Spavenio* (4), sotto molti punti pregevolissimo, sostenne sul modo di sviluppo di questa alterazione, una opinione affatto diversa da quelle che ho dianzi indicate. Esso vuole che il punto di partenza più ordinario dello spavenio, sia da ricercarsi in una irritazione e successiva lenta infiammazione della borsa mucosa esistente alla faccia interna del garetto, determinatavi dagli stiramenti dei tendini che l'avvicinano e dall'agire della branca tendinea interna del muscolo tibiale anteriore che essa borsa racchiude. — Da questa il processo si irradierebbe più o meno lentamente alle capsule articolari e al periostio, per cui da una parte ne verrebbe parziale ingrossamento della capsula stessa, dall'altra formazione di un esostosi che può acquistare dimensioni diverse a seconda dei casi. Le lesioni alle sinoviali, quelle delle cartilagini articolari, l'infiammazione di alcune ossette tarsiche, quantunque spesso assai gravi, verrebbero però dopo e quindi si dovrebbero riguardare secondo Dieckerhoff, quali successioni morbose.

Sulla verità però di quest'insegnamento del Dieckerhoff, confesso che ebbi subito dubbi serî, perchè non affatto consono a quanto fin allora avevo osservato in

(1) Bulletin de la Société nationale et centrale de Médécine Vétérinaire. Séance du 9 novembre 1850. Reçueil ecc. pag. 1054.

(2) G. W. Schrader. Verzeichnis meine Sammlung krankhafter Knochen von Sprunggelenk des Pferdes. Bemerkungen im Bezüg auf Spat. Magazin ecc. 1839.

(3) Ueber die cronischen Gelenkkrankeiten des Pferdes. Magazin ecc. 1860, pag. 148.

(4) Die Pathologie und Therapie des Spat der Pferde. Berlin 1875.

pratica e a quanto avevo veduto ricercando le lesioni in garetti ammalati. Ed ero spinto tanto più a dubitarne, che già nove anni prima della comparsa di questo lavoro sullo spavenio, il Prof. Ercolani nell' esame di parecchi garetti alterati aveva constatato „ *che il punto di partenza della malattia della capsula articolare era soltanto in una malattia delle cartilagini delle faccie combaciantesi dell' astragalo e del navicolare per la quale la cartilagine completamente si consuma.* „ (1)

Come però questo fatto importante era stato solo accennato da Ercolani e d'altra parte mi premeva di mettere in chiaro quanto vi fosse di vero in ciò che aveva asserito Dieckerhoff, così mi dedicai ad una lunga serie d' osservazioni indirizzate particolarmente a ricercare il punto di partenza delle lesioni del cosidetto spavenio calloso e a seguirne l' andamento.

Non essendo però facile il procurarsi ad un tratto il materiale d' osservazione per stabilire i confronti necessari a potere conoscere tutto lo svolgimento del processo morboso che si stabilisce nelle ossa tarsiche, così mi sono dovuto occupare di queste ricerche per molto tempo e a riprese quando mi si presentarono occasioni favorevoli.

A tale scopo usufruii del materiale, certo non scarso, che ci è dato disporre nella Scuola in cavalli di poco prezzo acquistati per le esercitazioni chirurgiche e di quei cadaveri che vi vengono portati per esservi sezionati; nonchè di parecchi preparati del nostro Museo.

Per riescire a trovare le prime fasi delle lesioni al tarso m' attenni al metodo di esaminare tutti i garetti che potevo procurarmi presentassero o no deformazioni periferiche sensibili, poichè mi ero avveduto che garetti i quali al semplice esame esterno si sarebbero ritenuti per sanissimi, invece alcune volte presentavano lesioni interne rilevanti.

Buon numero dei tarsi da me ricercati appartenevano a cavalli che avevo esaminati in vita e vi avevo riconosciuti i sintomi più importanti dello spavenio calloso; di altri invece mi mancavano informazioni perchè tolti da cadaveri.

Ma prima di esporre quanto mi fu dato di osservare sulle lesioni del tarso, stimo conveniente di succintamente indicare che l' apparecchio tarsico del cavallo, per la particolare disposizione dell' arto posteriore, ha tale positura e direzione da risentire più di qualunque altra articolazione del medesimo, le influenze morbose derivanti in massima parte dal lavoro al quale l' animale viene assoggettato. Infatti quest' apparecchio tarsico nel quale si concentra il peso della parte posteriore del corpo, ha importanza grandissima nei movimenti di sollevamento e di spinta all' innanzi del tronco ed è su di esso che in massima parte l' urto o contrazione del terreno più direttamente si ripercuote.

Perciò l' apparecchio è dei più solidi, formato di piccole ossa sovrapposte che si combaciano per numerose facette articolari piane, tenute in intimo contatto da

(1) Ercolani. Sulla struttura normale e sulle alterazioni patologiche del tessuto fibroso. 1866.

un gran numero di corti e robusti legamenti interossei e periarticolari, i quali contribuiscono a limitare i movimenti loro a tal grado, che, per il maggior numero di queste articolazioni, non si possono neppure ad arte rendere sensibili.

Sei ossa lo formano. L' astragalo ed il calcagno in alto nel piano superiore presentano inferiormente un' ampia superficie articolare che va a combacciare esattamente colla superficie articolare superiore delle ossette del piano inferiore. Questo a sua volta è costituito da quattro piccole osse, il navicolare cioè o scaffoide sovrapposto al triangolare o grande cuneiforme, ai quali si articolano dal lato esterno il cuboide, dall' interno e alquanto posteriormente il piccolo cuneiforme; le quali ossette tenute in strettissimi rapporti fra loro e colle estremità articolari piane dei metatarsi mediano e laterali dal ricchissimo apparecchio legamentoso interosseo e periarticolare, formano un tutt' uno così solido e resistente che solo con qualche difficoltà si possono nel fresco separare queste ossette le une dalle altre, che anzi ciò solo si può ottenere quando queste parti sono del tutto sane.

Ad assicurare poi vieppiù l' unione intima delle diverse sezioni dell' apparecchio tarsico fra loro e col metatarso, oltre a robustissimi legamenti comuni ai due piani, vi concorrono i legamenti laterali dell' articolazione tibio-astragaliana che si estendono sopra parecchie delle ossette tarsiche e sui contorni dei capitelli dei tre metatarsi ed ancora il robusto legamento tarsico comune posteriore al quale in buona parte è affidata la resistenza dell' apparecchio in addietro.

Quest' apparecchio però, quantunque disposto a piani in contatto fra loro per superficie non molto ampie e con movimenti tanto limitati, adempie nonostante ad una funzione di complesso importantissima, poichè i suoi pezzi ossei articolati e sovrapposti gli uni agli altri, agiscono, naturalmente quando l'apparecchio è in condizioni normali, come un cuscinetto elastico che serve a diminuire moltissimo gli effetti dell' urto che tende a concentrarsi sul garretto quando l' animale batte il piede sul terreno.

La porzione anteriore e il lato interno della regione tarsica sono formate dalla porzione inferiore dell' astragalo, dal navicolare sovrapposti al metatarso principale e dal piccolo cuneiforme sovrapposto a sua volta a questo e al metatarso laterale interno; il lato esterno invece è formato da piccola porzione del calcagno e dal cuboide che stà sopra al metatarso mediano e a quello laterale esterno.

Se si prende in esame un garetto separato dalla tibia e che venga mantenuto nella sua naturale direzione, si trova che la troclea dell' astragalo è diretta molto obliquamente in basso e all' esterno, mentrechè nel suo assieme, specialmente per il modo con cui sono disposti gli orli o cigli che la limitano, si piega assai sensibilmente sulla metà interna dell' apparecchio tarsico.

Questa particolare disposizione dell' astragalo lascia facilmente comprendere che nell' appoggio sull' arto posteriore e nei movimenti di questo la metà interna dell' apparecchio tarsico sostiene una pressione maggiore della metà esterna e che quindi le parti che debbono risentire di più quest' aumento d' azione, quantunque

a grado diverso, sono la superficie inferiore dell' astragalo, il navicolare, il triangolare e il metatarso principale.

E, fatto notevolissimo, è appunto sopra queste ossa che quasi esclusivamente si stabiliscono e si aggravano le lesioni interne che non mancano mai nel cosidetto spavenio calloso, mentre sulle altre ossa e particolarmente sulle porzioni di esse che formano il lato esterno del tarso è affatto eccezionale il trovarvi alterazioni. Anzi è dato di verificare che il processo morboso si inizia proprio in quelle porzioni di superficie articolari delle ossa che stanno più verso il lato interno del garetto. E ciò con tale frequenza da non poter esservi dubbio che il processo morboso che si sviluppa di preferenza in queste parti, trovi la principale se non l' unica sua condizione eziologica, in questa ineguale distribuzione del peso sulle due metà dell' apparecchio tarsico.

Come grado avvanzatissimo delle lesioni che si sviluppano sulle ossa della metà interna del tarso, è comunissimo il constatare la fusione per anchilosi periferica o per anchilosi centrale di porzione o della totalità delle superficie del navicolare col triangolare o di quest' ultimo col metatarso o anche di parecchie o di tutte queste articolazioni ad un tempo. La quale alterazione è generalmente ritenuto che si stabilisca molto presto e che sia legata alla neoproduzione osteofitica, che, quantunque a grado diverso, dai piú si ammette che si formi sempre in tali casi sui bordi di queste ossa.

Quello che però è certo, perchè comprovato da un grande numero di osservazioni che ho avuto occasione di istituire, si è la straordinaria frequenza colla quale è dato di trovare pure lesioni sulle superficie articolari dell' astragalo col navicolare, alle quali da molti o non vi si è fatta attenzione o non vi si è data l' importanza che meritano; quantunque, già descritte dai due Schrader, fossero, come ho detto, state ritenute dal Prof. Ercolani nel 1866, quale condizione necessaria allo stabilirsi di gravissime alterazioni sulla capsula articolare del garetto.

Può dirsi infatti che nel maggior numero dei casi, lesioni a gradi diversissimi è dato di trovare fra queste due superficie dell' articolazione dell' astragalo col navicolare; da semplici alterazioni delle loro cartilagini d' incrostazione fino a lesioni estese e più o meno profonde del tessuto osseo sottostante e ciò quando contemporaneamente esiste riunione del navicolare col triangolare o delle altre ossa fra loro per anchilosi centrale o periferica; ma anche non poche volte quando non è dato rinvenire lesione alcuna sopra queste ossa.

Mi occorse alcune volte di trovare lesioni assai rilevanti sulle superficie di questa articolazione quantunque la deformazione del garetto fosse così limitata che dall' esterno non si sarebbero sospettate le alterazioni esistenti in essa. Altre volte trovai queste stesse alterazioni articolari molto estese e profonde associate ad abbondante produzione fibrosa ed osteofitica tutt' attorno a questa articolazione astra-

galo navicolare, mentrechè la dissezione minuta non lasciava scorgere alterazione alcuna nè sul triangolare, nè sul metatarso.

Le Figure 1.ª e 2.ª della Tav. I copiate da un preparato fresco stanno a dimostrare uno di questi casi.

Mentre però si possono riscontrare sulle superficie dell' articolazione astragalo-navicolare tutti i differenti gradi che raggiunge l' alterazione, mi venne fatto di trovare pochissime volte che queste due superficie si erano anchilosate, anzi anche in questi casi non si trattava mai di una estesa e resistente unione, ma di attacchi limitati ad uno o a pochi punti per mezzo di fascetti fibrosi che con poca fatica si rompevano. E quando trovai questo accenno d' anchilosi le lesioni sulle superficie le vidi sempre gravissime, associate a deformazioni rilevanti delle due ossa e specialmente della porzione più anteriore del navicolare.

Le quali particolarità di una lesione tanto frequente in questa articolazione astragalo-navicolare, possono acquistare importanza per chiarire alcuni sintomi che accompagnano il cosidetto spavenio calloso, tanto più se si pone mente che in questa articolazione veri movimenti di elevazione e di abbassamento si manifestano molto più sensibili che fra le altre ossette tarsiche. Ad assicurarsene basta infatti esaminare un garetto sano privato del legamento capsulare; facendo pressione con una mano sul calcagno, mentre coll' altra si tiene ben fermo il metatarso, si può vedere allontanarsi assai sensibilmente l' orlo anteriore della superficie articolare dell' astragalo, dal corrispondente orlo anteriore della superficie articolare superiore del navicolare.

Per poter meglio osservare le prime fasi delle lesioni che si sviluppano sulle superficie articolari di alcune ossa tarsiche e seguirne l' audamento approfittai appunto dell' articolazione astragalo-navicolare, come quella che con minore difficoltà si prestava ad essere aperta ed anche perchè in essa si possono seguire tutti i gradi più importanti della malattia. Il più delle volte però estesi pure l' esame alle altre articolazioni tarsiche per rintracciarvi le lesioni e confrontarle coi fatti riscontrati nell' articolazione astragalo-navicolare.

Esporrò quindi prima le cose notevoli riguardanti le alterazioni delle superficie di quest' ultima, poscia vi aggiungerò quanto mi fu dato rilevare nelle altre.

L' alterazione più leggera che si dà a conoscere, quasi sempre contemporaneamente sulla superficie articolare inferiore dell' astragalo e sulla corrispondente superficie articolare superiore del navicolare si rileva bene nei pezzi freschi appena disgiunte le ossa e consiste in una differenza di colorito della superficie delle cartilagini d' incrostazione che in diversi punti ha perduto il suo aspetto bianco latteo o bianco madreperla e si presenta invece molto spulita.

Questo leggerissimo mutamento è molto più facile di riscontrarlo in parecchi punti della metà anteriore delle due superficie che si corrispondono, di quello che

nel rimanente delle superficie stesse. Anzi la spulitura sulla cartilagine spesse volte si vede solo per uno strettissimo tratto proprio vicino al limite anteriore della superficie.

In altri preparati le zonette spulite sono sparse sopra qualche porzione della superficie delle due ossa menzionate mentre verso il loro limite anteriore la cartilagine non presentasi solo spulita, ma mostra delle finissime striature che si estendono per alcuni millimetri verso il centro e che hanno l' aspetto di tanti parziali consumi lineari come se fossero prodotti da una superficie leggermente rugosa che scorre sull' altra. Ma qui queste fine striature sono affatto superficiali ed esistono contemporaneamente quasi per eguale estensione sulle parti corrispondenti delle due superficie articolari e qui veri movimenti di scivolamento di una superficie sull' altra non esistono.

Sono queste striature che coll' avanzarsi del processo si fanno maggiormente marcate e si estendono molto lentamente verso il centro della superficie; quasi mai però le invadono nella loro totalità.

In altri casi, quantunque più di rado, sono le zonette spulite sparse quà e là sulle cartilagini d' incrostazione che mostrano queste striature, le quali vi si dilatano senza però confluire fra loro. A grado a grado queste striature si trasformano in piccole sfaldature, le quali pure restano a lungo limitate alle parti più anteriori delle superficie e vi si approfondano molto lentamente.

Più difficile è il poter rilevare questi primi mutamenti sulle cartilagini delle superficie articolari fra il navicolare e il triangolare o fra quest' ultimo e il metatarso perchè più d' ordinario vi si sviluppano prima di quelli all' articolazione astragalo-navicolare ed hanno allora già fatto luogo ad alterazioni più avanzate. Pure qualche volta ho potuto trovare anche sopra le superficie di queste, le stesse alterazioni che ho notate per l' articolazione astragalo-navicolare. Solo le trovai più spesso limitate verso le parti centrali specialmente fra il navicolare e il triangolare, mentrechè fra queste e il metatarso le vidi estese non poche volte quasi alla totalità delle superficie loro.

Aggiungo però che ho pure trovati casi nei quali l' esame attento di queste superficie non lasciava scorgere lesione alcuna, mentrechè erano rilevantissime alla articolazione astragalo-navicolare.

L' aver trovato molto spesso queste lesioni alle cartilagini dell' articolazione astragalo-navicolare in garetti senza nessuna alterazione nelle parti molli periarticolari, mi fece credere a tutta prima che si trattasse di una semplice usura dovuta a degenerazione grassa delle capsule della cartilagine, seguita da una lenta e limitata disgregazione di essa e che non potesse perciò arrecare un rilevante nocumento al libero funzionare dell' apparecchio tarsico.

Ma quando sopra altri preparati ebbi riscontrate queste stesse alterazioni cartilaginee, vicino ad alterazioni più gravi che interessavano gli strati superficiali del

tessuto osseo, mi avvidi che esse erano legate ad una serie di altri fatti che si riassumevano in un vero processo morboso.

Ad assicurarmi meglio della natura di queste lesioni alle cartilagini, feci una serie di osservazioni microscopiche per tutti i gradi di esse.

Per evitare errori, specialmente per il grado più leggiero della lesione, feci osservazioni di confronto delle preparazioni di cartilagine ammalata con quelle tolte dalle superficie articolari delle ossette omonime del tutto sane.

Praticai dapprima sezioni verticali in corrispondenza alle zonette spulite delle cartilagini dell' articolazione astragalo-navicolare e le osservai a fresco immerse nella glicerina.

Anche a questo primo grado della lesione risultava evidente una marcata alterazione negli strati superficiali della cartilagine.

Si sa che se si esamina al microscopio una sezione verticale di una cartilagine articolare normale di un cavallo adulto, essa si presenta in una serie di strati, sovrapposti in un ordine costante. Alla superficie stanno delle capsule piatte lenticolari che contengono una sola cellula, al disotto si trovano capsule esse pure con una sola cellula, ma rotonde; più profondamente delle capsule più allungate ma perpendicolari alla superficie e che contengono due, tre ed anche un maggior numero di capsule secondarie e che disposte in serie le une sulle altre si possono seguire fino nello strato più profondo che è infiltrato di sali calcari e che unisce la cartilagine jalina al tessuto osseo.

Ora le sezioni verticali fatte sulle zonette spulite mostrano alla superficie, la sostanza fondamentale della cartilagine non più d' aspetto uniforme, ma leggermente fibrillare e gli elementi cellulari non solo più evidenti perchè molto più grossi, ma in luogo di semplici capsule contenenti una sola cellula ne esistevano delle assai voluminose che racchiudono tre, quattro ed anche un numero maggiore di capsule secondarie. Ciò non si riscontrava solo nei primi strati, ma in alcuni punti l' alterazione si estendeva agli strati medi; non uniformemente però per tutta l' estensione corrispondente alla zonetta spulita della cartilagine. Anzi a questo primo grado dell' alterazione gli strati profondi della cartilagine su queste sezioni verticali si vedevano immutati. Raffrontato con questi preparati, sezioni verticali fatte sulle stesse superficie articolari, in quei punti dove la cartilagine aveva aspetto normale, non presentavano la disposizione dei primi, ma erano o del tutto normali oppure in alcuni pochi punti si rilevava un accenno d' ingrossamento nelle capsule più superficiali.

Seguendo il processo più innoltrato sopra sezioni orizzontali praticate molto superficiali attorno a quelle parti della cartilagine dove era ben evidente una sfaldatura, si osservano alterazioni molto più avanzate quantunque della stessa natura delle precedenti; poichè in questi casi i limiti della sezione che corrispondono ai punti dove incomincia la sfaldatura (vedi Fig. 4.ª, Tav. I) vedonsi molto irregolari; in alcuni punti corrosi *(a, a)*, in altri disposti a festoni o sporgenze *(b, b)*

formati da sostanza fondamentale alquanto disgregata, nella quale sono sparse grosse capsule *(c, c, c)* che racchiudono capsule secondarie spesso in buon numero.

In alcune sezioni, sui punti corrosi o sopra i limiti delle sporgenze si vedono grosse capsule semi-libere oppure capsule in parte corrose che hanno lasciato sortire alcune delle capsule secondarie che contenevano.

Allontanandosi gradatamente dai limiti corrosi della cartilagine si vede a poco a poco *(d, d, d)* diminuire la proliferazione cellulare e alquanto più in fuori la cartilagine si trova in condizioni normali.

Le sfaldature ancora più avanzate mostrano una minuta sfibratura della sostanza fondamentale verso i limiti della corrosione. Alla base delle sfibrature le capsule in via di proliferazione, vi si trovano in abbondanza e quà e là accumulate e comprimentesi a vicenda. Dove più si vede alterata la sostanza fondamentale si incontrano non poche volte capsule molto più voluminose di tutte le altre con pareti sottili che non contengono già capsule secondarie, ma moltissimi nuclei a contorno ben spiccato; anzi non è infrequente di trovare in punti diversi della sostanza fondamentale vicina a quella più alterata un vero infiltramento nucleare, dovuto forse all' essersi resi liberi i nuclei contenuti in queste grossissime capsule per fusione delle pareti di queste nella sostanza fondamentale in via di disgregarsi.

Sopra sezioni verticali fatte vicino al limite delle sfaldature ed estese a tutto lo spessore della cartilagine, si può seguire la proliferazione cellulare fino negli strati profondi, quantunque in tutti i casi sia sempre più rimarchevole negli strati superficiali.

Anzi è importante il fatto che nell' esame microscopico di sfaldature assai profonde, eccettuato il caso in cui il tessuto osseo sia già scoperto, si trova lo strato profondo calcificato della cartilagine in gran parte immutato.

Ho detto più sopra che alcune volte invece d' avere, come d' ordinario, le lesioni delle articolazioni limitate nelle parti anteriori delle superficie dell' articolazione astragalo-navicolare, si possono sviluppare in parecchi punti di esse.

In queste condizioni, seguendole nel loro avanzarsi sopra diversi preparati, si nota che a guisa di tanti piccoli centri si estendono lentamente e spesso si approfondano, lasciando fra loro porzioni di cartilagine che studiate al microscopio presentano tutti i loro caratteri normali.

Ed è più notevole ancora che a lesioni articolari più avanzate, quando cioè esistono quà e là delle vere corrosioni del tessuto osseo, le porzioni di cartilagine interposte a queste mostrano all' osservazione microscopica alterazioni ben poco rilevanti.

Queste osservazioni microscopiche mi assicuravano che l' alterazione delle cartilagini, così spesso riscontrata nell' articolazioue astragalo-navicolare, non era altrimenti dovuta ad un processo regressivo, ma invece ad un vero processo irritativo, ad una lenta condrite, che induceva nelle capsule cartilaginee una proliferazione attiva, per cui la sostanza fondamentale si permutava e si disgregava. E

credetti a tutta prima che questo processo, estendendosi gradatamente agli strati profondi, si propagasse al tessuto osseo e che per tal modo si determinassero sulle superficie articolari le gravi alterazioni che tante volte vi avevo constatate.

Ma dopo aver ripetute queste stesse osservazioni, m'avvidi che non poteva essere ammesso questo modo d' estendersi delle lesioni, dalla cartilagine cioè al tessuto osseo, perchè gli stava contro il fatto importante che la proliferazione cellulare cioè della cartilagine, mentre si rilevava attivissima ne' suoi strati superficiali, andava man mano decrescendo verso gli strati profondi; che anzi lo strato calcificato di essa, si manteneva a lungo inalterato anche quando lo si ricercava in prossimità a vere corrosioni del tessuto osseo.

Allora portai l' esame sul tessuto osseo sottoposto alle cartilagini alterate e mi servii specialmente del navicolare e qualche volta del triangolare, come quelli sui quali si potevaao più facilmente praticare delle sezioni esatte.

Per rammollire il tessuto osseo al grado opportuno, usai leggere soluzioni d'acido idroclorico o d' acido cromico. I preparati migliori però li ottenni sopra ossa trattate con diluitissime soluzioni d' acido idroclorico.

Le sezioni verticali fatte in corrispondenza alle zonette spulite della cartilagine e prolungate a più della metà dello spessore del navicolare, lasciano vedere già nel tessuto osseo ad esse sottoposto delle differenze che si rilevano con più sicurezza dal confronto coi punti prossimi.

Difatti i vasi aversiani (Fig. 1.ª, Tav. II) del tessuto osseo, che sta sotto a queste leggere alterazioni della cartilagine, sono più dilatati di quelli delle parti del tessuto vicino, e penetrano più in alto formando anse più marcate, vicino al limite fra lo strato profondo calcificato della cartilagine e lo strato superficiale dell' osso, il quale in questa parte nelle condizioni normali si sa che è disposto a sporgenze papilliformi con una certa regolarità.

In alterazioni più inoltrate della cartilagine, quali la striatura di essa e l' esfogliazione dei suoi strati superficiali verso i profondi, l' osso sottoposto mostra sempre mutamenti più cospicui.

Difatti nelle Figure 2.ª e 3.ª, Tav. II tolte da sezioni verticali di navicolare in cui è conservata la cartilagine che era intaccata ne' suoi strati medi e quà e là nei profondi, si possono verificare i mutamenti più gravi che si sono stabiliti nell' osso. I vasi aversiani si vedono ora semplicemente molto dilatati, ora dilatati e varicosi in corrispondenza di quei punti nei quali la cartilagine è più alterata, e ciò molto più marcatamente negli strati superficiali dell' osso. Quà e là le varicosità si riuniscono e formano delle lacunette, mentrecchè seguendo i vasi aversiani più sotto si vedono di più in più piccoli e poco più oltre hanno le dimensioni e l' aspetto normali.

La disposizione delle sporgenze papilliformi dello strato superficiale dell' osso in contatto collo strato profondo calcificato della cartilagine, vedesi già alquanto mutato anche nei primi gradi dell' alterazione della cartilagine, (Fig. 1.ª, Tav. II);

nei gradi più avanzati, queste sporgenze ossee si vedono giungere molto più in alto, ora assotigliate al loro apice, ora ingrossate e alquanto schiacciate, ora con limiti molto ondulati, oppure quà e là addossate fra loro formano piccole masse prominenti. Le anse dei vasi aversiani si vedono più spesso penetrare nel mezzo di queste sporgenze dove si fanno molto varicose.

In sezioni orizzontali e verticali fatte in corrispondenza di esfogliazioni della cartilagine, limitate in superficie, ma che abbiano raggiunto gli strati profondi e dove non sia rimasto che lo strato calcificato, le varicosità dei vasi aversiani sono numerosissime subito sotto e tutt' attorno alla parte esfogliata della cartilagine e confluiscono in parecchi punti formando delle lacune; mentrechè un poco più in fuori i vasi aversiani conservano le loro normali dimensioni (Fig. 4.ª, Tav. II); oppure sopra le sezioni verticali si vedono prolungarsi per breve tratto negli strati sottoposti e poscia l' osso mostrasi sano.

In sezioni di ossa navicolari trattate colla tintura carminata del Baele, esaminando a forte ingrandimento quelle parti del tessuto osseo nelle quali esistono vasi aversiani varicosi, si rileva attorno a questi una discreta formazione di piccolissime cellule, certamente provenienti dalla proliferazione del tessuto connettivo dei vasi aversiani stessi, le quali nelle varicosità più grandi hanno acquistato già i caratteri di cellule plasmatiche midollari. (Fig. 1.ª, Tav. III).

Seguendo questa neoproduzione midollare sopra preparati tolti da navicolari e da triangolari alterati a diverso grado, si ha la prova che essa il più spesso progredisce assai lentamente. Incominciata in parecchi punti dei vasi aversiani, decalcifica attorno a sè l' osso e a poco a poco trasforma alcuni tratti dei vasi aversiani stessi in lacunette midollari. Queste però si dilatano assai lentamente e non è frequente di vederne confluire molte fra loro. Ciò è dato di osservare solo in preparati tolti da ossa nelle quali l' alterazione esisteva da lungo tempo. (Fig. 2.ª, Tav. III).

Anche in sezioni di ossa nelle quali le lesioni siano a grado elevato, non si trova mai questa neoproduzione molto estesa verso gli strati profondi, ma invece quasi sempre è restata limitata in alto dove si formano più abbondanti le lacunette midollari. In mezzo agli ammassi di cellule midollari è facile il vedere, specialmente in alcune delle lacunette più larghe e quando il processo è un poco avanzato, dei vasi capillari di nuova formazione.

Se però la neoproduzione midollare si estende poco negli strati profondi dell' osso, ha una marcata tendenza ad invadere gli strati superficiali più compatti che stanno subito sotto alla cartilagine e per tal modo il più spesso si fa strada sulla superficie articolare e vi sporge sotto forma di piccoli ammassi di un rosso pallido, pochissimo consistenti, nei quali al microscopio si trovano gli elementi midollari in via di disfacimento, oppure, in preparati con alterazioni più avanzate, in mezzo a questi ammassi midollari o isolatamente in punti diversi delle superficie articolari, si vedono delle sporgenze a forma di sottili coni acuminati di un bianco-grigiasto molto consistenti, formati di tessuto connettivo compatto.

Un fatto notevole che ho verificato spesso, è la resistenza che lo strato profondo calcificato della cartilagine oppone alla neoproduzione midollare del tessuto osseo sottoposto.

Osservando sezioni verticali di ossa navicolari, molte volte si trovano lacunette midollari che si sono elevate agli strati più superficiali dell' osso ed hanno già profondamente modificata la disposizione delle sporgenze papilliformi limitanti di questi, e nonostante lo strato sovrapposto calcificato della cartilagine non solo sussiste ancora, ma presenta delle alterazioni leggerissime.

Come pure non è del tutto raro il vederlo sussistere ancora non molto alterato, attorno ai limiti di zonette delle superficie articolari già usurate dalla neoproduzione midollare.

Quando è in via di distruzione per l' aumentatosi processo morboso sottostante, scompaiono lentamente i sali calcari, le capsule si ingrossano molto, si formano nel loro interno piccole sferule lucenti, la sostanza fondamentale si fa leggermente striata; poscia le une e l' altra lentamente si disfanno.

La neoproduzione midollare una volta raggiunte le superficie articolari è piuttosto raro, specialmeute nell' articolazione astragalo navicolare, che per successive trasformarioni de' suoi elementi (cellule plasmatiche, vasi capillari) formi dei veri bottoni carnei o delle escrescenze fungose, come succede in altre malattie articolari; in questa articolazione questo fatto si osserva eccezionalmente e sempre poi in punti molto limitati.

Più spesso invece il tessuto midollare subisce un lento e continuo disfacimento nei suoi strati superficiali per cui non giunge mai ad elevarsi molto sui piani dell' articolazione.

Questa neoformazione quantunque nel maggior numero dei casi proceda assai lentamente, ciò non ostante a poco a poco determina deformazioni cospicue delle ossa sulle quali si stabilisce; deformazioni che si rilevano molto più facilmente sul navicolare e sul triangolare tanto nei preparati freschi, quanto e meglio in quelli macerati. (Fig. 2.ª *a, b, c*, Tav. V).

Difatti quelle porzioni di queste ossa che di preferenza sono attaccate dal processo morboso a poco a poco si assottigliano e mostransi come schiacciate e qualche volta anche a grado altissimo.

Difatti in un pezzo patologico che ho raccolto ultimamente, una porzione della parte anteriore del navicolare è così consumata che sembra, dal terzo anteriore della sua superficie in avanti, come tagliata a bietta.

Qnesti graduali mutamenti di forma, di preferenza in queste ossa sulle quali poggia l' astragalo, determinano di necessità a poco a poco mutamenti di direzione della parte superiore dell' apparecchio tarsico, per cui ne soffrono i legamenti e l' articolazione del garetto (articolazione tibio-astragaliana).

Ho detto più sopra che alcune volte in mezzo agli ammassi midollari che sorgono dalle superficie dell' articolazione-astragalo navicolare od anche quà e là sulle superficie stesse, si mostrano delle sporgenze a forma di coni sottili costituite di tessuto fibroso ed è comunissimo il vederle contemporaneamente sulle due superficie articolari combaciantesi. Queste produzioni fibrose sono dovute a parziali trasformazioni del tessuto midollare; anzi sopra preparati ben riusciti, si può qualche volta dimostrare che la base di questi coni fibrosi si continua nelle lacunette midollari dell' osso sottostante.

Però quantunque sia frequentissimo constatare questo fatto, è molto raro di trovare che questi piccoli cordoni fibrosi abbiano subiti ulteriori mutamenti progressivi ed abbiano riuniti i punti corrispondenti delle due superficie.

Per cui anche nell' articolazione dell' astragalo col navicolare che presenti lesioni di antica data, non è frequente di vedervi associata la vera anchilosi centrale.

Ciò è tanto più notevole, che pure in altri casi nei quali, quantunque con certezza si possa provare, come vedremo, che gravi lesioni sulle superficie di quest' articolazione vennero riparate da nuovo tessuto osseo dovuto a trasformazione degli elementi midollari, non ostante anche allora è difficile il poter constatarvi anchilosi che immobilizzi del tutto le due ossa.

In quei pochi casi nei quali si trovano riunite le due superficie dell' articolazione astragalo-navicolare, lo sono solo in punti limitatissimi, più d' ordinario, come dissi, per mezzo di tessuto fibroso, più di rado per tessuto osseo. (Fig. 5.^{a}, Tav. III).

Fra il navicolare e il triangolare invece è dato più di sovente il trovare la riunione delle loro superficie, quantunque però non tutte le volte che si ha difficoltà a disgiungere questo due ossa, si tratta di vera anchilosi centrale. Difatti in parecchi casi si trova che la resistenza che oppongono ad essere separate, dipende da rigidezza del loro legamento interosseo oppure da produzione osteofitica periferica, nel qual ultimo caso tolto, con tratti di sega, quest' ostacolo, si possono trovare le superficie articolari non riunite e sane, oppure presentare corrosioni simili a quelle delle superficie dell' articolazione astragalo-navicolare.

La neoproduzione midollare sulle superficie articolari corrispondenti di queste due ossa, si trova quasi sempre meno estesa che nell' articolazione astragalo-navicolare; più spesso anzi l' alterazione esiste in uno solo o in pochi punti, separati da spazi nei quali la cartilagine è pochissimo modificata.

Nell' articolazione fra il triangolare e il metatarso trovai, più di frequente che nell' altra sopra menzionata, la neoproduzione midollare occupare quasi completamente le due superficie che si corrispondono. Quando, tanto nella prima che in quest' ultima articolazione, la neoproduzione midollare è molto estesa, o non esiste anchilosi centrale fra le due superficie od è rappresentata solo da alcuni fascetti di tessuto fibroso poco resistenti, come succede nell' articolazione astragalo-navicolare.

Invece nei casi di lesioni ossee più limitate, la neoproduzione midollare che in-

vade alcuni punti delle loro superficie, giunge ad ossificarsi ed allora si possono stabilire delle vere fusioni di queste ossa.

Non sempre però la neoproduzione midollare produce sulle superficie dell'articolazione astragalo-navicolare e sulle altre le gravi alterazioni che ho fin quì descritte.

In alcuni casi si può constatare che la neoproduzione si fa stazionaria e rispetta gli strati più superficiali dell' osso.

In allora è notevole il vedere la parte di superficie articolare, al disotto della quale si è arrestata la neoproduzione, levigatissima; quantunque priva di tutti gli strati della cartilagine, ad eccezione però di quello profondo calcificato, che si è anzi molto indurito.

Ciò non rende molto sensibilmente irregolare questa parte di superficie articolare, che anzi è appena più bassa della rimanente e lievemente inclinata verso il magine anteriore dell' osso.

Spicca questa porzione di superficie articolare sulla rimanente sana pel suo aspetto biancastro lucente, che la fa assomigliare ad una vetrificazione. Queste superficie pulite e lucenti le ho spesso trovate sulla metà anteriore dell' astragalo e sulla metà corrispondente del navicolare, ed ancora qualche volta fra questo e il triangolare.

È piuttosto difficile sopra un navicolare che presenti questa particolarità, l'eseguire sezioni verticali senza avere prima rammollito l' osso; perchè nel volere assottigliare a sufficienza la lamina ossea ottenuta, lo strato durissimo superficiale si distacca quasi sempre; solo qualche volta si riesce a conservarne attaccati all' osso dei pezzettini. Sull' osso rammollito in una leggerissima soluzione d' acido idroclorico si può tenerlo in posto in tutta la lunghezza del preparato; però allora lo strato calcificato non si presenta più esattamente cogli stessi caratteri che aveva sulla superficie articolare.

Sulle sezioni verticali ottenute nel primo modo, la strato calcificato si mostra molto addensato e tutto pieno di minutissime granellazioni opache; e non si lascierebbe veramente riconoscere per lo strato profondo della cartilagine se non si avesse da confontarlo con quello delle sezioni ottenute sull' osso rammollito. In queste ultime, scomparse molte delle granellazioni calcari, si scergono assai bene le capsule, quantunque rigonfiate.

Le sporgenze papilliformi sottostanti, sono più larghe, ma depresse e disposte molto irregolarmente; quantunque formate di stratarelli ossei più compatti; nel centro, o verso la loro base vedonsi o anse vascolari varicose o più spesso vacuoli e lacunette, che si estendono pure negli strati ossei sottoposti. Le trabecole ossee che le separano sono in alcuni punti molto dense, in altri meno. Nelle lacunette più superficiali e in quelle sottostanti si trova tessuto connettivo, che in alcuni

punti ha un aspetto fibroso; mentrechè in altri sono ben distinti ancora gli elementi cellulari. Più spesso è dato di poter seguire sopra parecchie lacunette i diversi gradi di sviluppo di esso.

Altre volte si trovano gli strati ossei superficiali così addensati che è scomparsa affatto la disposizione loro a sporgenze papilliformi e sotto a questi le lacunette vedonsi più rare e più ristrette. Entro ad esse si trova tessuto connettivo che nei limiti colle trabeccole mostra la trasformazione de' suoi elementi cellulari in corpuscoli ossei che si addossano alle trabeccole stesse e le ingrossano.

Però questa iperplasia ossea è eccezionale il trovarla sparsa uniformemente negli strati superficiali; che anzi è comune il vederla ora più sviluppata, ora meno in punti poco distanti fra loro.

È stato già più sopra notato che quando la neoproduzione midollare ha invase le superficie articolari, si osservano spesso delle trasformazioni parziali degli elementi midollari in tessuto fibroso sotto forma di sottili sporgenze a cono le quali però quasi mai raggiungono una organizzazione più elevata.

Però alcune volte, anche quando la neoproduzione midollare ha raggiunte le superficie articolari, si possono pure osservare e seguire le trasformazioni di questa in tessuto osseo che ripara in parte i guasti da essa prodotti.

Così a cagione d' esempio sul navicolare ho osservato spesso, in prossimità a masse midollari, porzioni di superficie articolare irregolarmente ondulate, molto dure e levigate, formate da tessuto osseo di nuova formazione. Anzi sull' astragalo e sul navicolare ho potuto constatare in alcuni casi una vera eburnazione estesa a tutta la parte delle superficie articolari state prima invase dalla neoproduzione midollare.

Che l' eburnazione che si osserva sopra queste superficie sia veramente formata da tessuto osseo di nuova formazione si rileva facilmente all' esame microscopico. Difatti sopra sezioni verticali di navicolare, che presentavano questa eburnazione ben marcata, si vede il limite della superficie molto ondulata per irregolari sporgenze e infossature costituite da corpuscoli ossei addensati, che formano ora strati più grossi, ora più sottili, sotto i quali esistono ancora lacunette, di dimensioni assai diverse nei differenti punti, colmate da tessuto connettivo compatto. (Fig. 4.ª Tav. III).

Queste osservazioni estese a tutti i gradi delle lesioni presentate dalle ossette tarsiche, dimostrano ad evidenza che il loro punto di partenza consiste in un processo irritativo nel più dei casi assai lento, che si stabilisce nel tessuto osseo.

Esso induce a tutta prima una alterazione nutritiva degli elementi del tessuto connettivo dei vasi aversiani. A poco a poco questi elementi si trasformano in

cellule plasmatiche midollari le quali decalcificano attorno a sè il tessuto osseo assottigliando le laminette dei trabecolati. Distruggono in parecchi punti gli strati ossei superficiali più compatti e invadono più o meno estesamente le superficie articolari.

È evidente che anche nei primordi di questo processo gli strati superficiali dell' osso vengono in alcuni punti leggermente sollevati; ne risulta un contatto più forte delle superficie delle cartilagini d' incrostazione fra loro, da cui una irritazione delle capsule cartilaginee degli strati superficiali dapprima, seguìta poscia dalla esfogliazione e dalla lenta distruzione di questi e dei sottoposti.

La neoproduzione midollare può, come in altri casi di lenta ostite, dopo avere corrose le parti prossime dell' osso, arrestarsi nella sua evoluzione e lentamente iniziarsi una trasformazione degli elementi plasmatici midollari, per loro natura assai instabili, in elementi più avanzati e definitivi, quali sono appunto il tessuto fibroso e il tessuto osseo, che riparano, in parte almeno, le lesioni esistenti negli strati dell' osso e alcune volte pure quelle stabilitesi sulle superficie articolari.

La caratteristica di questo processo nel tessuto delle ossa tarsiche, oltre la sua lentezza, è quella di mantenersi localizzato per lungo tempo ad alcune parti dell' osso e precisamente in quelle nelle quali è facile il dimostrare che l' azione della causa irritante può ripetersi con frequenza. Ad evidenza lo provano le lesioni che tanto spesso troviamo sopra porzioni limitate del terzo interno o della metà anteriore delle superficie articolari dell' astragalo e del navicolare, altre volte del triangolare e del metatarso ecc. e colà rimangono e si aggravano senza che si possano constatare lesioni nell' altre porzioni delle medesime superficie articolari.

Però non debbo tacere che in alcuni casi, invero piuttosto rari, le lesioni articolari che ho descritte, si possono sviluppare su porzioni delle superficie articolari che corrispondono al lato esterno del garetto e ciò specialmente si osserva in soggetti che hanno viziata la direzione dell' arto posteriore.

Nella Fig. 2.ª *a, b, c,* Tav. IV ho fatte delineare a due terzi dal vero le ossa del secondo rango del tarso sinistro di un cavallo che servì agli esercizî di chirurgia.

Era un piccolo cavallo comune con viziata direzione dei quattro arti. Quelli anteriori presentavano una rilevante deviazione dei piedi in fuori; l' arto posteriore sinistro era più del destro incurvato all' indentro incominciando dalla faccia esterna del garetto fino al piede. Zoppicava dall' arto sinistro senza che al garetto si notasse sensibile deformazione.

Raccolto il preparato trovai alterazioni leggere dei tessuti fibrosi profondi dal lato esterno del garetto, normali quelli delle altre parti. Lievissime sporgenze osteofitiche nella metà esterna dei bordi del navicolare e del triangolare; le superficie articolari combaciantesi di queste due ossa sono profondamente alterate. solo però nella porzione che costituisce il loro terzo esterno, mentrechè l' alterazione è nulla nella metà interna. Tutte le altre articolazioni erano normali.

Alcune volte trovai pure *la superiore* delle due faccette articolari per le quali il calcagno si mette in rapporto *dal lato esterno* coll' astragalo, attaccata dal processo artritico, più d' ordinario però quando riscontravo nello stesso tempo alterazioni gravi nelle altre superficie specialmente dell' articolazione dell' astragalo col navicolare.

Ma la lesione a questa articolazione (calcaneo-astragaliana esterna) l' ho anche osservata isolatamente in un garetto raccolto da un cavallo che aveva servito esso pure agli esercizi chirurgici, e che in vita presentava una zoppicatura molto rilevante all' arto posteriore destro senza deformazione apprezzabile del garetto.

All' esame del tarso trovai la dianzi menzionata articolazione estesamente alterata mentrechè tutte le altre erano normali. Fatte macerare le ossa si rese evidente, oltre la corrosione delle superficie combaciantesi di questa articolazione, una leggera fioritura ossea limitata al lato esterno del calcagno proprio sul bordo osseo limitante le superficie articolari alterate.

Fra le alterazioni però che si stabiliscono al tarso nel cosidetto spavenio calloso è indubitato, che nel maggior numero dei casi non vi sono solo quelle che ho fin qui descritte, ma si incontrano pure produzioni osteofitiche alle volte cospicue aderenti ai bordi delle ossa del contorno interno del tarso e lesioni più o meno gravi alle diverse parti molli che lo circondano.

È a queste produzioni osteofitiche, come dissi in principio, che si attribuisce la maggiore importanza; da molti è ammesso che si formino prima di ogni altra alterazione.

Certamente se si limita l' esame a garetti con cospicue alterazioni e di antica data si sarebbe indotti a ritenere che le cose si passassero in questo modo. Ma se si fa una diligente ricerca sopra un grande numero di preparati, esaminandoli quando la deformazione loro esterna è assai diversa per grado e si confrontino fra loro, non si può a meno di convincersi del contrario.

Difatti si trovano, talune volte, lesioni gravissime sopra le superficie articolari dell' astragalo e del navicolare, sopra la faccia inferiore di questo e la superiore del triangolare, fra questo e la faccia inferiore del metacarpo principale o contemporaneamente o isolatamente, senza che si abbia sviluppo rilevante di osteofiti attorno ai bordi di queste ossa e senzachè le parti molli periarticolari corrispondenti siano alterate. Come pure s' incontrano casi nei quali con lesioni articolari antiche mancano affatto produzioni periostali.

Di questi preparati ne ho raccolti parecchi in questi ultimi anni e già da altri, ma particolarmente dai due Schrader, ne vennero descritti.

Pure dai pratici non sono ignorati alcuni casi nei quali ai segni di lesa funzione motoria corrispondente esattamente a quanto s' incontra nel cosidetto spavenio calloso, fa difetto la deformazione al lato interno del garetto dovuta all' osteoma;

ed è perciò che esclusa in questi casi qualunque altra lesione nelle rimanenti regioni dell' arto capace di produrre quella particolare alterazione di movimento e alcuni altri sintomi importanti; si conclude coll' ammettere il cosidetto *spavenio occulto,* volendo molto probabilmente con ciò indicare che appunto lesioni interne articolari possono dar luogo alla serie dei sintomi proprii del cosidetto spavenio calloso, indipendentemente dalla presenza dell' osteofito.

Alcuni però hanno negata qualunque importanza a queste lesioni interne articolari, nel determinare la serie dei sintomi che accompagnano lo spavenio calloso e tutto riferiscono all' osteoma, perchè ritengono che le lesioni delle supeficie articolari si stabiliscano esclusivamente fra il navicolare e il triangolare o fra questo e il metatarso e che, per la neoproduzione osteofitica periferica resesi immobili queste ossa, non possano più recare nocumento ai movimenti dell' animale; non avendo avvertito o avendo data poca importanza alle lesioni che così spesso si stabiliscono pure all' articolazione astragalo-navicolare.

Altri stimarono non essere provato che queste alterazioni alle superficie articolari di alcune ossa tarsiche siano sempre accompagnate da zoppicature quando manca l' osteoma.

Per mia parte ritengo questi insegnamenti errati, perchè ebbi opportunità di osservare alcuni fatti che chiaramente dimostrano che solo per queste lesioni articolari si possono avere i sintomi e spesso assai intensi del così detto spavenio calloso.

Nella Fig. 1.ª *a*, *b*, *c*, Tav. IV ho fatto rappresentare ridotte a due terzi le ossa del tarso destro di un cavallo che presentò una cospicua zoppicatura coi segni che si raccolgono nei casi di spavenio calloso; solo quì mancava affatto qualsiasi deformazione al lato interno del garetto. Tenuto in cura per qualche tempo nella nostra Clinica, venne poscia restituito al proprietario perchè non presentò miglioramento alcuno.

Dopo alcuni mesi venne condotto di nuovo alla Scuola affetto da pleurite acuta per la quale dopo pochi giorni morì.

Il garetto venne raccolto e esaminato a fresco e poscia macerato.

Le parti molli presentavansi in condizioni normali.

Le figure dimostrano chiaramente che una grave corrosione si è stabilita sulle superficie dell' articolazione astragalo-navicolare. Sul contorno di queste ossa non vi esiste osteoma.

Leggerissime fioriture ossee esistono solo verso il margine esterno del navicolare, colà appunto dove la corrosione ha raggiunto il limite anteriore delle superficie articolari.

Il navicolare e il triangolare non erano anchilosati e tutte le altre ossa erano sane.

Ma da alcuni preparati si può raccogliere la prova che gli osteofiti che coprono i bordi delle ossette tarsiche incominciano in quei punti nei quali le alterazioni hanno raggiunto il limite anteriore delle superficie articolari.

La Fig. 3.ª *a, b, c*, Tav. V rappresenta il navicolare, il triangolare e il piccolo cuneiforme del tarso sinistro di un cavallo che servì alle esercitazioni chirurgiche e che in vita presentò sintomi simili a quelli del cosidetto sparagagno, senza mostrare apprezzabile deformazione al lato interno del garetto.

Nel pezzo a fresco le parti molli più profonde erano alquanto alterate, l'articolazione astragalo-navicolare sanissima, quelle delle ossa del second' ordine col metatarso pure sane; solo il navicolare, il triangolare e il piccolo cuneiforme erano così fortemente riuniti che non mi fu possibile separarli.

Dopo macerato il pezzo trovai sui bordi anteriori del navicolare e del triangolare piccole fioriture ossee che sulla metà esterna riunivano in alcuni punti le due ossa, ma non verso la metà interna, quantunque quì gli osteofiti avessero raggiunto uno sviluppo maggiore. Con tratti di sega divisi circa la metà esterna del navicolare che separato dal sottostante triangolare mostrano una gravissima alterazione in ambedue le superficie combaciantesi. E colà appunto dove le lesioni raggiunsero il bordo anteriore delle superficie e lo deformarono molto, gli esteofiti vi si vedono pure assai più sviluppati.

Basta darsi la pena di esaminare un buon numero di garetti ammalati, per avere sovente la conferma di questo modo di svilupparsi degli osteofiti; i quali a loro volta determinano permutamenti nelle parti vicine del periostio e così si ha ragione del crescere e dell' estendersi di essi, formando spesso rilevanti esostosi che deformano il lato interno del garetto.

Non è però a credere che in tutti i casi di cospicue produzioni ossee a questa regione del garetto, esse siano un prodotto esclusivo del periostio, spesso invece l' accrescimento esagerato di esse è dovuto all' ossificazione della parte profonda dei tessuti molli che sta sopra agli osteofiti periostali; anzi qualche volta non si tratta in tutto di vere ossificazioni del tessuto connettivo e del tessuto fibroso, ma di degenerazione calcare di questi; difatti masse cospicue, trovate nel sezionare a fresco tarsi molto deformati, le quali hanno la consistenza ossea e che sembrano formare un tutt' uno cogli osteofiti periostali, si vedono distaccarsi e qualche volta disgregarsi, quando si fanno macerare i pezzi ammalati, rimanendo allora più spesso attaccate alle ossa solo le sue produzioni periostali.

Queste nel maggior numero dei casi non hanno per loro stesse un esagerato volume ed è raro di trovarle riunite in una sola massa; invece d' ordinario sono sparse su parte o sulla totalità dei bordi del navicolare e del triangolare, su quelli di quest' ultimo e del metatarso o su tutti ad un tempo e le riuniscono formando un cercine periferico che anchilosa le articolazioni loro.

Se si confronta tutta la serie delle alterazioni che esistono ordinariamente nei casi avanzati del cosidetto spavenio calloso, con ciò che è dato osservare in quei casi di infiammazione del tarso, che incominciata nei tessuti periferici si approfonda gradatamente, determinando estese periostiti attorno alle sue diverse articolazioni; si ha facilmente la prova che le superficie articolari si mantengono inalterate o per moltissimo tempo o per sempre, quantunque spesso l' abbondantissima neoproduzione osteofitica determini l' anchilosi di tutto l' apparecchio tarsico o di diverse delle sue articolazioni.

Le contusioni gravi, troppo forti o troppo prolungate irritazioni sulla pelle che circonda il garetto, possono essere alcune volte seguite da queste estese periostiti sulle ossa tarsiche, senzachè all' esame si riscontrino lesioni rilevanti nelle articolazioni corrispondenti.

Nella Fig. 1.ª *a*, *b*, *c*, *d*, Tav. V ho fatte rappresentare ridotte a due terzi le ossa di un garetto destro di cavallo, da tutti i bordi delle quali si eleva una cospicua produzione osteofitica che ne circonda completamente le articolazioni.

Questo pezzo patologico lo raccolsi da un cavallo al quale un empirico aveva applicato su tutta la pelle dei due lati del garetto dell' acido solforico per guarirlo da voluminosi vesciconi.

Dopo cessata l' acutezza dell' infiammazione, come risultato di questa violenta cura, rimase una grande deformazione all' arto, rappresentata da una sclerosi della pelle e dei tessuti bianchi del tarso, estesa fino al terzo inferiore circa della gamba, che aveva resa pressochè impossibile la flessione del garetto.

L' animale venne visitato e trovato in questo stato, quando già erano trascorsi alcuni mesi dalla fatta applicazione caustica; il processo attivo era definitivamente cessato. Dichiarato il caso inguaribile, il proprietario fece lavorare il cavallo per alcun tempo al passo e poscia lo mandò alla Scuola perchè fosse abbattuto.

La pelle, i tessuti fibrosi, i legamenti, i tendini dei muscoli che si inseriscono sui contorni del garetto, quelli che vi scorrono sopra, formavano quasi dapertutto una massa sola che aderiva fortemente alle ossa tarsiche. Fatto macerare il pezzo patologico, le ossa si separarono e come è dimostrato nella Fig. 1.ª *b, c, d,* della Tav. V, le superficie articolari dell' astragalo, del calcagno, del navicolare, del triangolare ecc. non mostrano corrosione alcuna. quantunque siano circondate da una neoproduzione osteofitica oltremodo sviluppata, la quale cominciava ad atrofizzare i limiti periferici delle superficie articolari di alcune di queste ossa.

Fatti come questo, si possono osservare in buon numero sopra diversi preparati nel nostro Museo, nei quali vicino a produzioni osteofitiche spesso esageratissime, si mantennero intatte le superficie articolari e questo non solo si verifica per le articolazioni tarsiche, ma ancora nel carpo e in altre articolazioni del cavallo e dei bovini.

Sui bordi dell' articolazione astragalo-navicolare gli osteofiti nel cosidetto spavenio calloso quasi mai acquistano un grande volume e nel più dei casi si vedono sporgere immediatamente da quelle porzioni della periferia delle superficie articolari che sono a più alto grado alterate. Anzi alcune volte quando il navicolare è molto deformato, queste produzioni ossee periferiche sono rappresentate da piccole masse arrotondate, liscie alla loro superficie, lassamente riunite ai tessuti fibrosi sovrastanti, che non sono una produzione dipendente dal periostio, ma vere sporgenze che sorgono direttamente dal bordo anteriore dell' osso.

Trovai in alcuni casi che queste sporgenze, sotto forma di piccoli tumoretti rotondeggianti non avevano una consistenza ossea, ma erano alquanto cedevoli e si lasciavano un poco intaccare dal coltello.

In quei tumoretti che erano più molli, ho potuto diverse volte, praticandovi sezioni verticali che interessavano un poco l' osso dal quale sorgevano, rilevare che il loro interno era formato da un delicato trabecolato di sottili laminette ossee e qua e là da piccoli ammassi di cellule cartilaginee; gli spazi del quale trabecolato erano riempiti da cellule midollari che in parecchi punti si vedevano in continuazione con quelle delle lacunette dell' osso sottostante ammalato.

E sopra sezioni ben riuscite di questi tumoretti, scelti a grado diverso di sviluppo, ho potuto pure facilmente seguire la trasformazione delle cellule midollari, raccolte fra le trabecole, in tessuto connettivo e quindi in corpuscoli ossei, quantunque in altri punti si può ancora riscontrare la trasformazione in cellule cartilaginee. Le quali ultime sopra le sezioni microscopiche si vedono in piccolissimi cumuli a contorni irregolari, che vengono compressi dal predominante permutarsi degli elementi del tessuto connettivo in corpuscoli ossei, e si trasformano specialmente verso la periferia del tumoretto in piccole masse calcari. Tutto questo mi persuade, che le esostosi, sopra queste ossa alterate fino ai limiti delle loro superficie articolari, non provengono dal periostio, ma che invece sono proprio legate all' alterazione intima del tessuto osseo dal quale si elevano.

È pure sopra questo stesso bordo anteriore del navicolare che qualche volta si vedono tumoretti più cospicui, che col crescere sporgono vieppiù e spingono avanti a sè la capsula dell' articolazione astragalo-navicolare, fondendosi con porzione di questa e a poco a poco acquistando una consistenza lapidea.

Eccezionalmente possono raggiungere un grande volume, spingersi in alto, occupare una parte dello spazio della cavità articolare del garetto e sporgervi semiliberi.

Un esemplare importante di questo genere, che raccolsi parecchi anni fa, si conserva nel nostro Museo al N. 2100. È un tumore molto mobile contenuto nella cavità articolare del garetto che ha il volume di un grosso uovo, il quale aderiva per alcuni punti limitati sulla metà interna del contorno dell' articolazione astragalo-navicolare. Era ravvolto da una sottile membrana fibrosa levigatissima ed era costituito di sostanza calcare e qua e là presentava dei centri ossificati.

Colla macerazione distrutte le parti molli, si distaccarono pure le calcificazioni, rimase il fulcro osseo, molto più piccolo del tumore esaminato a fresco, costituito da un lasso tramite di sottili lamelle.

La scarsa produzione osteofitica sui bordi dell' astragalo e del navicolare dà ragione del non trovare quasi mai una completa immobilizzazione di questa articolazione.

Più spesso nei casi molto gravi e quando i caratteri delle lesioni delle superficie articolari provano che esse sono di data antica, si trovano i tessuti fibrosi che circondano quest' articolazione ingrossati, molto induriti e aderenti alle sporgenze osteofitiche dei bordi di queste due ossa, le quali per tal modo sono tenute riunite abbastanza solidamente.

Le alterazioni patologiche dei legamenti funicolari e capsulari e delle membrane sinoviali che accompagnano le produzioni osteofitiche, per quanto ho potuto rilevare dagli esami fatti, stanno sempre in proporzione diretta con queste e in parte ne sono una conseguenza.

In generale più si esaminano lesioni antiche al tarso più si vedono avanzate le alterazioni ai tessuti fibrosi. Le parti di questi situate più profondamente si alterano via via col crescere e coll' estendersi degli osteofiti stessi; una lenta iperplasia li invade per cui si ingrossano, si induriscono e in alcuni punti possono pure trasformarsi in tessuto osseo o subire parziali degenerazioni calcari.

I legamenti funicolari laterali del garetto, particolarmente quelli del lato interno, e grande parte del legamento capsulare dell' articolazione tibio-astragaliana, necessariamente partecipano essi pure all' alterazione, poichè col crescere della deformazione del navicolare e del triangolare e della neoproduzione osteofitica si modifica vieppiù la direzione del calcagno e dell' astragalo e quindi allora i legamenti sopportano trazioni e distensioni molto maggiori dell' ordinario, le quali favoriscono in questi il mantenimento di una lenta irritazione formativa.

Se poi si fa attenzione alla limitatissima estensione dei movimenti di un garetto attaccato dal cosidetto spavenio calloso rappresentato da un tumore osseo cospicuo, anzi alla sua quasi rigidezza, è facile di persuadersi come più forti dell' ordinario debbano essere gli urti che si ripercuotono sulle parti fibrose che lo circondano, specialmente nei casi comunissimi in cui gli animali quantunque zoppi, vengono nonostante assoggettati al lavoro.

Le molte volte che ebbi fra mano tarsi di cavallo a gradi diversissimi alterati, non tralasciai mai di ricercare lo stato della cosidetta borsa mucosa del lato interno del garetto.

Premetto che la borsa indicata in questa regione e contrassegnata da Dieckeroff come punto di partenza frequente dello spavenio calloso, può meglio indicarsi come una borsa sinoviale che nella sua parte superiore racchiude la branca tendinea interna del muscolo tibiale anteriore (muscolo tibio-premetatarsiano del Girard).

La sua parete anteriore è costituita da una membranella fibrosa molto sottile in alto, che nel preparato a fresco dopo tolta la pelle, lascia alquanto trasparire la branca tendinea che racchiude; si ingrossa un poco più nell' altra sua porzione che aderisce fortemente al legamento astragalo-metatarsiano, formando su questo una superficie levigatissima, sulla parte più alta della quale, disposta leggermente a puleggia, scorre la branca tendinea interna del muscolo sopradetto, circondata da sottile membrana sinoviale. Il rimanente si estende in basso fino circa al livello dei capitelli dei metatarsi. Perciò essa colla sua parte superiore rappresenta una guaina tendinea che corrisponde esattamente al contorno periferico interno del navicolare, del triangolare e del piccolo cuneiforme; quelle ossa appunto nelle quali più spesso abbiamo veduto stabilirsi le alterazioni articolari.

Ora sopra garetti poco deformati al lato interno, questa borsa la trovai sempre sanissima; in quelli che lo erano di più, ho bensì trovata ingrossata parecchie volte la sua membrana fibrosa esterna per cui non traspariva più la entrostante branca tendinea, ma apertala non ho mai riscontrate lesioni importanti.

Ancora in quei casi nei quali il lato interno del tarso mostra ossificazioni estese a buona parte dei legamenti e dei tessuti fibrosi, potei sempre mettere allo scopèrto quella parte superiore della borsa che contiene la branca tendinea anzidetta e non poche volte aprire ancora la porzione inferiore di essa. Anche a questi alti gradi di lesioni, vedesi la branca tendinea occupare la sua solita puleggia che pare diventata più profonda solo perchè gli osteofiti sottostanti sporgono nei limiti superiore ed inferiore di essa.

Il piano sul quale poggia la branca tendinea anzidetta è reso un poco irregolare dalle sottostanti gravi produzioni morbose, ma conservasi liscio e spesse volte lucente. La branca tendinea è spesso in questi casi assottigliata, i suoi fasci fibrosi non sono più còmpatti come d' ordinario, spinta come è gradatamente in fuori dal crescere dell' osteama. La membrana sinoviale è in alcuni punti ingrossata, quasi mai totalmente.

Lesioni tutte di ben poca importanza per loro stesse e che la perdono completamente quando si raffrontino cogli alti gradi d' alterazione raggiunti dagli altri tessuti che gli stanno attorno. Con questo non voglio già negare che qualche volta la borsa sinoviale non possa isolatamente ammalarsi, ma non posso accettare che le malattie di questa possano produrre la serie dei gravi fatti che si succedono nelle parti interne delle articolazioni tarsiche.

L' avere ottenuto risultati colle operazioni eseguite sulla borsa stessa (apertura della borsa col coltello o con una punta di fuoco) non è prova di grande importanza in favore di questo modo d' intendere lo sviluppo dello spavenio calloso,

poichè basta riflettere che con diversi altri mezzi applicati alla faccia interna del garetto si ottiene la cosidetta *guarigione* dello spavenio.

L' applicazione del fuoco infatti, le frizioni irritanti, i caustici applicati sulla pelle della faccia interna del garetto, l' applicazione del setone possono condurre allo stesso risultato, di ottenere cioè in alcuni casi la diminuzione della zoppicatùra o di vederla affatto cessare.

Non è sfuggito però all' osservazione dei pratici il fatto importante, di vedere cioè in molti casi di cosidetto spavenio calloso esistente da qualche tempo, dietro un trattamento curativo, scomparire la grave zoppicatura che lo accompagnava, nello stesso tempo che si notava un sensibile aumento, anzi alcune volte un cospicuo aumento della deformazione al lato interno del garetto.

Il qual fatto, che ho pur io più e più volte verificato in casi di spavenio trattati o con frizioni irritanti o col fuoco o coll' applicazione del setone, stà a dimostrare che in questi casi non si ottiene una guarigione nel vero senso della parola, ma che più precisamente col determinare una infiammazione superficiale si modifica l' andamento del processo morboso interno o promovendo una salutare rivulsione verso le parti esteriori qnando il processo è incipiente, od elevando l'attività stessa del processo con che più facilmente può la neoproduzione midollare trasformarsi in elementi più stabili, che possano riparare in parte o totalmente le lesioni prodottesi sulle superficie articolari.

Anche le produzioni osteofitiche ne' suoi primi stadi di sviluppo possono determinare dolore, il quale può svanire quando esse si sono trasformate completamente in tessuto osseo. Appunto i trattamenti più usati in pratica possono contribuire ad ottenere più presto questo risultato.

È fuori di dubbio però, che alla produzione e mantenimento della zoppicatura nel cosidetto spavenio calloso, vi deve aver parte principalissima l' articolazione astragalo-navicolare che con tanta frequenza trovasi ammalata. Lo provano la sede delle lesioni sulle superficie di questa articolazione, la poca disposizione che hanno a riunirsi mediante solida anchilosi centrale, il poco sviluppo che acquista la neoproduzione osteofitica sui bordi delle due ossa che la formano, per cui a differenza di ciò che si verifica tanto di frequente fra i bordi del navicolare e del triangolare o fra quelli di quest' ultimo e del metatarso, solo più di rado o molto più tardi si forma attorno ad essa una ghiera ossea abbastanza solida da immobilizzarla.

È assai probabile che dipenda da questo il vedere in pratica molto più difficile la scomparsa della zoppicatura in quei casi di spavenio nei quali la neoproduzione osteofitica e l' ingrossamento dei tessuti fibrosi o non si fa o si mantiene a grado mite. Poichè non si può attribuire che a neoproduzione abbondante periferica, la quale rende più difficili o affatto impossibili i movimenti nell' articolazione astragalo-navicolare, il vedere in simili casi scomparsa o assai diminuita la zoppicatura quando sulle superficie di questa articolazione vi sussistono ancora lesioni cospicue.

Ritengo perciò che in quei casi di sparagagno inveterato nei quali in pratica si ottiene una diminuzione o la scomparsa della zoppicatura, il trattamento curativo possa pure avere molte volte per effetto di sviluppare una maggiore neoproduzione fibrosa attorno a questa articolazione, che consolidatasi vieppiù col tempo immobilizza queste superficie e per tal modo è tolta una delle principali condizioni di addoloramento durante l' esercizio.

Questa lenta artrite al tarso del cavallo venne da Schrader e da alcuni altri denominata *artrite secca*, considerandola analoga a quel singolare processo morboso che si sviluppa lentamente in alcune articolazioni dell' uomo e che dà luogo ad una serie d' alterazioni più comunemente conosciute sotto il nome di *artrite deformante.*

Veramente se si potessero solo prendere in considerazione le grossolane modificazioni dovute agli osteofiti e alle alterazioni dei tessuti fibrosi periarticolari, che si stabiliscono al tarso del cavallo, si potrebbe credere che una certa analogia esistesse fra questa artrite del cavallo e l' artrite deformante dell' uomo; ma considerando più davvicino il modo di svolgersi del processo morboso nelle ossa tarsiche, le alterazioni che induce nei capi articolari e il modo stesso che queste tengono nel ripararsi, si vede subito che una sostanziale differenza esiste fra questi due processi.

Il Prof. Riccardo Volckmann (1) che ha studiato nell' uomo più minutamente il processo dell' artrite deformante, ammette che la malattia si svolge nella cartilagine d' incrostazione. Una proliferazione si stabilisce su tutta la superficie di questa; più notevolmente però e di preferenza nel suo margine periferico, dove raggiunge un tal grado che forma un labbro irregolare di più in più sporgente, il quale a tutta prima frastagliato, si fa in seguito tutto gibboso e si ripiega a poco a poco in basso verso la diafisi.

Contemporamente nella superficie di contatto della cartilagine succede pure, quantunque a minor grado, la stessa proliferazione; e tanto nell' un posto che nell' altro gli elementi cartilaginei proliferati più vicini all' osso, si ossificano a poco a poco, formando al bordo libero numerosi tumoretti intrarticolari che restano per lungo tempo rivestiti da un sottil velamento cartilagineo, e dando luogo nel rimanente della superficie di contatto della cartilagine ad ossificazioni degli strati profondi di questa, le quali ossificazioni pel degenerarsi degli strati superficiali della cartilagine sono molte volte messe a nudo e formano le cosidette *superficie pulite.*

Vicino a questa attiva proliferazione agisce pure un processo d' atrofia il quale sarebbe ritenuto dipendente da semplice azione meccanica.

(1) Malattie delle ossa. Enciclopedia di patologia chirurgica. Vol. II, Parte II, Sez. 5 di Pitha e Billroth. — Napoli 1874, pag. 499.

La caratteristica fondamentale dunque di quest' affezione nell' uomo, sarebbe la iperplasia ossificante della cartilagine d' incrostazione.

Invece nella lenta artrite del tarso del cavallo la proliferazione della cartilagine si stabilisce nei suoi strati superficiali quando nel sottostante tessuto osseo è già incominciato il processo morboso e la cartilagine va distruggendosi di mano in mano che la neoproduzione si estende alle lamine ossee superficiali e le corrode.

Le *superficie pulite* sono quì formate a spese dell' ossificazione degli elementi midollari che hanno raggiunto la superficie articolare e vi costituiscono delle vere *eburnazioni*, le quali mai provengono dall' ossificazione degli strati profondi della cartilagine, quantunque alcune volte lo *strato calcificato* profondo di questa rimanga in gran parte, si indurisca e renda levigatissima e lucente la parte di superficie articolare sotto la quale il tessuto osseo si era alterato.

Le conclusioni che si possono ricavare dalle osservazioni esposte sono le seguenti:

1.° Nel cosidetto spavenio calloso l' alterazione incomincia ordinariamente in quelle ossa che formano la metà interna del garetto:

2.° Nel tessuto osseo di queste si sviluppa un processo irritativo pel quale ha luogo a spese del tessuto connettivo dei vasi aversiani una neoproduzione midollare che spesso corrode gli strati superficiali dell' osso e raggiunge le superficie articolari:

3.° Le alterazioni che si osservano sulle cartilagini d' incrostazione quando le lesioni dei tessuti periferici mancano o sono leggerissime, sono pur esse la conseguenza di un processo di proliferazione cellulare, ma dipendente dalle lesioni del tessuto osseo sottoposto:

4.° La neoproduzione midollare raggiunte le superficie articolari quasi mai o solo limitatamente si organizza in bottoni carnei o in vere fungosità:

5.° Nel processo irritativo che si stabilisce nel tessuto di queste ossa tarsiche vi si può riconoscere un periodo distruttivo nel quale la neoproduzione midollare tende lentamente ad estendersi ed un periodo di riparazione nel quale essa si trasforma in tessuto connettivo compatto o in tessuto osseo:

6.° La trasformazione degli elementi in nuovo tessuto osseo può stabilirsi qualche volta ancora quando essi hanno invase le superficie articolari e dar luogo alla eburnazione parziale o totale di queste:

7.° Fra alcune superficie articolari alterate la trasformazione degli elementi midollari in corpuscoli ossei determina l' anchilosi centrale, la quale però non si osserva od è solo rappresentata da alcuni fascetti fibrosi fra quelle superficie sulle quali le lesioni sono molto estese come ordinariamente accade nell' articolazione astragalo navicolare:

8.° Quando la neoproduzione midollare si arresta negli strati superficiali

dell' osso, può conservarsi in totalità o in grande parte lo strato profondo calcificato della cartilagine, il quale si indurisce e rende molto liscia e lucente la parte di superficie articolare sotto la quale si arrestò il processo morboso:

9.° Le produzioni osteofitiche più ordinariamente sono una conseguenza delle lesioni articolari. Però possono mancare od essere pochissimo sviluppate quando le lesioni articolari vi esistono gravissime:

10.° Le alterazioni nei tessuti connettivo e fibroso che circondano le ossa tarsiche vi sono determinate e dagli osteofiti e dalle deviazioni che necessariamente avvengono nella parte superiore dell' apparecchio tarsico per le deformazioni gradatamente crescenti che si stabiliscono in alcune delle sue ossa:

11.° La borsa sinoviale del lato interno del garetto non può essere ritenuta il punto di partenza frequente del cosidetto spavenio calloso, perchè non mostra alterazioni d' importanza neppure in quei casi nei quali la neoproduzione osteofitica e dei tessuti molli e le alterazioni alle superficie articolari sono assai cospicue.

12.° La lenta artrite del tarso del cavallo non è analoga alla artrite secca o artrite deformante dell' uomo.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1.ª Astragalo alla grandezza naturale del tarso sinistro di un cavallo dell' età di otto anni.

a superficie articolare inferiore estesamente corrosa.

b, b neoproduzione villosa della sinoviale.

c, c, c neoproduzione fibrosa ed osteofitica periarticolare.

d, d, d solchi paralleli impressi nella cartilagine d' incrostazione della troclea dell' astragalo.

Fig. 2.ª Superficie articolare superiore delle ossa del second' ordine dello stesso tarso sinistro.

a superficie articolare superiore estesamente alterata dal lento processo artritico.

b, b neoproduzione villosa della sinoviale.

c, c, c neoproduzione fibrosa ed ossea periarticolare.

Fig. 3.ª Estremità articolare inferiore della tibia corrispondente all' astragalo della Fig. 1.ª. Sulla sua cartilagine d' incrostazione sono assai distinti i solchi paralleli corrispondenti ai punti *d*, *d* della Fig. 1.ª; sono dovuti all' attrito aumentatosi fra le superficie combaciantesi della tibia coll' astragalo in seguito e alla deviazione di più in più crescente dell' astragalo stesso e delle alterazioni alle quali va incontro il legamento comune laterale interno di mano in mano che al lato interno del garetto aum nta la iperplasia fibrosa ed osteofitica.

Fig. 4.ª Sezione orizzontale della cartilagine d' incrostazione della faccia superiore del navicolare in corrispondenza d' una esfogliazione superficiale. (Ingrandita 200 volte e copiata dal vero dall' egregio Dott. Piana).

a, a lembo limitante l'esfogliazione della cartilagine che in alcuni punti mostra sfibrature a forma di festoni o sporgenze *b, b.*

c, c grosse capsule cartilaginee che racchiudono un numero cospicuo di capsule secondarie.

Tavola II.

Fig. 1.ª Sezione verticale di osso navicolare fatta in corrispondenza di una spulitura della cartilagine d'incrostazione della sua superficie articolare superiore. (Ingrandimento 80 v.)

a, a proliferazione delle capsule superficiali della cartilagine d'incrostazione.

b, b sporgenze papilliformi molto irregolari dello strato osseo superficiale immediatamente a contatto collo strato profondo calcificato della cartilagine.

c, c varicosità nei vasi aversiani.

Fig. 2.ª Sezione verticale di navicolare fatta in corrispondenza di una esfogliazione della cartilagine d'incrostazione della sua superficie articolare superiore. (Ingrandimento 40 v.)

a, a sfibratura che incomincia ad invadere gli strati medj della cartilagine d'incrostazione.

b, b strato calcificato profondo della cartilagine nel quale cominciano a mostrarsi le alterazioni.

c, c strato papilliforme osseo con disposizione irregolarissima sotto il quale si elevano le anse dei vasi aversiani già molto dilatate.

d, d vasi aversiani varicosi.

Fig. 3.ª Sezione verticale di navicolare fatta in corrispondenza di un consumo molto avanzato della cartilagine d'incrostazione della sua superficie articolare superiore. (Ingrandimento 40 v.)

a, a grosse capsule degli strati medj della cartilagine che verso la superficie vanno distruggendosi.

b, b strato calcificato profondo.

c, c strato osseo papilliforme.

d, d varicosità dei vasi aversiani che in parecchi punti formano già delle lacunette.

Fig. 4.ª Sezione orizzontale fatta in corrispondenza di una piccola e superficialissima usura del tessuto osseo della faccia articolare superiore del triangolare. (Ingrandimento 10 v.)

a piccola usura dell'osso.

b, b lacunette midollari formatesi pel graduale dilatarsi dei vasi aversiani.

Allontanandosi di più in più dall' usura *a* si vedono i vasi aversiani a poco a poco diminuire di volume *c*, *c*, fino a che in *d*, *d*, hanno le loro normali dimensioni.

Tavola III.

Fig. 1.ª Sezione verticale di navicolare con lesioni avanzate per dimostrare la neoproduzione midollare. (Ingrandimento 150 v.)
a, *a*, vasi aversiani dilatati.
b, *b* cellule midollari.
c, *c* tessuto osseo.

Fig. 2.ª Sezione verticale di navicolare condotta sopra ad usure della superficie articolare superiore prodotte dalla neoproduzione midollare. (Ingrandimento 12 v.)
a, *a* limite della superficie articolare usurata.
b, *b* tessuto osseo.
c, *c* lacunette midollari.

Fig. 3.ª Sezione verticale di navicolare condotta sopra regioni della sua superficic articolare superiore a grado avanzato eburnizzate. (Ingrandimento 12 v.)

Fig. 4.ª La stessa sezione ingrandita 100 volte.
a, *a*, *a* limite della snperficie eburnizzata costituita da corpuscoli ossei di nuova formazione.
b, *b*, *b* le lacunette midollari che si sono impiccolite e che contengono tessuto connettivo compatto.
c, *c* tessuto osseo addensato.

Fig. 5.ª Sezione verticale di astragalo e navicolare con lesioni articolari inveterate che hanno dato luogo alla riunione delle superficie articolari per mezzo di piccoli fasci fibrosi in continuità colle lacunette midollari (Ingrandimento 12 v.)
a, *a* fascetti fibrosi anzidetti.
b, *b* antiche lacunette midollari.

Tavola IV.

Fig. 1.ª *A* Ossa del tarso destro di un cavallo unitamente a porzione di tibia, con lievissime fioriture periostali sulla porzione interna del bordo dell' osso navicolare.

F.1.
d
d
d
a
b
c
c
b
c
F 2.
c
b
a
c
b
c
F.3.
F.4.
a
b
a
c
b
b
c
c
c
c
d
d
d
a
c
a
c

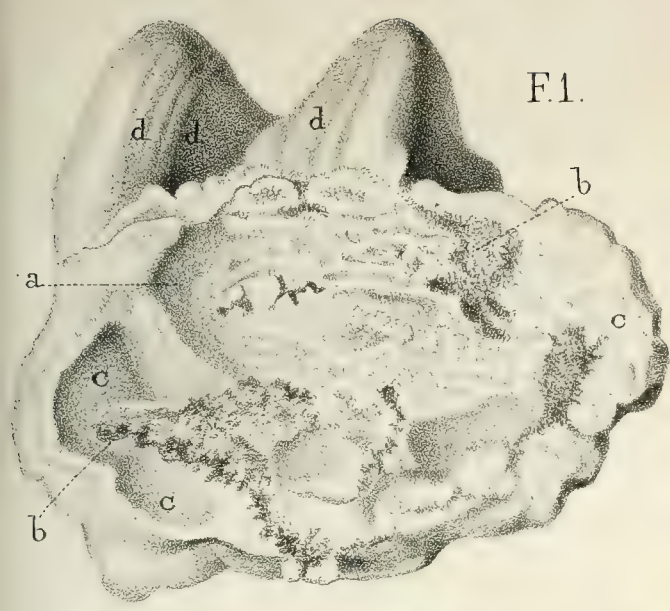
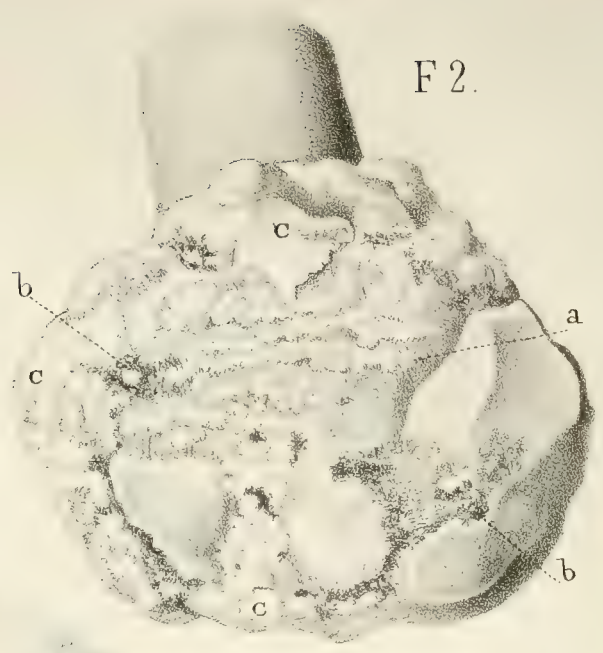
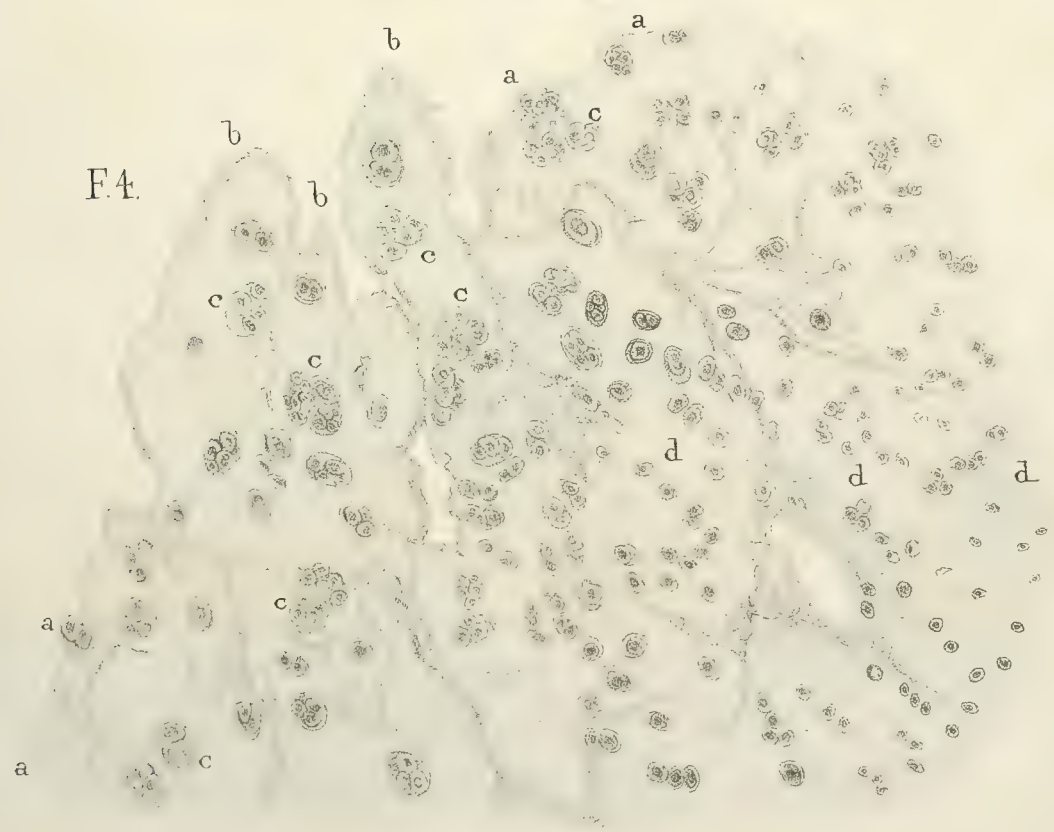
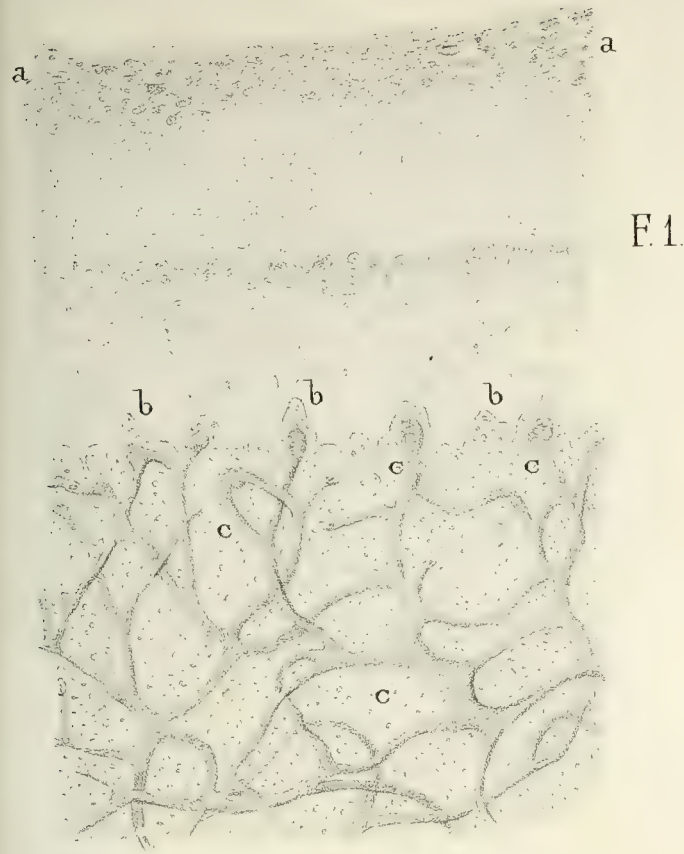
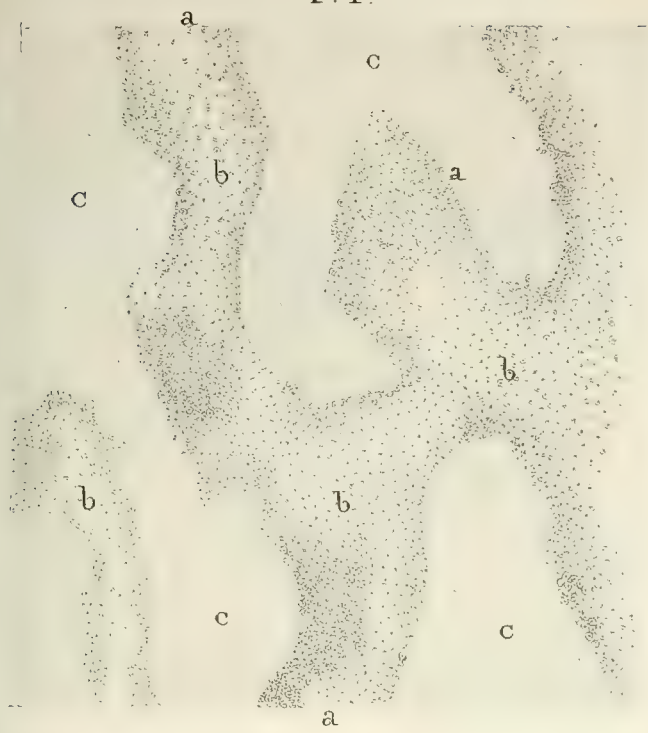
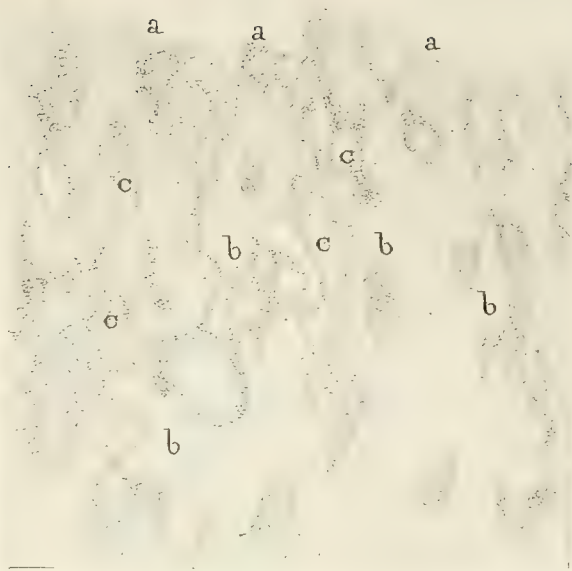
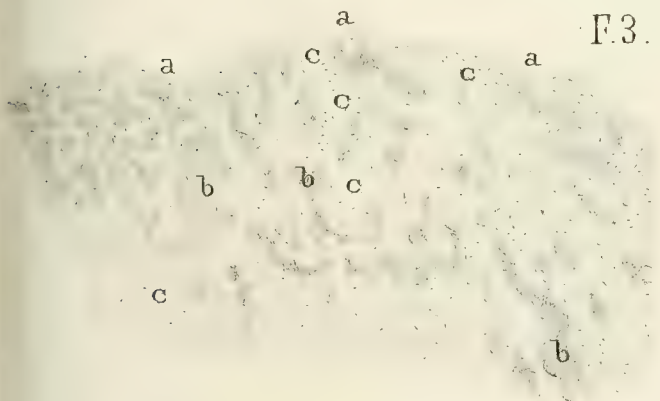
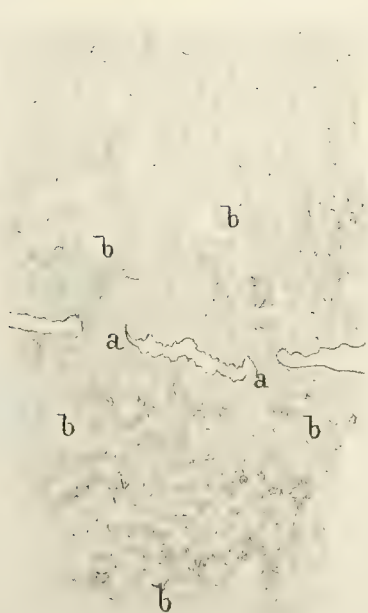
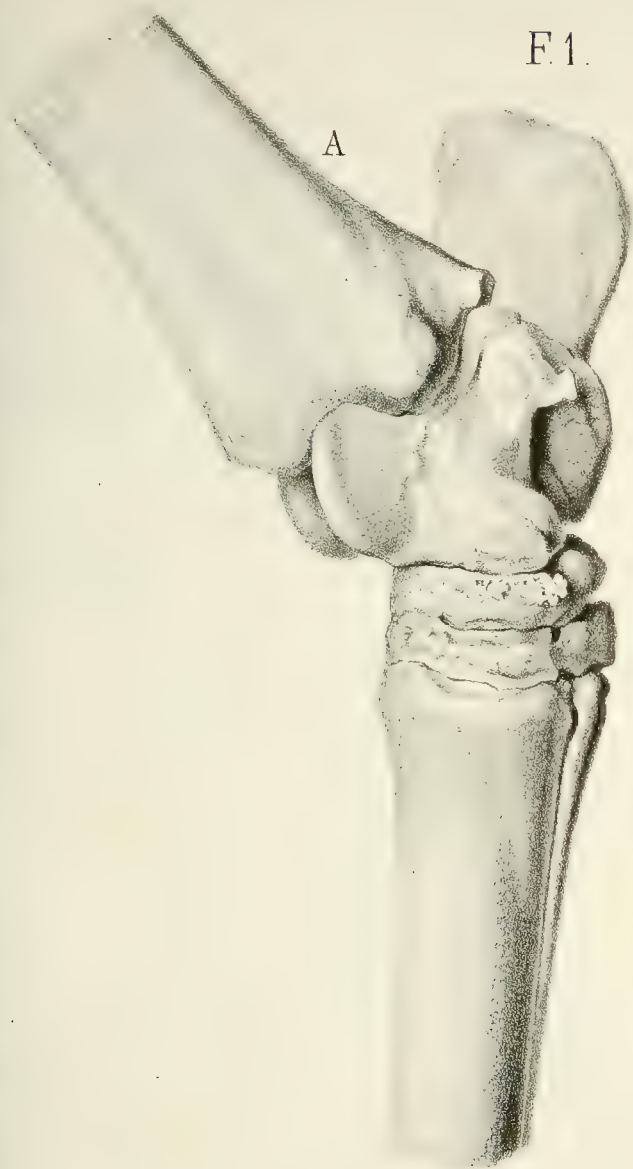
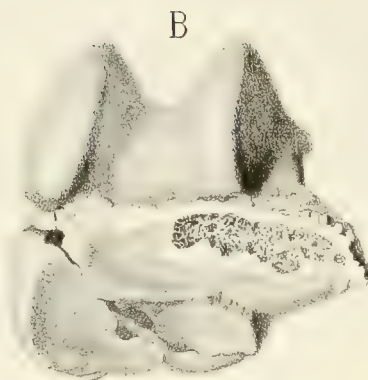
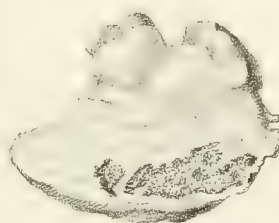
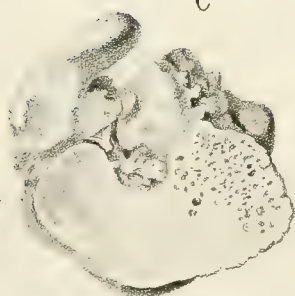
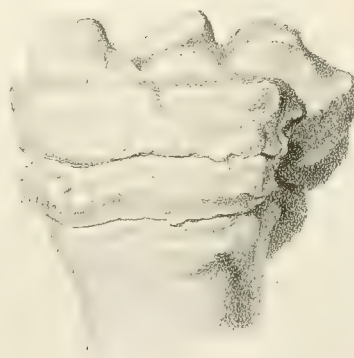
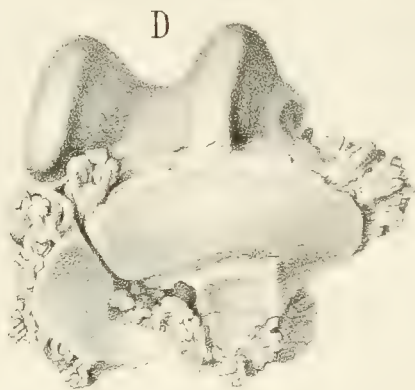
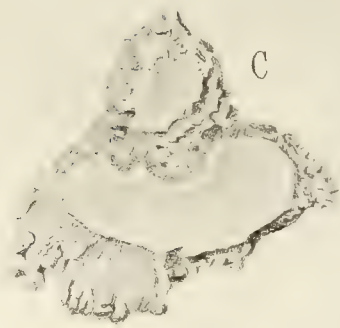
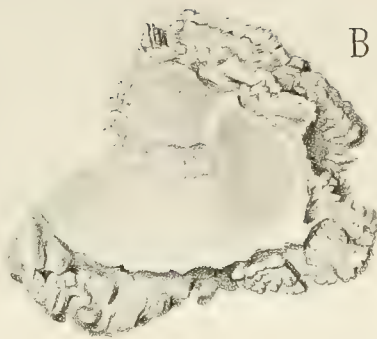
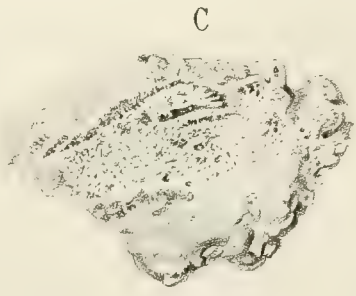
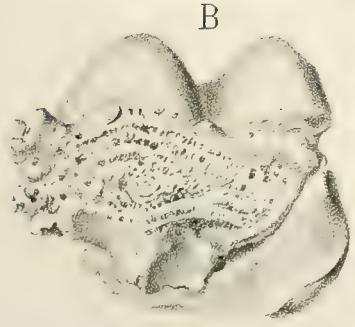
A. Maccferri dis.° dal vero

C. Bettini dis.° in pietra

Lit. G. Wenk

A. Maccaferri dis.° dal vero. C. Bettini dis.° in pietra Lit. G. Wenk.

C. Bettini dis.e   Lit. G. Wenk.

F.1.
A
B
C
D
F.2.
A
B
F.3.
A
B
C
C

B Astragalo dello stesso tarso per dimostrare la profonda corrosione esistente sopra una porzione della sua faccia articolare inferiore, corrispondente a simile corrosione formatasi sulla faccia superiore articolare del navicolare *C*.

D Faccia articolare superiore del triangolare per dimostrare che in essa non è avvenuta corrosione alcuna.

Fig. 2.ª *A* Ossa del second'ordine del tarso destro di un cavallo unitamente a porzione di metatarso con leggera alterazione sulla metà esterna dei contorni del navicolare e del triangolare.

B Superficie articolare inferiore del navicolare per dimostrare una corrosione ossea sul terzo esterno della superficie stessa, corrispondente esattamente ad altra simile corrosione della faccia articolare superiore *C* del triangolare.

Tavola V.

Fig. 1.ª *A* Tarso destro di cavallo a due terzi del vero con abbondante produzione osteofitica sui bordi di tutte le ossa che lo formano.

B Osso navicolare dello stesso garetto veduto dalla sua faccia articolare che mostrasi normale quantunque circondato da osteofiti che atrofizzano alquanto il suo limite periferico.

C Osso triangolare veduto dalla sua faccia articolare superiore che presenta le stesse particolarità della figura *B*.

D Superficie articolare inferiore del primo piano delle ossa tarsiche formato dall' astragalo e dal calcagno. Questa superficie vedesi del tutto sana quantunque gli osteofiti la circondino quasi interamente.

Fig. 2.ª *A* Ossa del tarso sinistro di cavallo a due terzi del vero per dimostrare la deformazioae che si stabilisce nell' osso navicolare attaccato dal processo artritico. Dal qual fatto ne deriva che le ossa tarsiche del primo piano (astragalo e calcagno) soffrono un mutamento graduale nella direzione loro.

B Astragalo dello stesso tarso veduto dalla sua faccia inferiore per dimostrare le gravissime lesioni articolari.

C Osso navicolare veduto dalla sua faccia superiore profondamente deformato.

Fig. 3.ª *B* Navicolare e triangolare a due terzi del vero appartenenti al tarso sinistro di un cavallo. Le lesioni articolari eransi formate gravissime solo fra le superficie articolari del navicolare e del triangolare — tutte le altre ossa non presentavano lesione alcuna. In questa figura gli osteofiti spor-

gono nel terzo interno dei bordi delle due ossa menzionate, quantunque in questa parte le due superficie articolari non si presentino anchilosate.

A Rappresenta una porzione di faccia superiore del navicolare sana e porzione di superficie articolare superiore del triangolare profondamente alterata, perchè con tratti di sega venne allontanata l' altra porzione di navicolare che vi corrispondeva e che in *C* si vede rappresentata dalla sua faccia articolare inferiore profondamente corrosa dal processo artritico.

DETERMINAZIONE
DEL POTERE CALORIFICO DEI COMBUSTIBILI SOLIDI
IDROGENATI COL PROCESSO BERTHIER

MEMORIA

dell' Ing. Dott. ALFREDO CAVAZZI

(Presentata il giorno 6 Novembre 1879)

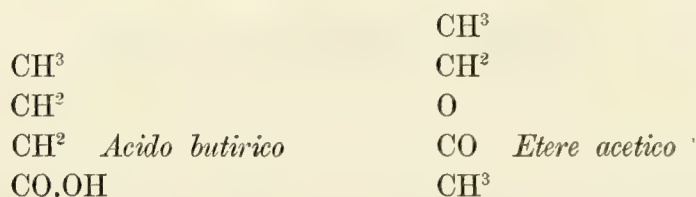
Fra i vari processi che la pratica segue nella misura del potere calorifico dei combustibili solidi e più precisamente del loro *effetto calorifico assoluto,* quello che per maggiore semplicità di esecuzione ha ricevuto un' applicazione più estesa nelle ricerche industriali, è senza dubbio il processo di Berthier. Esso ha per fondamento la legge di Welter nella quale si ammette che le quantità di calore sviluppate da pesi eguali di diversi combustibili siano in ragione diretta delle quantità di ossigene necessarie a produrre una combustione completa, in cui cioè i due elementi essenziali dei combustibili ordinari, carbone e idrogene, siano trasformati in acqua e anidride carbonica. La conoscenza di questa quantità di ossigene si desume dal peso di piombo che rimane isolato allorchè si riscalda entro crogiuolo di terra refrattaria sino a perfetta e tranquilla fusione un miscuglio formato di protossido di piombo o litargirio e di un peso determinato del combustibile.

Stimo pertanto opportuno di esporre in breve i fatti e le ragioni principali che si adducono contro l' esattezza e la validità della legge di Welter, con che si vorrebbe da taluno negare ogni importanza pratica al processo di determinazione del potere calorifico che su quella essenzialmente si fonda.

In primo luogo l' enunciato di questa legge implica una ipotesi che in molti casi non corrisponde al fatto sperimentale: implica cioè che gli elementi combustibili tanto liberi che allo stato di composti, bruciando sviluppano sempre la stessa quantità di calore; o in altri termini, che la quantità di energia calorifica generata dalla combustione di un corpo composto è eguale alla somma delle quantità parziali di calore che darebbero i suoi elementi combustibili allorchè fossero

liberi. Questa ipotesi si verifica con esattezza soltanto in pochi casi; ad esempio, nella combustione dell' Idrogene bicarbonato; in molti altri corrisponde approssimativamente, finchè poi nella combustione di alcuni composti il risultato pratico si scosta in modo notevolissimo dal ricavato teorico, come si avvera in particolar modo nella combustione del solfuro di carbonio.

Non possiamo passare sotto silenzio l' influenza dipendente dal fatto della isomeria tanto nei corpi metameri quanto in quelli polimeri. Così pesi eguali di terebene $C_{10}H_{16}$, di essenza di trementina $C_{10}H_{16}$ e di essenza di cedro $C_{10}H_{16}$ danno un numero diverso di calorie mentre richiedono per la loro combustione completa eguale quantità di ossigene. L' influenza ancora più manifesta del diverso modo di aggruppamento o collegamento degli atomi è stata più specialmente dimostrata nella combustione dell' acido butirico normale e dell' etere acetico: i quali composti metameri hanno per formola complessiva $C_4H_8O_2$ e per formole di struttura le seguenti

		CH^3	
CH^3		CH^2	
CH^2		O	
CH^2	*Acido butirico*	CO	*Etere acetico*
CO.OH		CH^3	

Non meno degna di considerazione è l' influenza che deriva dal modo diverso di essere e di presentarsi di un medesimo elemento. Ricorderò in proposito che il carbone di legno o di zucchero produce in una combustione completa più calore di un peso eguale di grafite naturale o di grafite degli alti forni o di diamante.

Che non sussista sempre questa correlazione equivalente fra il calore prodotto e l' ossigene impiegato nella combustione, si rileva sopra tutto dagli effetti comparati che si ottengono facendo bruciare del carbone, del fosforo, dello zinco e del ferro. Merita però di essere ricordato che sperimentando sopra alcuni gruppi di composti particolarmente organici si sono avuti risultati molto concordanti colla legge di Welter. Questo accordo è maggiore pei combustibili che contengono poco idrogene ed esatto o pressochè tale rispetto a quelli formati di carbone puro o di carbone misto a materiali terrosi completamente ossidati.

Aggiungerò infine che la legge di Welter solo in casi eccezionali corrisponderà esattamente al risultato delle esperienze calorimetriche, non potendo essa tener calcolo di tutti quei cambiamenti di stato che si compiono nel combustibile soggetto all' esperimento con assorbimento o emissione di calore; effetti che trovano invece la loro pratica e complessiva manifestazione nelle esperienze che si fanno col mezzo del calorimetro.

Considerando l' insieme di questi fatti s' arriva necessariamente a concludere che le esperienze fatte col calorimetro sono in generale l' unico mezzo di deter-

minazione esatta del potere calorifico di un combustibile e che l'effetto teorico dedotto dalla legge di Welter dietro la conoscenza della sua composizione, ricavata coll' analisi elementare, costituisce un dato incerto quanto incerte sono le ipotesi che danno gli elementi per calcolare il calore che si svilupperà durante la combustione.

Però, se per una parte conviene tenere nel debito conto la verità di questa conclusione, dall' altra non si può mettere in dubbio la grande importanza delle indicazioni che i risultati dell' analisi elementare dei combustibili danno anche per rispetto alle loro applicazioni industriali; e la determinazione del potere calorifico calcolato secondo la legge di Welter acquista poi un valore pratico indiscutibile allorchè le risultanze dell' analisi siano studiate di confronto nei singoli gruppi o specie di combustibili naturali o artificiali, stante la loro conformità di origine e di composizione.

Si noti ancora che per poter rispondere con sufficiente sicurezza ai problemi talora difficili e complicati che a questo riguardo l'industria presenta, è necessario valutare il dato teorico desunto dalla legge di Welter in rapporto al risultato di altre esperienze che il chimico deve sempre eseguire sopra un combustibile a fine di scoprire le sue preziose qualità e a quali usi sia più adatto.

Ma non tutti posseggono i mezzi e l' abilità che sono necessari per condurre a buon termine l' analisi elementare di un combustibile. Mi lusingo perciò di non aver sprecato il tempo e la fatica nel ricercare il modo di ottenere un risultato in parte almeno equivalente a quello dell' analisi elementare, perfezionando il metodo Berthier coll' aggiunta di una operazione abbastanza semplice e spedita in virtù della quale il processo stesso potesse applicarsi con eguale successo non solo all' analisi dei combustibili solidi privi o quasi privi di idrogene ma di quelli ricchi di questo elemento, come lo sono in grado diverso le varie specie di litantrace ecc. In questi casi la determinazione del potere calorifico col primitivo processo di Berthier non offre evidentemente alcuna garanzia; di più i risultati che se ne ricavano non sono comparabili anche per una sola specie di combustibili in causa delle differenze spesso notevolissime della loro composizione per cui danno alle diverse temperature con maggiore facilità e abbondanza principii volatili riduttori che sfuggono all' azione ossidante del litargirio prima che abbia raggiunto un grado di calore abbastanza elevato.

La difficoltà consisteva nel trovare le condizioni più opportune perchè l'operazione riescisse semplice e con esito sicuro, pur conservando l' ossido di piombo quale materia destinata a spiegare l' azione ossidante completa sul carbone e sull'idrogeno del combustibile senza dispersione di principii volatili combustibili.

Si potrebbe praticare questa operazione in tubo di vetro poco fusibile, in modo analogo a quanto si fa coll' ossido di rame nelle analisi elementari organiche, qualora il litargirio non fondesse o non assumesse una fusione incipiente alla temperatura a cui occorre portarlo affinchè possa agire sul carbone e sull' idrogeno dei

principii volatili che si svolgono nel riscaldamento del combustibile; inconveniente che si verificherebbe in grado maggiore al contatto dell' ossido colle pareti del tubo di vetro riscaldato al calor rosso.

Ad evitare questo grave inconveniente si prestano bene alcune sostanze che vengono mescolate in piccola quantità all' ossido di piombo e che non alterano la sua attività ossidante rispetto ai principii volatili ricchi di carbone e di idrogene. Quella che si presta meglio all' uopo è il fosfato neutro di calcio privo affatto di carbonato. Per prepararselo basta stemperare in poc' acqua il fosfato che si vende in commercio quasi mai privo di carbonato di calcio: si aggiunge poco a poco a questa poltiglia molto fluida acido cloridrico finchè produce effervescenza: si versa quindi ammoniaca in eccesso: si porta e mantiene durante 15 minuti circa, la poltiglia alla temperatura dell' ebollizione e poi si feltra. Si lava più volte con acqua distillata o piovana il fosfato che resta sul feltro e dopo averlo diseccato si calcina all' intento di eliminare l' acqua e di incenerire completamente le sostanze organiche che il fosfato così preparato potesse contenere.

Nella preparazione del miscuglio ossidante incontrai le maggiori difficoltà che mi obbligarono di ripetere molte volte l' esperienza di combustione nel tubo di vetro e la fusione nei crogiuoli di terra refrattaria. Difatti se il fosfato scarseggia il miscuglio aderisce al tubo a combustione, se è troppo abbondante la fusione del miscuglio non avviene o accade soltanto ad una temperatura più elevata di quella che si può ottenere coi fornelli ordinari di terra refrattaria, anche se forniti di un alto camino per il tiraggio e se alimentati di carbone coke.

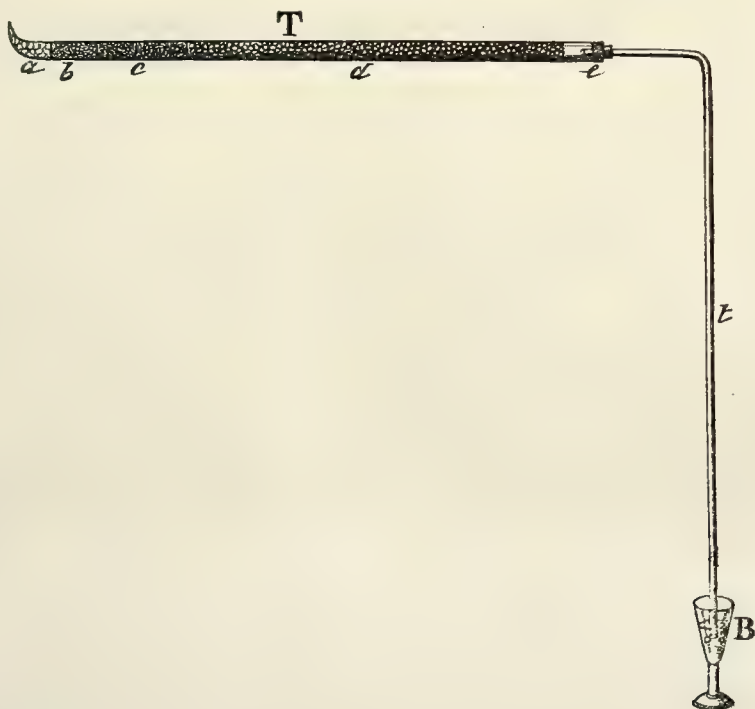
In seguito alle esperienze fatte in proposito ho potuto stabilire che la proporzione più adatta è quella di $^1/_8$ di fosfato di calcio calcinato e di $^7/_8$ di litargirio, ridotti in finissima polvere e intimamente mescolati. Se non che l' impiego di questo miscuglio in polvere fina porta diversi inconvenienti; primo dei quali è la difficoltà che oppone ai prodotti volatili idrocarburati provenienti dal riscaldamento del combustibile di insinuarsi attraverso una colonna di questa polvere contenuta nel tubo a combustione, per cui passano dissopra alla materia ossidante nello spazio ristretto che bisogna lasciare per sfogo alla parte superiore e per tutta la lunghezza del tubo e non possono di conseguenza soggiacere che ad una combustione molto incompleta. M' accorsi allora che per ottenere l' effetto desiderato era assolutamente necessario di dare a questo miscuglio una forma diversa. Dirò in breve di questa preparazione tanto opportuna.

Sul miscuglio di polvere di litargirio e di fosfato di calcio, fatto nelle proporzioni già indicate, si versa acqua distillata in tanta quantità da poter formare una pasta consistente e abbastanza plastica, la quale viene ridotta in forma di grossolane pastiglie della grandezza di un soldo all' incirca e dello spessore di 2 a 5 millimetri. Dopo averle disseccate entro stufa, si riscaldano durante 10 minuti circa in crogiuolo di platino o di ferro al calor rosso scuro. Ho potuto constatare che in questo breve periodo di riscaldamento non si forma minio, mentre si ha

il vantaggio di ossidare le piccole particelle di piombo metallico di cui il litargirio non fosse totalmente privo. Quando quelle pastiglie sono abbastanza raffreddate si battono leggermente coll' unghia o col mezzo di un piccolo pestello in modo da ridurle in piccoli frammenti del volume circa di un piccolo grano di frumento e si conserva il prodotto entro vaso di vetro ben chiuso per metterlo poi in opera all' occorrenza. Preparato con questa forma il miscuglio ossidante costituisce una materia molto porosa che introdotta nel tubo a combustione viene ad essere lambita in ogni punto dai prodotti gassosi combustibili che si svolgono nel riscaldamento del combustibile e che possono senza ostacolo circolare entro i meati che restano fra i singoli frammenti andando così in contatto con una maggiore superficie ossidante. Altro, e non piccolo vantaggio si ha nel diminuire i punti di contatto dell' ossido di piombo colla superficie interna del tubo a combustione che leggermente rammollendosi sotto l'azione del riscaldamento farebbe sì che la materia ossidante in polvere aderirebbe in quantità rilevante al tubo medesimo portando i danni che deriverebbero dalla difficoltà di staccarla.

Ora, l'applicazione del processo Berthier all' analisi dei combustibili solidi idrogenati comprende due distinte e successive operazioni. 1° Il riscaldamento del combustibile coll' ossido di piombo nel tubo a combustione; 2° la fusione della materia rimasta nel tubo entro crogiuolo di terra refrattaria. Diciamo adunque quanto più interessa dell' una e dell' altra in riguardo alle condizioni speciali che fa d' uopo soddisfare a fine di riescire a buon risultato.

Combustione nel tubo di vetro.

Si prende un tubo *T* di vetro difficilmente fusibile lungo circa 75 cent. con diametro interno di 6 millimetri, chiuso ad una estremità come i tubi che servono alla determinazione dell' azoto col processo Varrentrapp e Will. Io ho trovato

molto buona la qualità di vetro fornita al Laboratorio di Chimica Inorganica della nostra Università dal Signor Martino Wallach di Cassel, tanto che alcuni tubi han potuto servire tre volte all' esperienza di combustione. All' estremità aperta può adattarsi un tappo di sughero attraversato da un tubo di vetro piegato ad angolo retto: quando il tubo T è in posizione orizzontale il ramo t dell' altro che piega verticalmente in basso deve avere una lunghezza non minore di 76 centimetri. Nel tubo T si introduce: 1° una colonna a lunga 4 cent. di carbonato di piombo: 2° una colonna b lunga 6 centimetri del miscuglio ossidante in piccoli frammenti: 3° una colonna c lunga 12 centimetri formata da un miscuglio pulverulento e omogeneo di Gr. 2 di combustibile con litargirio e fosfato di calcio misti nella solita proporzione di $^7/_8$ del primo e $^1/_8$ del secondo. La polvere che si ottiene nel preparare il miscuglio ossidante in piccoli pezzi serve benissimo all' uopo: 4° la porzione rimanente del tubo T si riempie con una colonna d di materia ossidante in piccoli frammenti senza polvere e preparata come si disse più sopra. Si pone il tubo T, ravvolto prima con foglie metalliche, sul fornello a combustione di Liebig in lamiera, in posizione lievemente inclinata verso l' estremità anteriore e affinchè l' acqua che si produce durante il riscaldamento e che sempre si condensa in parte all' estremità medesima non possa discendere nella porzione molto calda del tubo e causarne la rottura. Si applica quindi il tappo di sughero che porta il tubo t. Così disposto l'apparecchio si comincia col riscaldare la colonna d con carboni accesi sino a portare il miscuglio ossidante al calor rosso attivando ad intervalli la combustione del carbone col mezzo della sventola. Preferisco questo modo di riscaldamento all' uso del fornello a gas col quale, almeno nella maggior parte dei laboratori, non si raggiunge la temperatura desiderata nè un riscaldamento più uniforme in tutta la lunghezza del tubo a combustione. Quando la colonna d è al calor rosso si mettono sulla porzione a alcuni carboni accesi nell' intento di decomporre parzialmente il carbonato di piombo e di scacciare dal tubo tutto l' ossigene. Al momento che si ha ragione di credere che il tubo contenga solo acido carbonico, si fa pescare l' estremità del tubo t in piccola quantità di acido solforico concentratissimo e incoloro contenuto nel recipiente B. Dopo pochi secondi si fa cessare la decomposizione del carbonato di piombo togliendo i carboni accesi che stavano sulla colonna a e si riscalda *poco a poco* la colonna c contenente il miscuglio ossidante col combustibile procedendo, da d verso a. Condizioni indispensabili alla buona riuscita dell' operazione sono, la temperatura elevata della colonna d e la decomposizione molto lenta del combustibile contenuto in c. L' acido solforico nel quale si fanno gorgogliare i prodotti gassosi provenienti dal tubo ha due vantaggi; di far conoscere se la decomposizione del combustibile procede abbastanza lenta e di indicare se fra i prodotti gassosi vi siano sostanze organiche sfuggite alla combustione e al contatto delle quali l' acido stesso assumerebbe una colorazione nerastra più o meno intensa. Nella parte del tubo che contiene la sostanza ossidante mista al combustibile non è necessario nè con-

veniente di ottenere una temperatura tanto elevata quanto nella colonna *d*: basta perciò riscaldare in quel punto con carbone ben acceso ma senza attivarne la combustione colla sventola, e ciò sempre all' intento di impedire la possibile aderenza della materia alle pareti del tubo. Il riscaldamento della colonna *c* deve bastare soltanto ad eliminare i principii volatili, mentre poi la combustione completa del carbone residuo si otterrà colla fusione nel crogiuolo di terra refrattaria. Al momento che il gorgogliamento nell' acido solforico diviene molto lento, si riscalda la colonna *b* e per ultimo la porzione *a* contenente ancora carbonato di piombo non decomposto. La colonna *b* ha per precipuo ufficio di tener separato il carbonato di piombo dal miscuglio di materia ossidante e del combustibile. Dopo uno sviluppo sufficiente di acido carbonico si leva il recipiente *B* contenente l' acido solforico e se ne sostituisce un altro con mercurio. Si sospende allora il riscaldamento successivamente nelle colonne *c*, *b*, *a* e *d*. In conseguenza del raffreddamento e per effetto della pressione atmosferica il mercurio sale nel tubo *t* lungo, come già dissi, almeno 76 centimetri. Con questo artifizio si giunge ad impedire all' aria di entrare nel tubo a combustione quando la materia è ancora calda, senza di che l' ossigene si combinerebbe, almeno in parte, al piombo ridotto sotto forma di piccole particelle facilmente ossidabili. Quando il tubo a combustione è arrivato alla temperatura ordinaria si toglie il tappo *e* ed aiutandosi con una punta di ferro si fa cadere tutta la materia contenuta in un mortaio entro cui bisogna polverizzarla e fare colla massima cura un miscuglio perfettamente omogeneo. Dopo di che si pesa e divide subito esattamente in 4 parti eguali poichè stando esposta all' aria assorbe molta umidità. Ciascuna di queste corrisponde perciò a Gr. 0,5 di combustibile, quantità più che sufficiente per la determinazione del potere calorifico dei combustibili che contengono piccola dose di materie minerali, come alcune torbe, molte legniti e quasi tutte le varietà di litantrace. In media il peso di una di quelle parti nelle mie esperienze era di Gr. 40. Questo quarto della materia contenuta nel tubo a combustione si mescola intimamente con *2 volte e mezzo* il proprio peso di litargirio in polvere fina e si sottopone alla fusione in crogiuolo di terra refrattaria.

Fusione nel crogiuolo di terra refrattaria.

La natura speciale del miscuglio che bisogna sottomettere alla fusione mi mette in obbligo di dare una descrizione alquanto particolareggiata intorno alle condizioni, alle avvertenze ed ai mezzi che si richieggono affinchè questa operazione riesca con sicurezza di buon risultato.

Per rispetto alla scelta del crogiuolo di terra refrattaria dirò in primo luogo che non è necessario, almeno nel massimo numero dei casi, sciegliere un recipiente di capacità molto maggiore del volume del miscuglio da fondere, giacchè nelle esperienze da me istituite sul legno, sullo zucchero e sopra una varietà di carbon

fossile grasso usato nella nostra officina a gas, non ho avuto indizio alcuno di ribollimento nella massa in fusione. In quanto alla qualità, i crogiuoli più adatti sono quelli di fabbricazione francese che resistono meglio all' azione dei fondenti e in particolar modo del litargirio, in confronto ai crogiuoli di Castellamonte usati in quasi tutti i laboratori e stabilimenti italiani. Questi con facilità si screpolano o restano perforati dall' ossido di piombo fuso, specialmente se le loro pareti sono in contatto diretto coi carboni accesi. Difatti si possono evitare presso che costantemente questi due gravissimi inconvenienti introducendo il crogiuolo contenente il miscuglio da fondere in altro crogiuolo di terra refrattaria a pareti non molto grosse onde proteggere il primo dalla causa precipua che ne danneggia le pareti. La completa fusione della sostanza, per l' aggiunta del crogiuolo esterno richiede una durata maggiore di riscaldamento : così mentre io impiegava nelle mie esperienze poco più di mezz' ora coll' uso di un solo crogiuolo, mi occorreva 1 ora e $^1/_4$ col crogiuolo di difesa; il quale può servire finchè non si versi in esso la materia fusa del crogiuolo interno.

A questo punto torna opportuno di dire le ragioni per cui conviene sperimentare nel tubo a combustione sopra una quantità relativamente forte di combustibile, cioè Gr. 2. Se noi operassimo sopra un peso di combustibile bastante ad una sola fusione farebbe d' uopo mescolare tutta la sostanza che rimane nel tubo a combustione con due volte e mezzo il suo peso di litargirio e saremmo per conseguenza costretti di praticare la fusione sopra una quantità enorme di materia con spreco di litargirio e col pericolo di non ottenere la fusione o di ottenerla dopo prolungato riscaldamento a detrimento delle pareti del crogiuolo interno che in tali condizioni viene fortemente intaccato dall' ossido di piombo e spesso anche perforato. Dobbiamo inoltre avere in vista la possibilità che alcune operazioni riescano a male e che molte volte il risultato di una sola fusione non basta a tranquillizzare l' animo di un operatore coscienzioso. Torna perciò di grande vantaggio che, seguendo le date indicazioni, si possano eseguire fin quattro fusioni senza che vi sia bisogno di ripetere ciascuna volta l' esperimento nel tubo a combustione.

Il miscuglio intimo formato di $^1/_4$ della materia estratta dal tubo a combustione (40 gr. circa) e di 2 volte e $^1/_2$ questo peso di ossido di piombo, viene introdotto nel crogiuolo di terra refrattaria e coperto con un sottile strato di litargirio puro. Questo crogiuolo alto circa 9 centimetri, coperto con un disco di terra refrattaria si pone entro il crogiuolo maggiore alto 14 centimetri il quale deve restar chiuso come il primo durante la fusione. Il riscaldamento si fa entro uno degli usuali fornelli a carbone di terra refrattaria, avente un' altezza totale di 25 centimetri e centimetri 28 di diametro all' apertura circolare superiore. Si mette un disco di terra refrattaria alto cent. 2 sulla graticola del fornello e su di esso si appoggia il crogiuolo preparato per la fusione.

In quanto al modo di ottenere il grado conveniente di calore interessa far notare che, in causa della presenza del fosfato di calcio, la fusione non si può

conseguire alla temperatura che si sviluppa nella combustione del carbone di legna, come si suole praticare nei fornelli ordinari, anche se muniti di un lungo camino di lamiera per il tiraggio. Per cui quando il crogiuolo è ben disposto e fermo entro il fornello, si mettono in basso delle bragie di carbone di legna ben accesi e sopra queste un miscuglio di $^1/_3$ circa di carbone ordinario e $^2/_3$ di coke già accesi sino a coprire il crogiuolo anche alla parte superiore. Per avere una corrente di aria sufficiente a mantenere la necessaria attività di combustione fa d' uopo soprametterc al fornello un camino di lamiera più alto degli usuali, cioè $1^m,50$ e non sarà ancora superfluo aiutare la combustione colla sventola. Dopo mezz' ora circa si toglie il camino per osservare ciò che accade nel crogiuolo interno; si accomoda il combustibile nel fornello e si sostituisce quello che manca con *solo* coke meglio se acceso. Si rimette il camino e si continua ancora il riscaldamento $^3/_4$ d' ora coll' avvertenza di rendere nell' ultima mezz' ora la combustione molto attiva col mezzo della sventola. In questo esperimento il coke non ha il solo vantaggio di dare a pari condizioni una temperatura più elevata ma quello altresì di consumarsi più lentamente, per cui in una operazione che dura a lungo non si ha l' inconveniente di dover aggiungere spesso combustibile al fornello come sarebbe necessario quando si facesse uso di solo carbone ordinario o che questo fosse prevalente nella massa del combustibile.

Dopo 1 ora e $^1/_4$ di questo forte riscaldamento il contenuto del crogiuolo interno assume l' aspetto di un liquido oleoso e tranquillo. Allora si toglie il crogiuolo stesso dal fornello e si batte lievemente per terra inclinandolo più volte a destra e a sinistra all' intento di far precipitare tutto il piombo ridotto al fondo del recipiente. Si lascia quindi in riposo sino a che la sostanza in fusione abbia raggiunto poco a poco la temperatura ordinaria. L' operazione si può giudicare ben riuscita quando la detta sostanza nel solidificarsi resta vetrosa e trasparente e prende press' a poco l' apparenza del caramello. Un raffreddamento rapido ottenuto coll' immergere la parte inferiore del crogiuolo nell' acqua porta sempre come conseguenza uno sconvolgimento in tutta la massa fusa dal basso all' alto e quindi lo scompaginamento e la divisione del bottone di piombo che si trova ancora alle stato liquido nel fondo del crogiuolo medesimo.

In questa operazione che dura molto tempo avviene che l' ossido di piombo corrode disegualmente le pareti non omogenee del crogiuolo, determinando in esse delle cavernosità nelle quali spesso entrano e si fermano dei piccoli granelli di piombo ridotto. Per vedere, separare e raccogliere queste particelle conviene triturare sopra un piano resistente le parti sospette del crogiuolo che ha servito alla fusione.

Conoscendo la quantità totale di piombo ripristinato da Gr. 0,5 di combustibile si arriva con semplici calcoli alla conoscenza del suo potere calorifico.

A prova della buona riuscita dell' esperienza di combustione che deve precedere la fusione nel crogiuolo di terra refrattaria, non poteva evidentemente bastare

il fatto che le sostanze volatili provenienti dal tubo di vetro durante il riscaldamento non annerissero al contatto dell' acido solforico concentrato, in quanto che in ispecie molti carburi di idrogene possono passare attraverso quella sostanza esploratrice senza provocare in essa alcuna sensibile alterazione che dia indizio di loro presenza. A tale oggetto feci alcune esperienze sopra un saggio di litantrace grasso; mettendo il tubo di vetro in comunicazione coll' apertura superiore di una boccia piena d' acqua avente un' altra apertura in basso munita di rubinetto. I prodotti gassosi provenienti dal tubo a combustione venivano così raccolti nella boccia per spostamento. Dopo aver assorbito l' acido carbonico colla potassa ottenni in media nelle esperienze ben condotte e operando su Gr. 2 del combustibile in esame, 140 c. c. di sostanza gassosa incombustibile costituita da azoto.

Aggiungerò ancora che il peso del bottone di piombo metallico che ottenni nelle esperienze eseguite sullo zucchero puro e secco, corrispose sempre alla quantità del carbonio in esso contenuto; il qual fatto sta in accordo colla composizione dello zucchero che contiene l' idrogene e l' ossigene nelle proporzioni esatte per formare dell' acqua, onde il carbonio soltanto si può considerare in detti esperimenti quale unico elemento riduttore o combustibile.

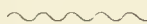
Non senza ragione dissi sin da principio che colla modificazione introdotta nel processo primitivo di Berthier io mi era proposto di ottenere un risultato in parte solo equivalente a quello dell' analisi elementare. E di fatto il procedimento seguito non fa conoscere la proporzione del carbonio e dell' idrogene contenuti nel combustibile, mentre questo dato prezioso che somministra l' analisi elementare può darci ragione dei caratteri speciali che presenta un dato combustibile e fino ad un certo punto farci conoscere a quali usi la sostanza analizzata possa meglio convenire in virtù della sua composizione e quindi del modo probabile di comportarsi nella combustione o sotto l' azione del riscaldamento. Ed invero alcuni caratteri di grande importanza a conoscersi nelle applicazioni come l' attitudine del combustibile a rammollirsi o fondere, la facoltà di bruciare o di infiammarsi con maggiore o minore facilità, la natura e la quantità dei prodotti che si svolgono durante il riscaldamento, sono in massima parte dipendenti dal rapporto di quantità fra il carbonio e l' idrogene contenuti nel combustibile. Però questi stessi caratteri possono manifestarsi nel risultato di poche esperienze semplici e concludenti senza che in ogni caso sia necessario ricorrere per le richieste industriali all' operazione lunga e non facile dell' analisi elementare.

DEI GIUNTI

DERIVATI DAL QUADRILATERO SFERICO

MEMORIA

DELL' INGEGNER FRANCESCO MASI

(Presentata l' 11 Marzo 1880.)

1. Fra le varie forme di catene cinematiche che derivano dal quadrilatero sferico, quelle che hanno ricevuta più importante applicazione si comprendono sotto una classe sola di meccanismi, cioè quella dei giunti per la trasmissione di moto tra assi concorrenti. Partendo dal quadrilatero sferico, siccome da tipo fondamentale, si possono studiare questi giunti dipendentemente da un concetto unico ; ed a questo fine mi propongo di esporre per essi una teoria generale, la quale, oltre alle forme più comuni di giunti, conduce anche ad altre forme nuove fra cui qualcuna mi sembra degna di nota ed utile di applicazione pratica.

2. La catena quadrilatera sferica è composta di quattro membri, che sono archi di circolo massimo, *a b c d*, fig. 1ª tav. 1ª, di una medesima sfera ed uniti a snodo con accoppiamenti conici 1. 2. 3. 4 convergenti tutti al centro *M* della sfera. Se sia fissato uno de' suoi lati, per esempio *d*, tutte le altre parti possono compiere l' una per rapporto ad un' altra, moti geometrici determinati ; e la catena per tal modo diventa un vero meccanismo (1). Per studiare quei giunti che derivano da questa catena applicheremo due ordini di principii ; alcuni cioè relativi al modo con cui si possono formare dei meccanismi da una catena cinematica, ed altri relativi alla determinazione dei rapporti esistenti tra i moti nei membri di essa. In ciò che segue supporremo che il quadrilatero sferico sia sempre fissato sul lato *d* ed otterremo da esso meccanismi diversi, variando i rapporti fra le ampiezze dei suoi lati e modificando le copie di collegamento. Per determinare poi i rapporti fra i moti dei lati, stabiliremo ora pel quadrilatero sferico una

(1) V. Reuleaux — Teoria delle macchine - traduzione del prof. Colombo 1876.

proprietà geometrica colla quale è facile in ogni istante avere il rapporto delle velocità angolari dei membri rotanti a e c.

3. Considerasi il quadrilatero sferico nella posizione rappresentata in fig. 1ª tav. 1, se in essa si prolungano i due archi a e c, si ottiene nel punto P di loro incontro il polo d' istantanea rotazione sulla sfera e nella retta $M\ P$ l' asse d' istantanea rotazione, attorno ai quali l' arco b può intendersi che ruoti nel passare dalla posizione attuale in un' altra infinitamente vicina. Ne consegue intanto, che le velocità di rotazione dei punti 2 e 3 risultano proporzionali alle quantità sen. $\overline{2\ P}$ e sen. $\overline{3\ P}$. Se siano ora ω e ω' le velocità angolari degli archi a e c rispetto agli assi M 1 ed M 4, le velocità di rotazione dei punti 2 e 3 sono rispettivamente $\omega \times$ sen. a ed $\omega' \times$ sen. c; onde si ha la seguente equazione:

$$\frac{\omega \times \text{sen. } a}{\omega' \times \text{sen. } c} = \frac{\text{sen. } \overline{2P}}{\text{sen. } \overline{3P}}$$

Ciò posto si prolunghi l' arco b fino ad incontrare in Q l' arco d e siano α l'angolo formato dall' arco a con b, e β quello formato dall' arco c col prolungamento di b. Dal triangolo sferico 2 P 3, si ha la seguente relazione:

$$\frac{\text{sen. } 2P}{\text{sen. } 3P} = \frac{\text{sen. } \beta}{\text{sen. } \alpha}$$

perciò si ha anche

$$\frac{\omega \times \text{sen. } a}{\omega' \times \text{sen. } c} = \frac{\text{sen. } \beta}{\text{sen. } \alpha}$$

ed

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\text{sen. } c \times \text{sen. } \beta}{\text{sen. } a \times \text{sen. } \alpha}$$

Dai punti 1 e 4 siano condotti rispettivamente gli archi di circolo massimo 1 m, 4 n perpendicolari all' arco b; dai triangoli sferici rettangoli 4 n 3, 1 m 2 risultano le seguenti relazioni :

$$\text{sen. } c \times \text{sen. } \beta = \text{sen. } \overline{4n}$$
$$\text{sen. } a \times \text{sen. } \alpha = \text{sen. } \overline{1m}$$

ma dai triangoli sferici simili n 4 Q, m 1 Q si ha:

$$\frac{\text{sen. } \overline{4n}}{\text{sen. } \overline{1m}} = \frac{\text{sen. } \overline{4Q}}{\text{sen. } \overline{1Q}}$$

onde pel rapporto delle velocità angolari si ha

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\text{sen.}\ \overline{4Q}}{\text{sen.}\ \overline{1Q}}$$

Distinguasi col nome di meridiano d' azione, l'arco b per mezzo del quale si trasmette la rotazione dall' uno all' altro arco rotante, e dicasi meridiano degli assi, l' arco d sul cui piano sono contenuti gli assi di rotazione M 1 ed M 4; allora il risultato precedente si esprime nella seguente proposizione.

In ogni quadrilatero sferico di cui sia fisso uno dei lati, le velocità angolari degli archi rotanti sono in ragione inversa dei seni degli archi, secondo cui il meridiano d' azione taglia quello degli assi. È semplicemente da notarsi che se il meridiano d' azione taglia quello degli assi in un punto intermedio a questi, le velocità angolari riescono di contrario senso.

4. I poli d' istantanea rotazione come P, corrispondenti al moto relativo dell' arco b rispetto a d, determinano sulla sfera una curva polare sferica; così pure i poli d' istantanea rotazione corrispondenti al moto relativo di d rispetto a b, costituiscono un' altra polare sferica. Di queste due la prima resta fissa al lato d e la seconda al lato b, così che nel moto del quadrilatero sferico, una viene rotolando sull' altra. A questa coppia di curve corrisponde anche una coppia di superfici coniche, aventi il vertice in M e per direttrice rispettivamente le polari stesse; perciò il moto relativo dei membri b e d può anche effettuarsi col rotolamento di queste due superfici coniche. Analogamente il moto relativo dei lati c ed a può effettuarsi col rotolamento di due polari sferiche o di due superfici coniche, determinate rispettivamente dai luoghi dei poli come Q o dagli assi di istantanea rotazione come Q M. Laonde i moti relativi di due membri opposti della catena quadrilatera sferica, trovano una rappresentanza cinematica molto evidente nel rotolamento di due curve polari sferiche sulla propria sfera, o di due superfici coniche nello spazio; ed anzi qualche volta quando queste curve e queste superfici coniche riescono di forma semplice, vengono anche impiegate con vantaggio in luogo dei membri di cui rappresentano i movimenti.

5. Veniamo ora applicando questi principii, allo studio dei giunti che trovano fondamento nel quadrilatero sferico. Abbiasi la catena quadrilatera sferica 1. 2. 3. 4 fig. 2ª tav. 1ª, fisssata sul lato d e disposta per modo che le braccia rotanti a e c, siano uno da una parte e l' altro dall' altra del meridiano degli assi e perpendicolari all' arco b. Per uno spostamento infinitamente piccolo di questa catena può ritenersi che l' intersecazione del meridiano d'azione con quello degli assi, avvenga parimenti nello stesso punto Q e però che il rapporto delle velocità angolari delle braccia a e c sia costante.

Supponiamo ora che per quel tempo infinitamente piccolo, a queste braccia

siano collegati due corpi qualunque: questi ruoteranno intorno agli assi *M* 1 ed *M* 4 anche con velocità in rapporto costante. Se poi questi due corpi si debbono movere per un certo tempo finito, si potranno parimenti considerare in ogni istante siccome guidati dai due membri opposti *a* e *c* della catena quadrilatera sferica; laonde il meridiano d' azione intersecando quello degli assi, quei due corpi si moveranno in senso contrario ed in ogni istante la velocità angolare dell' uno, rotante intorno ad *M* 1, starà a quella dell' altro rotante intorno ad *M* 4, nel rapporto costante di sen. *Q* 4. a sen. 1 *Q*. Essendo poi il punto *Q* e la retta *M Q*, rispettivamente il polo e l' asse d'istantanea rotazione del moto relativo di quei due corpi, questo si effettuerà anche molto semplicemente col rotolamento dei due coni di rivoluzione *M Q R*, *M Q P*, o dei due circoli *Q R*, *Q P* sulla sfera su cui è posta la catena.

Questi coni trovano un' applicazione nelle ruote coniche di frizione e quei circoli entrano a fondamento dell' ingegnosissimo giunto del Porro, impiegato per communicare un moto di rotazione uniforme ad un canocchiale intorno al suo asse.

6. Sia di questo giunto *B*, fig. 3ª tav. 1ª, la sfera piena mobile intorno all' asse *Mm* del canocchiale, e sia *A* la calotta cava mobile intorno all' asse *Mn*, concorrente al centro *M* della sfera. Siano *a b* la proiezione sul piano degli assi del circolo secondo cui la calotta sta in contatto colla sfera, *a M b* un cono avente per base questo circolo e per vertice il centro della sfera, *a c* la proiezione di un altro circolo prodotto dall' intersecazione di un piano perpendicolare all' asse *Mm* e passante pel punto *a*, *c* Ma il corrispondente cono avente per base quel circolo e per vertice il centro *M* della sfera. Mentre la calotta conduce per attrito la sfera questi due coni si muovono l' uno in contatto dell' altro, e se questo contatto fosse di semplice sviluppo, anche i circoli polari sferici *a b* ed *a c* verrebbero sviluppandosi l' uno sull' altro sulla propria sfera; la trasmissione di moto tra la calotta e la sfera dipenderebbe dal raggio di questa e le velocità angolari sarebbero in rapporto inverso dei raggi dei circoli polari. Ma vi ha una circostanza caratteristica di cui la cinematica non può tener conto e per la quale queste conclusioni vengono modificate. Il rapporto delle velocità angolari dei due alberi di rotazione nel giunto di Porro, varia anche dipendentemente dalla materia onde sono costituite la calotta e la sfera ed in conseguenza il moto relativo di queste, non è rappresentato dal semplice rotolamento dei circoli polari sferici, ma bensì da un moto di rotolamento e strisciamento dei medesimi sulla propria sfera.

7. Passiamo ora a compiere sulla forma generale del quadrilatero sferico alcune modificazioni.

Supponiamo che i tre lati *a b c* del quadrilatero sferico, fig. 4ª tav. 1ª, abbiano l' ampiezza di 90^0 ed il lato *d* su cui è fissata la catena, sia di un num.° di gradi α qualsiasi; movendo allora l' arco *a* intorno all' asse *M* 1, i vertici 2 e 3 descrivono circoli massimi della sfera e distano sempre tra loro di un arco di

90^0. I raggi 2 *M* e 3 *M* per conseguenza restano tra loro sempre inclinati ad angolo retto e però possono riunirsi insieme rigidamente senza alterare il moto del membro *b*. Per tale proprietà questo quadrilatero trova una importante applicazione nel giunto di Cardano, detto anche di Hooke od universale. In questo giunto i membri *a* e *c* del quadrilatero sono conformati a guisa di forcelle *A* e *C* solidarie agli assi di trasmissione *M* 1, *M* 4, il membro *b* assume la forma di una croce colle braccia *Mq Mp* ad angolo retto, e come esso si collega agli archi *a* e *c* per mezzo degli accoppiamenti conici 2 e 3, così la croce si impernia per le sue estremità *p* e *q* alle forcelle. L'arco *d* su cui è fissata la catena viene poi ridotto ad avere la forma dei due sopporti *s s* che reggono gli assi di trasmissione.

8. Il principio dimostrato al n.° 3 sulla determinazione delle velocità angolari delle braccia rotanti nel quadrilatero sferico, può essere qui utilmente applicato per studiare graficamente il giunto di Cardano.

Siano fig. 5ª tav. 1ª *M* 1, *M* 4 gli assi di rotazione del giunto e sul piano di essi siano posti i due piani di proiezione orizzontale e verticale, di cui la linea di terra sia la retta 22′ perpendicolare all' asse 1 *M*. Il circolo 1. 2. 3. 4 è la proiezione della sfera su cui si move il quadrilatero rappresentante il giunto ed è anche il meridiano degli assi, l' arco 1. 4 e poi in grandezza effettiva quello *d*, l' angolo 1 *M* 4 rappresenta l' angolo acuto degli assi, le rette 2 *M* 2′, *m M* 3 perpendicolari a questi sono le proiezioni verticali dei meridiani descritti dagli estremi 2 e 3 delle braccia rotanti della croce e lo stesso circolo 2 *r* 2′ è la proiezione orizzontale del meridiano proiettato verticalmente sulla retta 2 *M* 2′. Sia la posizione iniziale del giunto quella per cui il raggio del quadrilatero che va al vertice 2, fig. 4ª, è proiettato nella retta *M* 2 e quello che va al vertice 3 è proiettato nel punto *M*, e sia *M* 2 il braccio conduttore del giunto. Come risulta dalla stessa figura gli alberi conduttore e condotto descrivono nello stesso tempo un'angolo di 90^0; ma per una rotazione qualunque dell'albero conduttore gli angoli corrispondenti del condotto non sono eguali, per cui la trasmissione di moto si fa in ragione variabile delle velocità. Applicando qui la proposizione sopra accennata riesce facile avere graficamente le variazioni delle velocità angolari in ogni istante, e costruire anche un diagramma delle velocità angolari dei due alberi.

9. Il meridiano d' azione è anche quello stesso formato dalle braccia della croce, quindi la sua traccia sul piano verticale di proiezione passa sempre pel centro *M* della sfera; basta adunque trovare un altro punto di questa traccia. Siano per esempio, *qM*, *M* 2, le rette su cui cadano le proiezioni orizzontale e verticale del braccio conduttore del giunto considerato in una posizione qualunque, *Mn*, ed *M* 3 quelle delle proiezioni orizzontale e verticale del braccio condotto. Si scielgano due punti corrispondenti *p* e *p*′ sulle *Mn*, *m* 3, altri due *q* e *q*′ sulle *q M*, 2 *M*, si conduca la retta *q p*, nel suo punto *t* d' incontro colla linea di terra si elevi la perpendicolare a questa fino a tagliare in *t*′ la *q*′ *p*′ ; *t*′ è il punto che unito con *M* da la traccia *t*′ *M* cercata. Se quindi da *Q* incontro di questa traccia

col meridiano degli assi, si conducano due perpendicolari rispettivamente sopra gli assi M 4, M 1; la velocità angolare dell' albero conduttore risulta proporzionale alla retta $Q\,S$, mentre quella dell' albero condotto è proporzionale alla $Q\,S'$.

Si assuma ora un sistema di assi ortogonali $O\,X$, $O\,Y$, fig. 6ª tav. 1ª, sul primo dei quali siccome ascisse siano portati dei segmenti di rette proporzionali ai tempi e parallelamente al secondo come ordinate, dei seguenti di rette proporzionali alle velocità angolari dei due alberi rottanti. Si supponga che l' albero conduttore M1 si mova di moto uniforme, allora il diagramma ad esso relativo risulta una retta $v\,a\,a\,v$... parallela all'asse $O\,X$, ed in base a questa è facile costruire il diagramma relativo all' albero condotto. Infatti come è manifesto alla fine di tempi eguali le velocità dei due alberi sono rappresentate sul diagramma da rette che coincidono in direzione ed in senso, perciò volendo per esempio l'ordinata del diagramma per l'albero condotto, corrispondente alla posizione iniziale, basta portare sulla $O\,X$ una retta $o\,v'$ di lungezza eguale alla perpendicolare $2'\,b$, un' altra $O\,V'$ eguale a $2'\,M$, per V' condurre una retta parallela alla $v\,v'$ fino ad incontrare in V l' ordinata $o\,v$; V è il punto del diagramma dell' albero condotto relativo alla posizione iniziale, mentre $O\,V$ è l' ordinata corrispondente.

Ripetendo analoga costruzione per molte altre posizioni del giunto, si ottiene una curva V a V.... la quale riesce sinuosa e per un giro intero del giunto taglia in quattro punti la retta delle velocità costanti; il che significa che durante una interna rotazione vi sono quattro momenti, nei quali le velocità angolari dei due alberi sono eguali. La stessa curva ad intervalli eguali di tempo e corrispondenti a rotazioni di 90^o, presenta alternativamente un massimo come nei punti $V\,V$.... ed un minimo come nei punti $V_{,}V_{,}$..., per cui le velocità angolari trasmesse all'albero condotto, di 90^o in 90^o passano costantemente da un massimo ad un minimo e viceversa. Come risulta dalla stessa costruzione grafica il valore dell'ordinata minima è

$$90^o \; V_{,} = O\,v \times \cos.\,\alpha$$

quello dell' ordinata massima

$$O\,V = \frac{o\,v}{\cos.\alpha}$$

onde il rapporto tra la velocità angolare minima e massima dell' albero condotto è $\cos.^2\,\alpha$.

10. Riportandoci ancora alla fig. 5ª tav. 1ª è facile conoscere quale è, per rapporto agli assi di rotazione, il moto della croce dell' arco b ad essa connessa nel quadrilatero sferico. Perciò basta osservare che per ogni rotazione di 90^o del giunto, il piano della croce passa alternativamente dalla posizione proiettata in $M\,2'$, a quella proiettata iu M 3: quindi la croce oscilla intorno al centro M della sfera,

il suo piano descrivendo per rapporto a quello degli assi e le sue braccia entro i collari che le sostengono, un angolo doppio di quello acuto degli assi stessi in un senso ed uno medesimo angolo in senso contrario.

11. Lo studio del giunto di Cardano può farsi anche analiticamente per mezzo dello stesso quadrilatero sferico rappresentato in fig. 4ª. Infatti in esso le diagonali 1. 3 e 2. 4, per essere i lati b e c di 90^0, si incontrano costantemente in P ad angolo retto in qualunque posizione del quadrilatero; e considerando per posizione iniziale del giunto, quella per cui l' arco a è sul meridiano $d\ Q$ degli assi e l' arco c sul meridiano $4\ T$ perpendicolare a d, si ha che l'angolo 2. 1. $Q = \psi$ descritto dal braccio conduttore a partire dalla posizione iniziale supposta è complemento dell' angolo 3. 1. 4, $= \theta$, e l' angolo 3. 4. T descritto dal braccio condotto è eguale all' angolo 2. 4. 1 $= \varphi$. Laonde se sia α l' angolo acuto degli assi, dal triangolo sferico rettangolo 1 P 4 si ha

$$\text{cotg.}\ \theta = \text{tang}\ \psi = \cos\alpha\ \text{tang}\ \varphi$$

che è la nota relazione tra gli angoli descritti dagli assi di rotazione del giunto di Cardano.

12. Esaminiamo ora altre forme a cui può ridursi il quadrilatero sferico, mediante opportune modificazioni eseguite sulle coppie di collegamento de' suoi membri.

Sia fig. 7ª tav. 1ª., 1. 2. 3. 4 un quadrilatero sferico fissato sul lato d e di cui gli altri lati siano di 90^0. Mettendo in moto questo quadrilatero, il punto 2 si mantiene sempre sulla diagonale 2. 4 e siccome l' angolo 2. 4. 3 rimane sempre retto, così la rotazione intorno all' asse $M\,4$, non cambia legge se sia il perno 2 che spinga l' arco 2. 4. Questo può essese realizzato sostituendo agli archi 2. 3 e 3. 4, altri membri; così s' intenda che l' arco 2. 3. sia trasformato in un prisma pieno arcuato b, mobile intorno al perno 2, e che il lato 4. 3 sia convertito in una feritoia od arcoglifo c che contenga esattamente entro i suoi margini il prisma b. In tal modo si forma una catena parimenti chiusa, la quale differisce dal quadrilatero sferico in ciò solo che in luogo di un accoppiamento conico fra i membri b e c ha un accoppiamento prismatico. Ciò però non muta il rapporto delle velocità angolari di trasmissione, poichè l' arco 2. 3 del quadrilatero in tutte le sue posizioni sulla sfera è sempre perpendicolare all' asse dell' arciglifo e passa pel punto 2. Laonde a questa catena va pure applicato il principio dimostrato al n. 3°, relativo al quadrilatero sferico, avvertendo soltanto che il meridiano d'azione si ottiene conducendo un piano perpendicolare all' asse dell'arcoglifo nel punto 2. Questa catena può essere semplificata sopprimendo il prisma b ed accoppiando direttamente il perno 2 coll' arcoglifo c; anzi si può convertire lo stesso membro b in un cilindretto o fuso mobile intorno all'asse $M\,2$, fig. 8ª tav. 2, e ridurre così il contatto tra b e c di semplice sviluppo. Sotto quest' ultima forma può essere trasformato il

giunto di Cardano ed impiegato specialmente quando gli sforzi da trasmettersi siano piccoli.

13. La catena rappresentata in fig. 7ª tav. 1. può pure trasmettere moto di rotazione fra gli assi $M1$ ed $M4$, quand' anche l' arco a sia diverso da 90^0; in questo caso però la trasmissione non si fa più secondo la legge del giunto di Cardano, ma essa sarà parimenti determinata dai segmenti in cui il meridiano degli assi è diviso da quello, d' azione giusta il principio del nº 3, poichè l' angolo 2. 4. 3, non varia quantunque siano di 90^0 soltanto gli archi 4. 3 e 2. 3. Questa forma di catena dal Reuleaux è stata denominata manovella ad arcoglifo rotativo e può essere utile per ottenere una disposizione atta a comunicare a due assi concorrenti velocità eguali, siccome è rappresentato schematicamente nella fig. 9ª tav. II nella quale si vedono due meccanismi eguali ad arcoglifo rotativo riuniti insieme.

14. I tipi di catene ottenute si possono dedurre dallo stesso quadrilatero, supponendo che alcuno dei suoi lati invece di avere ampiezza di 90° sia nullo e modificando qualche coppia di collegamento. Supponiamo per esempio che il lato 3. 2 del quadrilatero sferico. Fig. 7ª tav. 1ª, sia nullo, allora le coppie 2 e 3 coincidono coi loro assi e la catena riducesi ad un sistema indeformabile; ma si può ridurre questo ad essere deformabile, mantenendo inalterata una delle coppie coincidenti, per esempio la 2, e trasformando l' altra in modo qualsiasi, purchè la catena resti cinematicamente chiusa. Così sia cambiato il perno della 3 nel prisma b, mobile intorno a 2 ed il suo collare in una feritoia ad arcoglifo mobile intorno a 4; si ottiene allora la stessa catena dell' arcoglifo rotativo. Questo processo può essere utile per ottenere una forma di giunto diversa da quelle esaminate fin qui. Cambiasi infatti l' arcoglifo c della fig. 7ª in una scannellatura $b\ c\ e$ avente per asse una curva sferica qualunque, fig. 10ª tav. II, e praticata sopra la stessa sfera S solidaria all' asse $4\,M$. Soppresso poi il prisma b della fig. 7ª più semplicemente lo stesso perno 2 sia impegnato in questa scanellatura; rotando allora intorno all'asse $M1$ l'arco a, avviene anche la rotazione della sfera intorno all' asse $M4$.

Questa forma di giunto è stata ideata dal sig. ing. Ferdinando Zucchetti (1) e può tornare utile quando gli sforzi da trasmettersi siano piccoli. L' asse della scannellatura può essere determinato analiticamente per mezzo del rapporto delle velocità angolari di trasmissione, ma si può tracciare anche meccanicamente sulla sfera, seguendo un processo generale che vale qualunque sia il rapporto delle velocità angolari di trasmissione. Per mezzo di opportuna disposizione si mettano in moto di rotazione i due alberi con velocità angolari eguali o variabili secondo una data legge, si sostituisca al fuso una punta che lasci traccia di sè sulla sfera e si otterrà su questa l' asse della scannellatura cercata (2).

(1) V. Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino. Vol. VII, feb. 1872.

(2) Invece di accoppiare insieme un fuso con una feritoia si potrebbero accoppiare due pezzi conici, i cui profili sulla sfera fossero due curve a e c, fig. 11 tav. II capaci di condursi per contatto attorno agli assi $m\,1$ ed $m\,4$, ed allora si cadrebbe nel problema delle ruote dentate coniche.

15. Il quadrilatero sferico avente tre lati di 90°, può ancora trasformarsi e dar luogo ad un' ultima forma di giunto che ora prenderemo in esame. Già cambiando l'accoppiamento conico degli archi 4. 3 e 3. 2, fig. 7ª tav. I in un' accoppiamento prismatico, è stata ottenuta una catena ad arcoglifo rotativo; se si cambiasse invece l' accoppiamento conico degli archi 1. 2, e 3. 2 in uno prismatico si otterrebbe una forma di catena analoga, nella quale sarebbe il membro *a* convertito in arcoglifo, senza che il rapporto delle velocità angolari fosse alterato da quello dello stesso quadrilatero sferico. Ora si può compiere questa trasformazione simultaneamente tanto sull' arco *a* come su *c* fig. 12ª tav. IIª, poichè gli assi di figura dei due arcoglifi, essendo anche le diagonali del quadrilatero sferico, si tagliano sempre ad angolo retto e però gli stessi prismi funzionano come se fossero rigidamente collegati tra loro sotto un'angolo di 90°. Possiamo adunque cambiare il quadrilatero sferico nella catena rappresentata in fig. 13ª tav. IIª, nella quale l'arco 2. 3 è convertito in una croce sferica rettangola *B* le cui braccia possono scorrere entro i due prismi *A* e *C* cavi, mobili intorno agli assi *M* 1, *M* 4 e nei quali si possono foggiare gli arcoglifi *a* e *c*. Come è evidente gli angoli 3. 1. 2 e 2. 4. 3 fig. 12ª tav. IIª, restano sempre di 90°, quindi le rotazioni che avvengono intorno agli assi *M* 1, ed *M* 4 usando quest' ultima catena, sono le stesse che avvengono impiegando il quadrilatero sferico.

16. Giova osservare che il moto relativo della croce per rapporto ai due assi di rotazione, non è diverso da quello oscillatorio dell' arco *b* intorno al centro *M* del quadrilatero sferico, poichè la croce è sempre connessa allo stesso arco *b*. Soltanto le coppie di collegamento essendo qui prismatiche lo strisciamento tra i perni ed i collari si è cambiato in quello tra le braccia della croce ed i prismi cavi che le reggono. Però non è punto mutata l' ampiezza angolare di questo strisciamento, il quale si fa parimenti per un angolo doppio di quello degli assi in un senso e per lo stesso angolo in senso contrario.

17. Si può trarre partito di quest' ultima catena per cambiare forma al giunto di Cardano e costruirlo come quello rappresentato in fig. 14ª, senza alterare il rapporto delle velocità angolari degli assi rotanti.

Trasformiamo infatti il prisma cavo *C* della fig. 13ª tav. II in una porzione di sfera piena *A'* fig. 14ª tav. II solidaria all'albero *M* 1 e su cui sia praticata una scanellatura *m* a sezione rettangolare avente per asse un circolo massimo della sfera. Convertiamo poi l' altro prisma *A* della fig. 13ª in una sfera cava *C'*, fig. 14ª, solidaria all' altro albero *M* 4 ed avente colla prima lo stesso centro *M* nel punto d' incontro dei due assi di rotazione. Anche sulla superficie concava di questa sfera sia praticata una scanellatura *n* di sezione rettangolare eguale alla precedente ed il cui asse sia diretto secondo un circolo massimo. Immaginiamo inoltre una scorza sferica *B'* il cui raggio interno sia eguale a quello della sfera *A'* e l' esterno eguale a quello della sfera *C'*. Sulla parte concava di questa scorza sia attaccato un risalto prismatico *p* che abbia per asse un circolo massimo e sia atto

a combacciare colla scanellatura *m* della sfera *A'*. Analogamente sulla parte convessa della scorza stessa sia attaccato un risalto prismatico *q*, come il primo atto a combacciare colla scanellatura *n* della sfera *C'* e disposto per modo che il suo asse sia perpendicolare a quello del risalto *p*. Ora la croce *B* della catena rappresentata in fig. 13ª tav. II sia trasformata in questa scorza; è allora manifesto che riunendo insieme a perfetto combacciamento le sfere *A'* e *C'* colla scorza interposta, rotando la sfera *A'* intorno all' asse *M* 1, si ottiene la rotazione della *C'* attorno al suo asse *M* 4.

Questo giunto può essere utilmente applicato specialmente quando l' angolo acuto dei due assi essendo piccolo, gli sforzi da trasmettersi siano grandi; poichè esso può essere costruito molto robusto, senza occupare grande spazio nè diventare eccessivamente pesante.

18. Il quadrilatero sferico dà origine ad un numero veramente grande di altre catene diverse e molto frequentemente applicate in pratica, quando si passa a supporre che il centro della sfera su cui esso esiste vada a distanza infinita. Non è qui il luogo di parlare dei meccanismi che per tale supposizione derivano; (1) ma pel caso particolare dei giunti può essere utile di osservare, che se il centro *M* della sfera su cui si sono considerati il quadrilatero sferico e le sue catene derivate va a distanza infinita, si ottengono dai giunti antecedentemente esaminati, quelli più comunemente impiegati per la trasmissione di moto tra assi paralleli. Così se il centro *M* della sfera va a distanza infinita, la catena dell' arcoglifo rotativo rappresentata in fig. 7ª tav. 1ª, nella quale l' arco *a* è diverso da 90ª, dà origine al giunto conosciuto sotto il nome di manovella a *coulisse*. Se oltre al centro *M* posto a distanza infinita, si suppongano anche tre lati di 90° nel quadrilatero sferico, allora la catena rappresentata in fig. 13ª tav. IIª la quale tien luogo dello stesso quadrilatero sferico rappresentato in fig. 4ª tav. Iª e della sua forma derivata rappresenta in fig. 8ª tav. IIª si trafsorma nella catena a croce piana rotativa fig. 15ª tav. IIª. In questa la croce compie per rapporto ai due assi, divenuti paralleli, un moto oscillatorio attorno ad un punto a distanza infinita, per cui in una intera rivoluzione essa si sposta sopra un piano perpendicolare ai due assi e le sue braccia strisciano entro i rispettivi contro-prismi cavi, di due volte la distanza dei due assi in un senso e di due volte la stessa distanza in senso contrario. Come poi dalla catena rappresentata in fig. 13ª tav. II. deriva il giunto della fig. 14ª tav. II. così dalla catena a croce piana rotativa si deduce il giunto di Oldham, e però ne risulta questa conseguenza : che il giunto di Cardano o di Hooke e quello di Oldham sono cinematicamente eguali.

(1) V. Rouleaux. — Teoria delle Macchine.

C. Bettini inc.

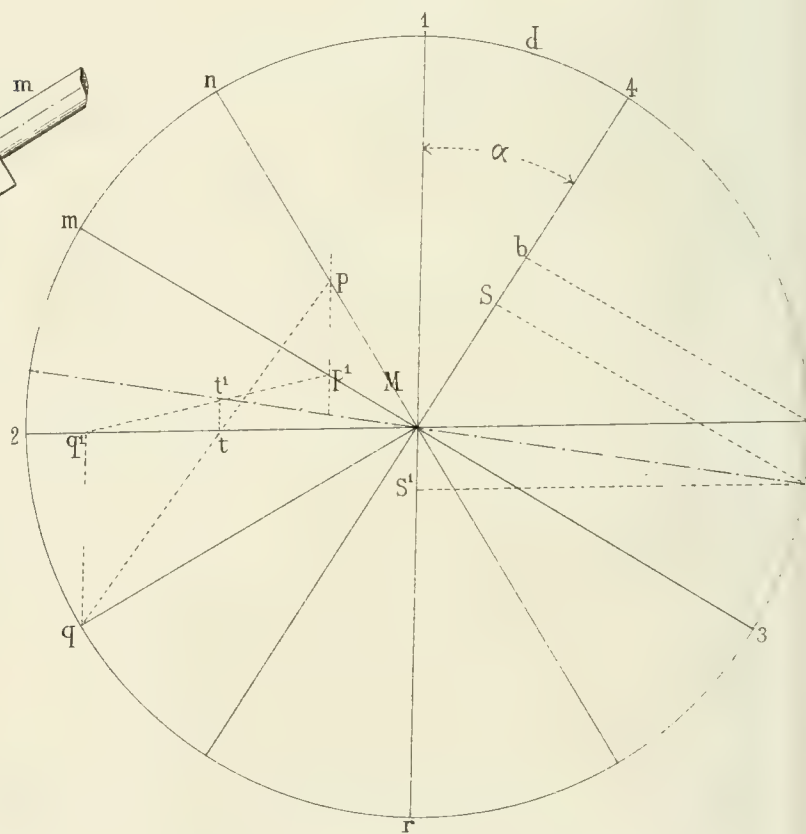
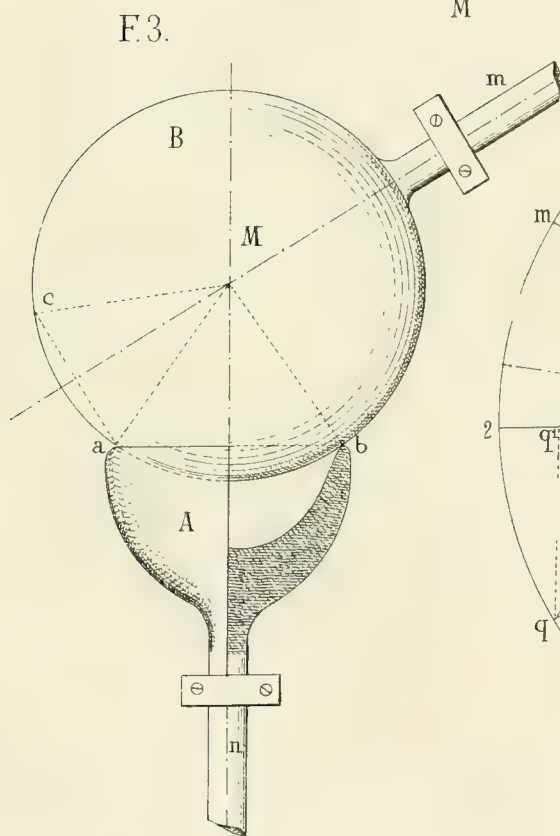
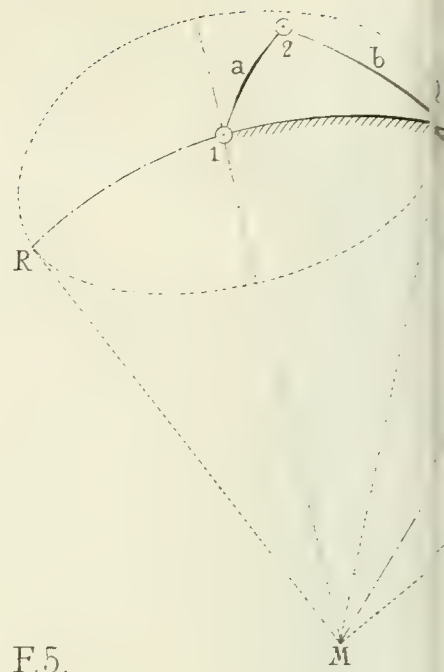
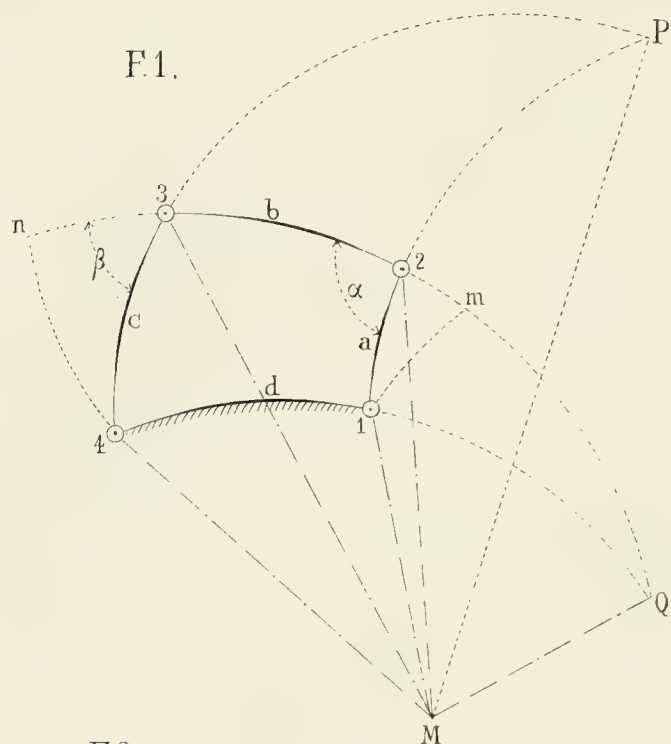
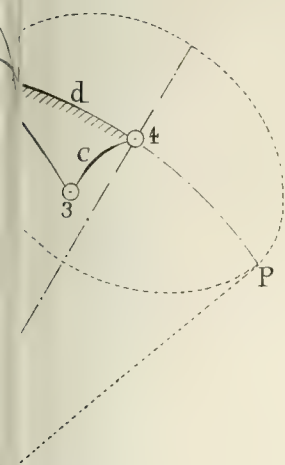
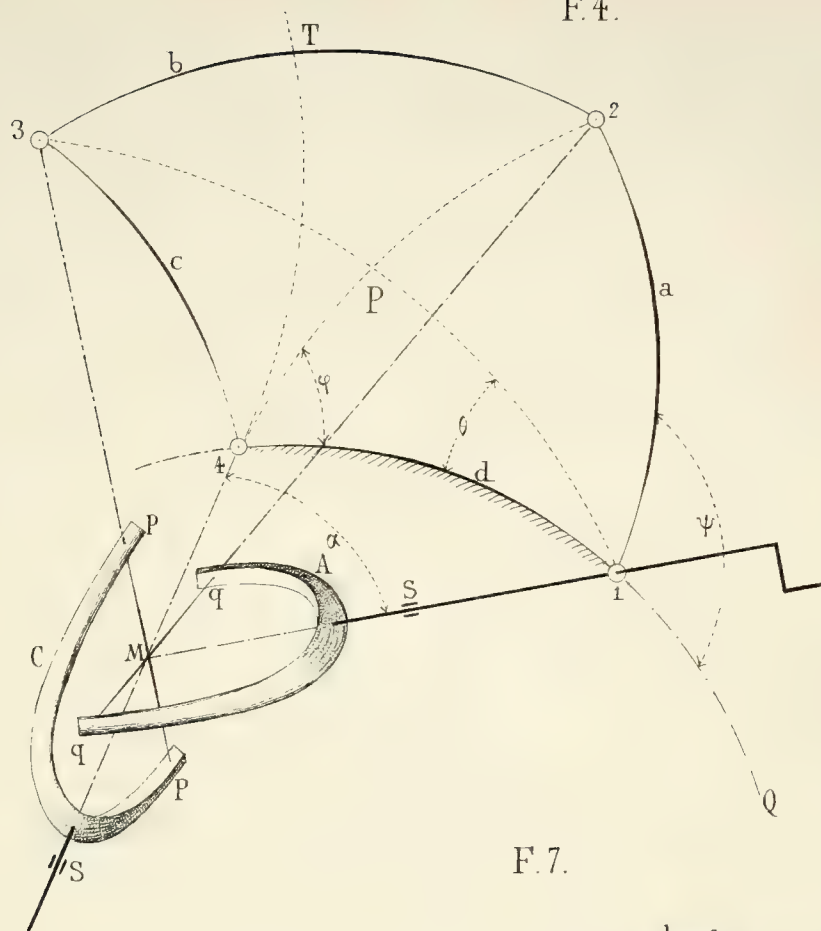
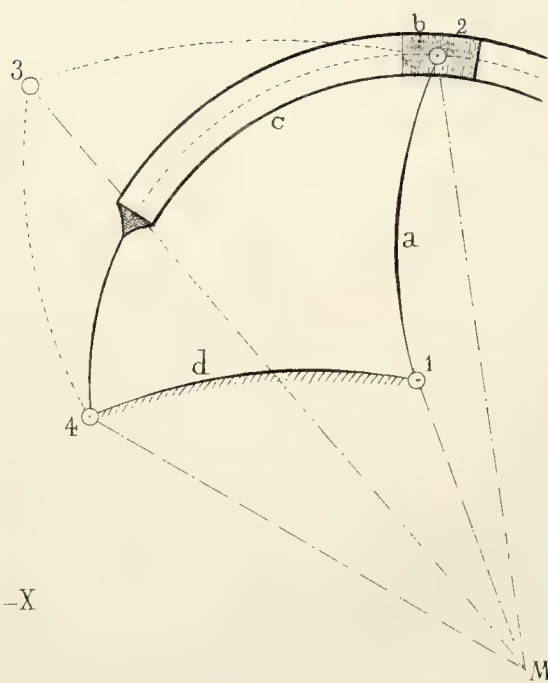
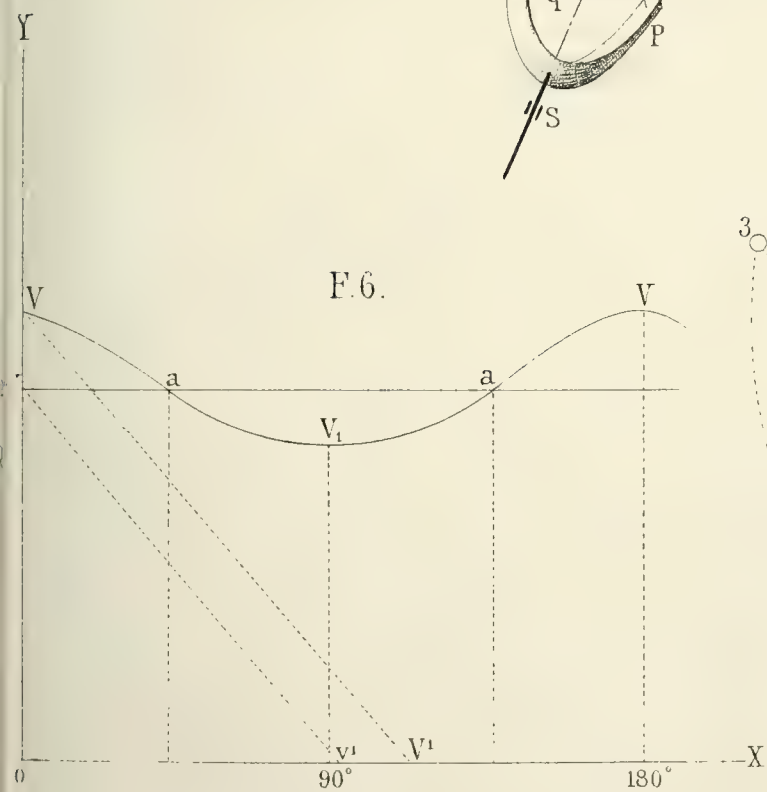
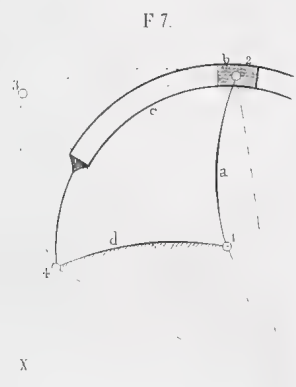
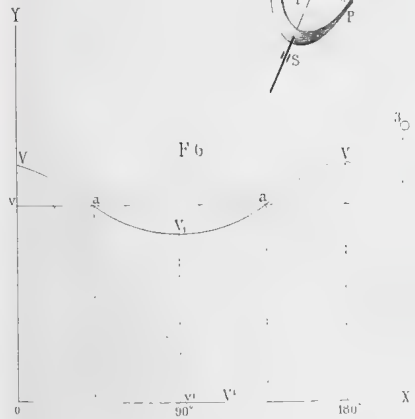
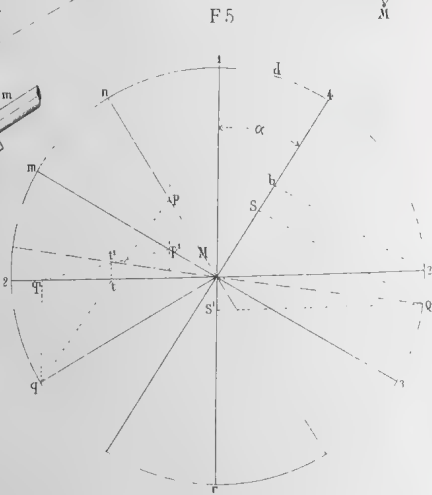
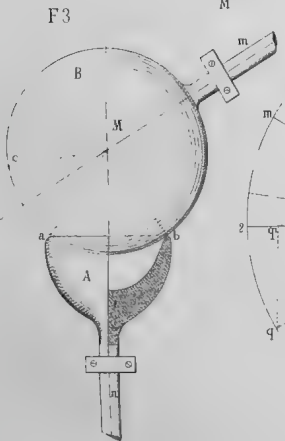
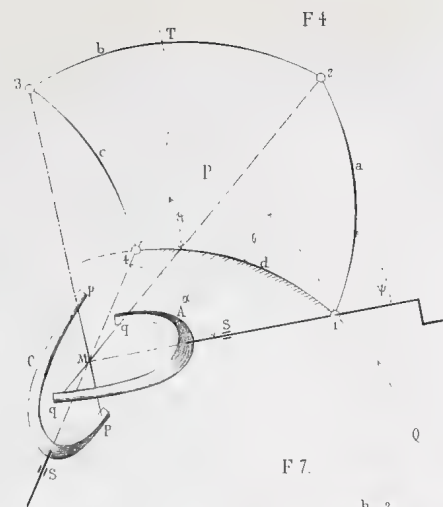
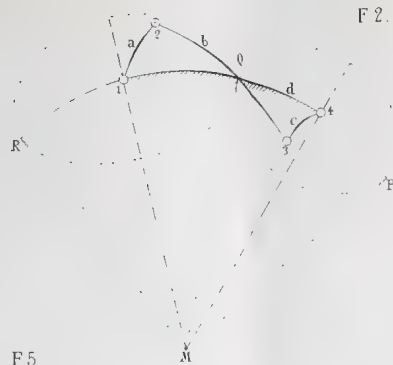
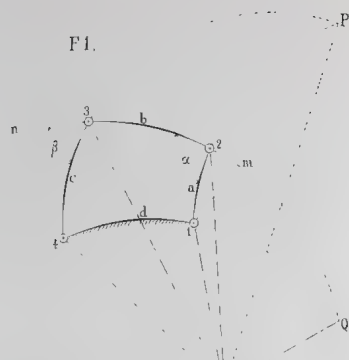
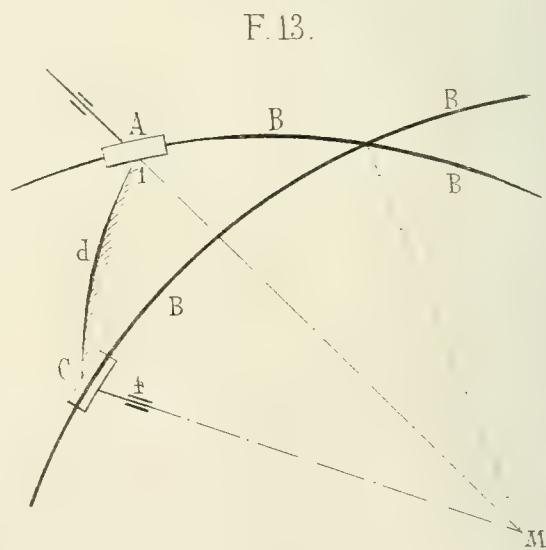
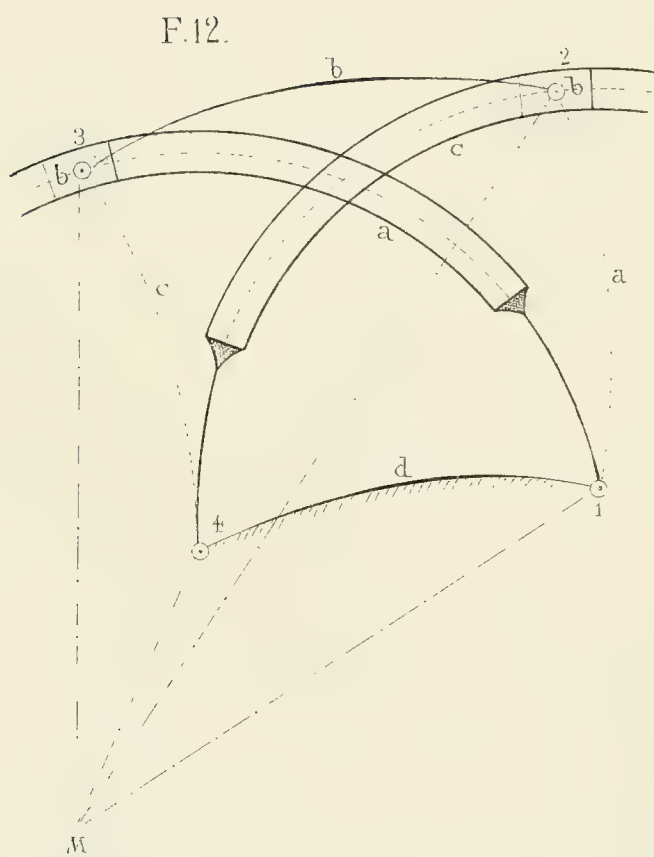
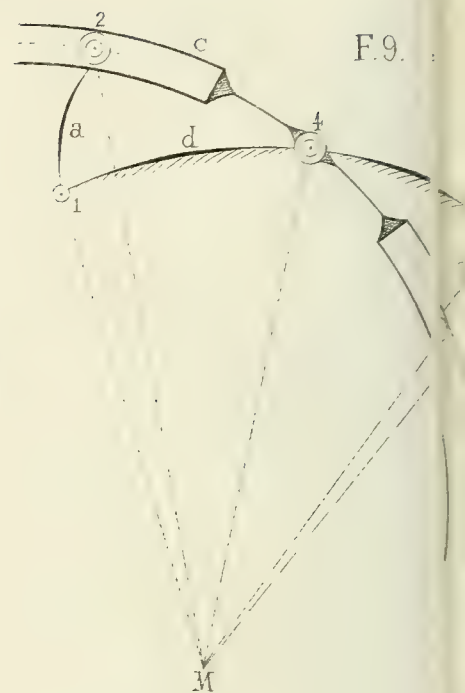
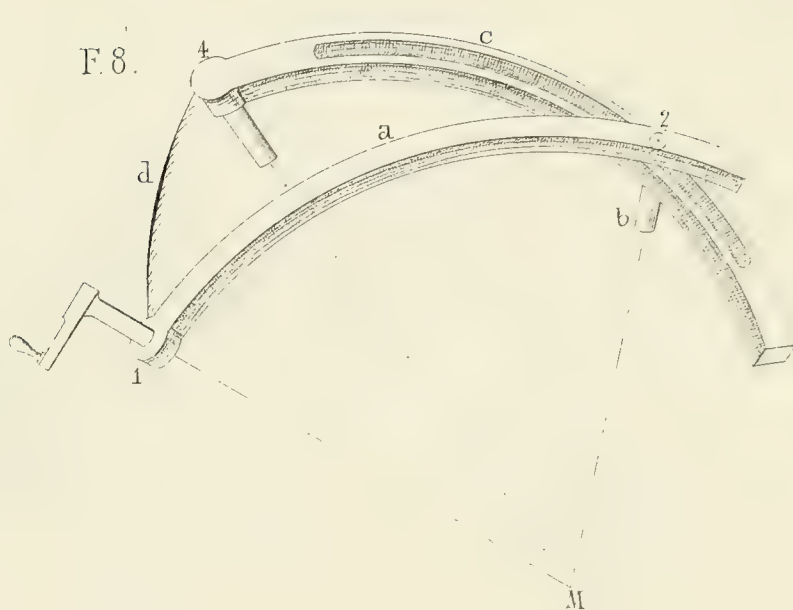
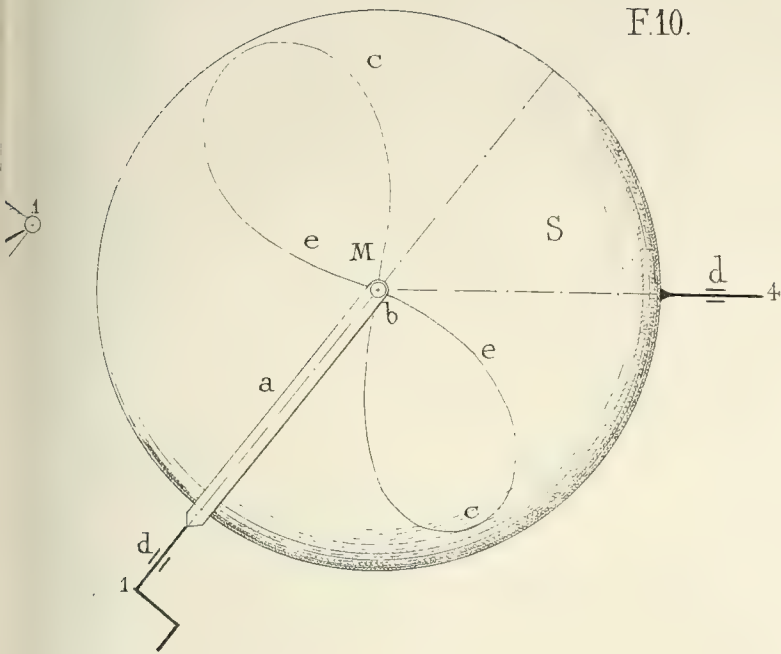
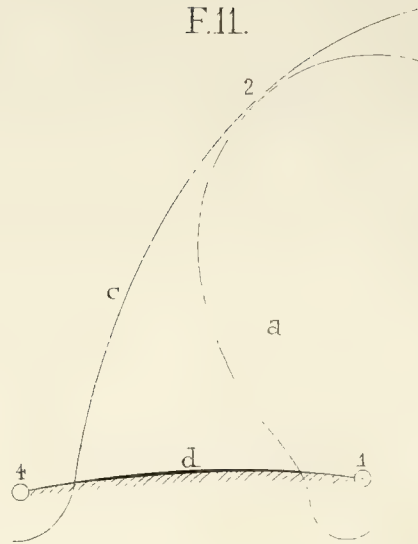
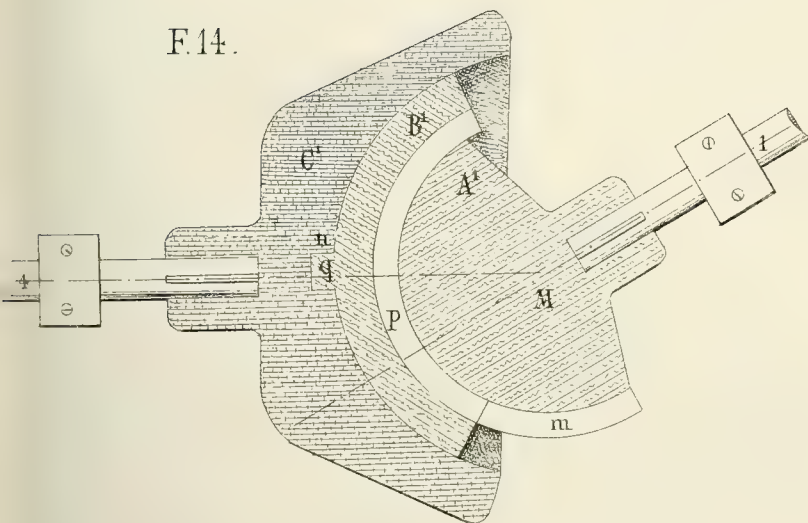
F.Masi Tav. I.

F.2.
d
c
3
4
P
F.4.
T
b
3
2
c
a
P
φ
θ
4
d
ψ
α
A
S
1
q
C
M
q
P
P
S
Q
F.7.
b
2
3
c
a
d
1
4
M
F.6.
Y
V
V
a
a
V_1
V^1
V^1
0
90°
180°
X

F 1.
F 2.
F 3
F 4
F 5
F 6
F 7.

F. 8.
F. 9.
F. 12.
F. 13.

F. Masi Tav. II.

Lit. G. Wenk

F 8
F 9
F 10
F 11.
F 12
F 13
F 14
F 15

VASTA IDATIDE DEL FEGATO

TRATTATA COLLA PUNTURA CAPILLARE ASPIRANTE

PRATICATA NEL SESTO SPAZIO INTERCOSTALE DESTRO

STORIA E CONSIDERAZIONI

Del Prof. GIOVANNI BRUGNOLI

(Letta nella Sessione del 18 Marzo 1880).

Posciachè negli anni decorsi ebbi ad intrattenere questo illustre Consesso dando comunicazione di studî e di osservazioni sul valore terapeutico della puntura del petto in diverse circostanze di malattia, cioè nell' essudato sieroso pleuritico (1), nello empiema (2), nella gangrena pulmonale (3) e da ultimo nel pneumotorace (4), in quest' anno pure a soddisfare al penso accademico ho divisato di parlare della puntura del petto nella cura dell' echinococcho, e di quelle cisti di echinococco cioè che hanno sede nel fegato e che per la località del viscere in cui si sono svolte rimangono nascoste sotto la cassa toracica; e tanto più prendo questo divisamento perchè ho da registrare un fatto clinico tanto importante da ritenerlo degno d' istoria, sia per riguardo all' alterazione anatomo-patologica, una ciste di tanto volume da avere pochi riscontri, sia per l' applicazione nel trattamento curativo, del metodo della puntura capillare aspirante fatta attraversando la cassa toracica per ricercare il diagnosticato tumore idatideo nascosto tutto quanto sotto la parete costale ed inacessibile a qualsiasi ricerca di ispezione e di palpamento; atto operativo che è stato seguito dal più brillante successo.

Ed ecco subito la narrazione del fatto clinico che ho ora accennato.

(1) *Contribuzione alla pratica della Toracentesi capillare negli essudati sierosi pleuritici.* — Sessione delli 27 Marzo 1873. *Memorie,* Ser. 3, Tom. 3, pag. 247.

(2) *Sulla cura dell' Empiema* — Sessione delli 20 Novembre 1873. *Memorie,* Ser. 3, Tom. IV, pag. 281.

(3) *Contribuzione allo studio clinico della Gangrena Pulmonare.* — Sessione 1 Marzo 1877. *Memorie,* Ser. 3, Tom. 7, pag. 525.

(4) *Della puntura del petto nel Pneumotorace e del modo di praticarla.* — Sessione 23 Giugno 1879. *Memorie,* Ser. 3, Tom. 10. pag. 51.

La mattina del 25 luglio dell' anno scorso mi reco a Lugo in seguito di pressante chiamata per visitare in consultazione una nobile signora, giovane di 26 anni che trovavasi assai aggravata in ispecie per disturbi di respiro e delle funzioni gastro-epatiche; sulla malattia vi hanno incertezze anche e più particolarmente dal lato diagnostico. E diffatti mi si presenta questa signora con un respiro alquanto affannoso, non può decombere supina, ogni movimento ne aumenta la dispnea e si veggono traccie di cianosi in alcuni momenti, i polsi sono frequenti precipitati. essa è in preda a rilevante angustia. Ottenuto dopo breve tempo notevole calma mi è permesso di fare un' esame alquanto diligente dello stato dell' inferma per quanto le circostanze il permettono; ed ecco quanto di maggior interesse mi fu dato raccogliere. Derivazione alquanto sospetta, l' infanzia segnata da qualche lieve marca di tempra linfatica e di scrofola; in seguito regolare anzi vigoroso sviluppo del corpo; andò a marito a 24 anni non compiti essendo bene complessa di corpo ed in fiorente salute. Ma subito dopo e nei due anni che sono trascorsi la nutrizione è andata man mano deteriorando; Essa ha perduto il benessere della sanità e della vigoria. Non è stata incinta, ha avuto però di spesso mestruazioni abbondantissime da dirsi vere menoraggie, alle quali si attribuiva lo scadimento nutritivo osservato. È stata pure decisamente malata per febbre, per bronchite catarrale; da qualche mese i disturbi di salute sono stati continui e più accentuati, tosse secca urtante, respiro affannoso, dolori al petto per il che si diede malata e venne medicata, ritenuta affetta da un essudato da cronica pleurite; ebbe poi alternative di alleviamento e di recrudescenze, ma il male però crebbe così da porla nelle condizioni che ho or ora accennate; alla dispnea, alla tosse si aggiunsero intolleranza per parte dello stomaco di cibo e bevanda anche in piccola quantità, vomito talora, inappettenza: non poteva prender sonno quantunque ne sentisse forte bisogno, perchè non appena vi chiudeva gli occhi si sentiva fermare il respiro.

Dall' esame obiettivo del torace mi risultò che a destra anteriormente vi ha un suono ottuso alla percussione che incomincia dopo la seconda costa e si estende in basso a tutto il torace e ivi manca il mormorio vescicolare respiratorio; invece posteriormente si ottiene suono chiaro alla percussione fino alla nona costa ed ivi si ode pure il rumore vescicolare: bene osservando rilevo che vi si trovano le condizioni opposte di quelle che d' ordinario si riscontrano nei versamenti pleurici, giacente supino l' infermo; giacchè allora l' altezza del pelo del liquido è segnata da un piano che dall' alto posteriormente viene in basso anteriormente, mentre nel fatto in osservazione il piano dalla parte anteriore e superiore del torace scende in basso e posteriormente. Al lato sinistro posteriore, respiro normale e suono chiaro normale alla percussione; anteriormente si nota il cuore essere stato portato in alto ed a sinistra, l' impulso si vede e si sente al quarto spazio intercostale, l' ottusità notata a destra si prolunga oltre lo sterno. Per essere breve non fo qui nota degli altri sintomi relativi ai movimenti respiratori, al fremito vocale e di quant' altro si riferisce a disturbi funzionali di respiro e di circolazione sanguigua, sembrandomi sufficiente allo scopo diagnostico del caso quanto ho esposto.

Nell' esame dell' addome colla percussione e col palpamento si riconosce manifestamente che il fegato sporge dall' arco costale ed arriva a toccare la linea inferiore della regione ombellicale, cioè sulla linea delle creste degl' ilei; si estende pure a sinistra fino alla milza colla quale sembra far corpo e questa sembra spinta in alto ed allo indietro; la superficie del fegato appare liscia, si avvertono però piccole ineguaglianze ma niuna bozza o tumore prominente nè sodo, nè fluttuante. Null' altro si riconosce di anormale da parte degli intestini e dell' apparato genito-urinario; non edemi, la cute bianca, panicolo adiposo alquanto scadente.

Io non ripeterò qui le molte considerazioni fatte su questo complesso di sintomi; non dirò della discussione tenuta cogli onorevoli Colleghi curanti i sig. dott. Ballotta e Lanzoni per arrivare a formarne la diagnosi; più innanzi avrò occasione di parlarne alquanto; ora mi limito soltanto ad annunziare che il mio giudizio fu che si trattasse di una nuova produzione nel fegato e specialmente di una vasta cisti idatidea da echinococco, diagnosi alla quale assentirono pure senza eccezione gl' illustri medici curanti nominati.

Esaurita così la parte diagnostica della consultazione si passò allo studio della parte terapeutica.

In presenza di una idatide da echinococco nel fegato il medico non può essere che assai titubante nello appigliarsi ad un trattamento curativo qualsiasi; e confesso che ogni volta che mi trovai dinanzi a questo fatto rimasi sempre assai perplesso nel prendere un partito. La cura medica, così detta, lascia sempre il desirio di un medicamento capace di distruggere l' idatide; e se qualche volta misi a prova il calomelano, come propose Baumés, se attratto dalla proposta del Laennec, ricavata dall' osservazione di vedere le mandrie di pecore affette da malattie prodotte da vermi vescicolari, guarirne col pascolare nei prati a palude salata (1), usai anche a lungo del cloruro di sodio, non ne viddi mai alcun risultato soddisfaciente. Quale felice risultato potevamo aspettarci dal joduro di potassio proposto dall' Hawkins, raccomandato per osservazioni pratiche da Heckford, da Desnos, da Jaccoud? Oltrechè è messo in dubbio, anzi per le ricerche di Murchison, di Frerichs e Semmola (2) viene dimostrato che nelle cisti non è penetrato il joduro per poter uccidere le idatidi, è certo che l' azione di questo farmaco non potrebbe essere che lentissima, mentre nel caso in discorso era richiesto, se possibile, un pronto provvedimento; di più la scadente nutrizione, l' abbattimento delle forze fors'anche crescerebbero per l' azione prolungata del joduro. Anche all' elettro-puntura non era qui da pensare per l' urgenza del provvedimento, se anche le osservazioni raccolte in Francia e quelle del Semmola in Italia non venissero a scemare d' assai quel valore terapeutico che vi hanno dato i medici inglesi.

La cura chirurgica nelle idatidi del fegato quando si presenta il tumore sporgente

(1) Tratt. dell' Ascoltazione mediata. — Traduz. ital. Livorno 1834, Tom. 2, pag. 350.

(2) Dict. Encyc. des Scien. Méd. Art. Foie (Pathologie) pag. 231.

fuori dall' arco costale forma una suprema risorsa; e se talvolta praticata anche colle maggiori cautele, con tutte le possibili precauzioni, con tutti i metodi che furono proposti, diede infausto risultato, assai spesso però pervenne ad evacuare il liquido, a far cicatrizzare la sacca, ad ottenere completa guarigione. Ma nel caso in osservazione non vi era, come dissi già, tumore sporgente dall' arco costale sul quale operare direttamente e con sicurezza. Però in quello ampliamento che ho notato, sulla metà inferiore del torace destro e nella parte laterale anteriore si osservava un rialzo (une voussure), una specie di bozza larga e piana prodotta da sollevamento delle coste, la quale sembrava indicare che sotto quella porzione di cassa toracica si fosse esercitata una lenta e continuata pressione che l' avesse alcun po' sollevata, come vediamo accadere negli essudati pleuritici e pericarditici; da ciò il sospetto che contro quella porzione di torace facesse pressa la cisti. La figura data dal Frerisch a pag. 55 del suo Trattato pratico delle malattie del fegato (1), la figura ed il caso descritto dall' amico e collega distinto, l' accademico sig. cav. Ferdinando Verardini (2), me lo accrescevano. A confermarlo però poteva tornare opportuno l' impiantare ivi profondamente un' ago da agopuntura, come ho praticato altre volte, e come riferì lo stesso nostro collega a pag. 380 della memoria citata, perchè l' ago coi movimenti facili di inclinazione indicasse d' essere penetrato in un' ampia cavità; in oggi però che gli aghi per le punture capillari sono bene entrati nel dominio della pratica e specialmente gli aghi canelli con cui fare iniezioni ed aspirazioni, mi sembrò che una puntura di saggio praticata coll' ago e la siringa di Pravaz, quale apparecchio aspirante, senza esporci ad incidenti spiacevoli potesse cerziorare se là esistesse la cisti come io aveva supposto. Nello scegliere il luogo ove impiantare l' ago mi parve che nel sesto spazio intercostale si avvertisse un punto di fluttuazione. la qual cosa sempre più ci incoraggì nel proposto divisamento, ed ivi infatti dal sig. dott. Ballotta venne impiantato l' ago. Per fare l' aspirazione, ritirato lo stantufo della piccola siringa, questa si riempì di un umore di tanta limpidezza da lasciare incerti se il tubo di vetro fosse vuoto o no.

Confermata così ampiamente la diagnosi e veduta l' insufficienza di quel piccolo apparecchio a soddisfare allo svuotamento di una cisti che dai dati raccolti doveva ritenersi assai voluminosa, fu proposto di usare dell' aspiratore di Potin, e avuto questo prontamente, venne infisso uno degli aghi più fini nello stesso spazio intercostale alla distanza di oltre un centimetro dal luogo ove era stato impiantato il primo; messo in azione l' apparato, l' umore della cisti incominciò a passare nel vaso in cui si praticava il vuoto ed in breve, proporzionatamente alla sottigliezza dell' ago-canello, lo si vide pieno, ed è della capacità di due litri; a questo venne sostituito una bottiglia della capacità di un litro, ed anche questa rimase piena. Così che furono estratti tre litri di liquido da quella sacca.

(1) Paris 1862.

(2) Nelle Memorie di questa Accademia. Anno 1865, Ser. 2, Tom. 4, pag. 369.

Durante lo svotamento la signora era in preda a qualche smania, e ad agitazione; accusava di provare sensazioni interne non descrivibili, fu colta anche da un deliquio che si protrasse alquanto, ma che non ebbe caratteri da allarmarci. In tale stato essa continuò per tutto il rimanente della giornata; prima di partire procurai confortarla con liete speranze, le raccomandai la maggiore possibile immobililà e consigliai che le fosse amministrata una pozione sonnifera.

Ho saputo poscia che la signora non tardò molto nella sera a prender sonno, dormì tanto profondamente che soltanto a tarda mattina si svegliò ed allora si trovò tanto cambiata da farne essa stessa le maggiori meraviglie e da non riconoscersi per quella del giorno innanzi essendo affatto scomparse tutte le sofferenze, tutte le dolorose sensazioni; ed il 6 Agosto, 12 giorni dopo la puntura, il sig. dott. Ballotta mi scriveva che la signora non presentò nessuna alterazione del generale, che cessarono tutte le sensazioni dolorose e tutti i disturbi funzionali, che ha riacquistato il beneficio di sonni prolungati, che le si è ridestato l' appetito e mangia molto, che sta alzata la maggior parte del giorno, e che ha avuto la mestruazione senza sconcerti.

Passarono appena altri dodici giorni che Essa fece un corsa a Bologna, affinchè la visitassi per sapere se fosse mai minacciata di recidiva. Essa non provava alcun disturbo nell' esercizio delle sue funzioni, correva, saliva e discendeva scale senza che la respirazione si rendesse affannosa. Il fegato però si manteneva voluminoso, in alto giungeva alla quarta costa, in basso sporgeva tre dita trasverse oltre l' arco costale, anche il lobo sinistro si conservava alquanto ingrandito. Rivisitata di nuovo dopo circa tre mesi riscontrai pure diminuite le dimensioni del fegato e si trovava sempre come si trova di presente in uno stato di benessere assai lodevole avendo anche migliorato nella nutrizione.

Essendo già trascorsi quasi otto mesi in queste condizioni, se non si può dichiarare ottenuta una completa e stabile guarigione, si dovrà riconoscere che più felice risultato non si poteva fin quì sperare.

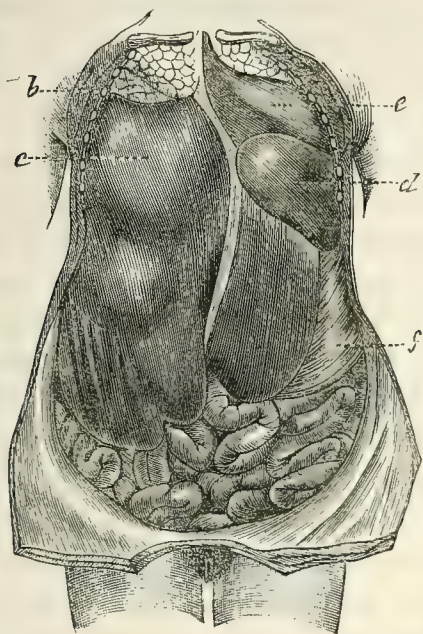
Il caso clinico che ho descritto mi sembra assai importante non solamente per parte dell' applicazione terapeutica, ma eziandio dal lato diagnostico e dal lato anatomico e quindi stimo opportuno alla istoria clinica far seguire alcune brevi considerazioni.

E primieramente a convalidare il concetto diagnostico di una cisti da echinococco innanzi tutto è da porsi la quantità, la qualità, e la natura chimica del liquido estratto. La limpidezza di esso da non distinguere quando il tubo di vetro fosse pieno o no, la sua somiglianza all' acqua di cristallo di roccia, come dissero alcuni scrittori, l' essere privo di albumina sono tali caratteristiche che senza altra indagine chimica lo dichiarano apertamente pel contenuto di una cisti da echinococco, eziandio quantunque le indagini microscopiche nella ricerca degli uncinetti nel sedimento lasciato risultassero negative. La quantità poi che ne fu estratta (tre litri) è tale da indurre a ritenere, anche pel gettito non mai interotto che ebbe

luogo durante lo svotamento, che si sia trattato di uno di quei casi di una cisti senza vescicole figlie, uno di quei casi che il Laennec chiamò cisti acefalociste e che tenne distinte dalle cisti da echinococco. La istoria completa dello sviluppo della idatide dal *taenia echinococus* mostra come fissato il germe nella località avvenghino modificazioni di due ordini, cioè cresca in forma di vescica così da arrivare talvolta a dimensioni considerevoli, poscia dia luogo alla proliferazione di idatidi figlie simili alla madre formando l' acefalociste, indi la membrana germinale origini gli echinococchi. Non è un fatto eccezionale però il trovare soltanto una sacca piena del liquido speciale senza traccia di vescicole figlie e di echinococchi, il quale fatto, come è notorio, viene interpretato ritenendo che l' idatide non abbia percorso tutte le fasi del suo sviluppo, che non abbia oltrepassato la formazione della vescicola madre, anzi siasi arrestata prima di giungere a questa trasformazione. Una idatide di questa specie voglio sperare sia stata quella di questa inferma.

Se in oggi e dopo la puntura non è più luogo di mettere a riscontro diagnostico il concetto di un essudato pleuritico, prima non era così, la grande ottusità alla percussione, la mancanza del mormorio respiratorio e di vibrazioni toraciche nella parte anteriore del torace fino quasi alla seconda costa, l' allargamento di questa parte, i disturbi del respiro, la dispnea, ne potevano essere non lievi indizi; ma la linea che marcava l' ottusità, indicante come dissi un piano che dalla parte superiore anteriore della cassa toracica si portava alla parte posteriore inferiore, si mostrava ben diversa da quella data da un essudato pleuritico libero; inoltre lo spostamento così rilevante del cuore a sinistra ed in alto è proprio della cisti di fegato, non dell' essudato; infine il riscontrare il fegato occupante la regione ombellicale, piuttostochè indicare un abbassamento di esso prodotto da una raccolta pleurale, aveva i dati tutti di un vero ingrandimento per una produzione patologica in esso sviluppata; il fegato non viene abbassato per un versamento pleurico se non è riempita la cavità toracica, e nel fatto in discorso la parte superiore e posteriore del pulmone respirava con sufficiente regolarità. E se anche non vi era manifesto abbassamento del fegato nell' atto dell' inspirazione, a questo fatto non si poteva dare molto valore considerando la mole straordinaria di esso; aggiungerò ancora che niun indizio si aveva di quel solco fra il bordo costale e la superficie convessa del fegato, ritenuto importante segno dallo Stokes ad indicare l' abbassamento del fegato per spandimento pleuritico.

Tutti questi argomenti, a me pare, possono servire pur anco ad escludere il concetto che siasi trattato di cisti idatidea del pulmone o della pleura: il fegato in questo supposto caso non poteva avere le dimensioni notate, non lo spostamento ed abbassamento descritto, come neppure non poteva esservi lo spostamento del cuore così marcato a sinistra ed in alto, non pure l' innalzamento della milza. A maggiore conferma poi della diagnosi fatta, richiamo la vostra attenzione alla figura dell' Opera più volte citata del Frerichs che vi presento ed alla relativa Osservazione

(pag. 51 e 511), ove la disposizione che avevano preso i visceri in quel cadavere, in relazione ai dati sommistrati dalla storia clinica, a me sembra dovere dissipare ogni dubbiezza.

(*a*) Frerichs. — Op. cit. Figura 17-52. Il diaframma a destra s' innalza fino alla seconda costa; al dissopra il lobo medio e superiore del polmone (*b*) ridotto per la compressione ad una membrana grigia bluastra priva d' aria, il lobo inferiore spinto indietro. A sinistra il cuore (*e*) respinto in alto e lateralmente in posizione trasversale colla punta al terzo spazio intercostale, inalzandosi il diaframma fino alla quarta costa spintovi dalla milza ipertrofizzata (*d*). Sotto al diaframma si vede il fegato che contiene una cisti (*c*) che misura 9 pollici e 3|4 in altezza.

Il fatto poi che ho descritto mi pare notevole, come dissi anche pel lato anatomico. Una cisti, dalla quale con ago capillare aspiratore si estrassero 3 litri di liquido, deve avere avuto straordinarie dimensioni da annoverarla fra i casi rari e meritevoli di nota; come i fatti che furono riportati e descritti dal Frerisch (1), dal Gooch (2), dal Dolbeau (3), dal Verardini (4), e tanto più per la particolarità di spingersi tanto in alto nel torace da avere il riscontro nel caso del Frerisch ed in quello di Gooch che arrivavano fino alla clavicola.

Questo fatto poi dal lato curativo presenta a mio avviso notevole importanza e non solamente conferma la facilità, la semplicità dell' atto operativo, le poche molestie che questo cagiona, ma la prontezza colla quale si provvede non solamente al più urgente bisogno, quanto al fatto morboso istesso con una cura radicale; provvedimento difatti che può talvolta tornare completo dando stabile guarigione; ed i casi di guarigione di cisti di fegato in seguito di una sola puntura capillare aspirante si vanno già moltiplicando (5), e questo metodo ottiene ora la

(1) Op. cit. Paris, pag. 52 e 516.

(2) Cases and remarks in surgery. London 1758.

(3) Études sur les grands kystes du foie (Thése).

(4) Memor. cit.

(5) I casi di Boinot, Frerichs, Heurtaux, Jaccoud, Lancereaux, Moutard-Martin, Gubler ecc. Diction. Encyc. Sc. Med. Ser. 4 T. 3 pag. 237 art. Foie.

preminenza, e tanto più deve essere accolto essendo reso probabile per le ricerche e gli argomenti portati da Desnos (1) che una idatide distrutta dal trequarti nuocia assai allo sviluppo ed alla vita delle vescicole rimaste sane e sia atta anzi a darvi morte.

Il lato speciale del fatto clinico narrato è quello d' essermi accinto a proporre la puntura non avendo sotto l' arco costale il tumore idatideo, come nei casi ordinari che fin qui sono stati pubblicati, per quanto sia a mia notizia, e di doverla praticare nel sesto spazio intercostale, ove, sebbene vi fossero molti dati per ritenere colà trovarsi la cisti, non vi era quella certezza che vi ha quando col palpamento avete per così dire in mano il tumore. A tale divisamento fui condotto dalle applicazioni che sono state fatte degli apparecchi aspiratori di Dieulafoy e di Potin in malattie di fegato e negli ascessi profondi di esso, dal sapere come si possa quasi impunemente far penetrare nel fegato non solamente aghi da agopuntura, ma gli aghi fini di quegli apparecchi aspiratori e che il trauma in tali condizioni è quasi nullo, essendo così tenue il foro da non lasciare traccie, dissociando piuttosto che troncando le fibbre della cisti, la quale col vuotarsi offre circostanze favorevoli alla chiusura immediata della piccola ferita.

Il fatto narrato conferma adunque l' utilità nella cura delle idatidi della puntura capillare aspiratrice, la quale unica in molti casi non bastando, potrà essere ripetuta, e quando essa arrivi a farci conoscere che la cisti ha suppurato, allora necessiterà il ricorrere agli antichi metodi di Recamier, di Bégin, di Graves per aprire largamente il tumore e dare uscita a quelle materie purulenti o putrefatte che potrebbero occasinare gravissiome conseguenze.

Lo svuotamento di una cisti idatidea del fegato è sempre operazione grave e in casi anche i più semplici pericolosa, ma bisogna dichiarare che la puntura capillare aspiratrice è il metodo che presenta maggiori risorse, è quello che a mio avviso deve avere la preminenza.

(6) Bull. thérap. 1875.

DI ALCUNE SINGOLARITÀ

NEI FASCI E NELLE RETI

DI LINEE PIANE ALGEBRICHE

MEMORIA

DEL PROF. F. P. RUFFINI

(Letta nella Sessione ordinaria del 4 Marzo 1880)

Una linea piana algebrica dell' ordine n, che abbia punti multipli secondo i numeri

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \ldots \geq i_t$$

che soddisfanno l' equazione

$$\Sigma \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - v,$$

diremo che è linea del *genere* v.

Rappresenteremo col simbolo L_{nv} la linea piana algebrica dell' ordine n e del genere v i di cui punti multipli secondo $i_1, i_2, \ldots, i_t$ soddisfanno le equazioni

$$(1) \qquad \Sigma \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - p; \; 0 \leq p \leq 2; \; \Sigma \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - v;$$

e si suppongono dati nel suo piano.

La linea così definita non è, generalmente parlando, una linea pienamente determinata, perchè si può farla passare per p punti scelti ad arbitrio nel suo piano. Il simbolo L_{nv} rappresenta perciò ognuna delle linee di una serie di un numero indefinito (p volte infinito) di linee, ciascuna delle quali è *definita dalle equazioni* (1) e diventa determinata dati che siano altri p de' suoi punti, o, come suol dirsi, è *determinata da p punti*.

Quando vorremo esprimere che una proprietà è comune a tutte le linee rappresentate dal simbolo $L_{n\nu}$, diremo essere quella una proprietà della linea $L_{n\nu}$.

Nella determinazione di una linea, un punto dato e multiplo secondo i equivale a $i(i+1):2$ condizioni o punti dati: la linea $L_{n\nu}$ non può quindi, in generale, avere punti multipli (doppi, tripli, ecc.) oltre quelli compresi nelle equazioni (1) e che servono a definirla. Può tuttavia accadere che scegliendo convenientemente i p punti arbitrarii, o anche solo uno di questi quando $p=2$, la linea $L_{n\nu}$ si risolva in due o più linee, le quali colle loro intersecazioni formino punti multipli non compresi nelle equazioni (1). Così, scegliendo un esempio molto semplice, quattro punti dati in un piano, fra i quali non ve ne siano tre disposti in una stessa linea retta, determinano una serie di coniche, ciascuna delle quali è determinata da un punto. Se per determinare una conica della serie si sceglie un punto che sia in linea retta con due dei punti dati, a luogo di una conica si ottiene un sistema di due rette, e questo sistema ha un punto doppio, quello, cioè, in cui s' intersecano le due rette. Riterremo dunque che quando per la scelta dei punti arbitrarii una determinata curva $L_{n\nu}$ acquista punti multipli, ciò accade perchè in quel caso particolare essa si è risoluta in un sistema di linee e i punti multipli che ha acquistati sono formati da scambievoli intersecazioni delle linee del sistema.

Un sistema di numeri intieri e positivi che posto a luogo delle $i_1, i_2, \ldots$ nelle equazioni (1) le soddisfaccia, costituisce una soluzione di quelle equazioni. Ogni soluzione determina una particolar serie di linee $L_{n\nu}$, e ogni linea della serie ha punti multipli secondo que' certi numeri $i_1, i_2, \ldots$ che formano la soluzione: ciò esprimeremo dicendo che la linea $L_{n\nu}$ è una soluzione delle equazioni (1).

I numeri $i_1, i_2, \ldots$ debbono essere numeri intieri e positivi; perciò il numero delle soluzioni delle equazioni (1) è sempre determinato e finito. Non sempre però le linee $L_{n\nu}$ della serie determinata da una soluzione sono semplici curve: anzi, generalmente parlando, fra le soluzioni delle (1) per dati valori di n, ν, p è sempre qualche soluzione che determina una serie di linee $L_{n\nu}$ che sono ciascuna un sistema di due o più curve. Una linea che non sia un sistema di due o più curve, diremo indifferentemente che è una *linea semplice* o che è una *curva* (comprendendo per brevità fra le curve anche la linea retta), e se sia inoltre del genere zero, diremo che è una curva *razionale*: diremo che è una *linea complessa* se sia un sistema di due o più curve; e per indicare che una linea $L_{n\nu}$ è un sistema delle linee $C_a, C_b, \ldots$ degli ordini $a, b, \ldots$ qualunque poi sia per essere il genere di queste linee, scriveremo

$$L_{n\nu} \equiv C_a \,.\, C_b \ldots,\ a+b+\ldots=n.$$

Ci serviremo di questa notazione anche nei casi in cui le linee $C_a, C_b, \ldots$ non fossero, o tutte o alcune soltanto, linee semplici.

1. Le equazioni (1) non differiscono dalle seguenti

$$\Sigma i^2 + \Sigma i = n(n+3) - 2p \ ; \ \Sigma i^2 - \Sigma i = (n-1)(n-2) - 2v \ ;$$

dalle quali si ricava

$$\Sigma i^2 = n^2 - v - p + 1 \ ; \ \Sigma i = 3n + v - p - 1. \tag{2}$$

La risoluzione delle equazioni (1) si riduce così alla risoluzione di due equazioni della forma

$$\Sigma i^2 = u \ ; \ \Sigma i = v \ ; \tag{3}$$

nelle quali u e v sono numeri dati.

Sia s il numero incognito delle i che hanno un valore non minore di 3, abbiasi cioè

$$i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_s \geq 3 \ ;$$

sia x_2 il numero delle i che hanno il valore 2 e x_1 quello delle i che hanno il valore 1. Le soluzioni delle equazioni (3) saranno somministrate tutte dalle seguenti formule :

(S)(*)

$$\frac{u}{v} \leq i_1 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + u - v - 6(s-1)} \ ;$$

$$1 \leq s \leq 1 + \frac{1}{3}\left(v - \frac{u}{v}\right) \quad \text{e anche} \quad 1 \leq s \leq 1 + \frac{u(v^2-u)}{9v^2}$$

$$i_{s-m+1} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m}{4} + u - v - \Sigma_{s-m}\, i(i-1)} \ ,$$

(*) La dimostrazione di queste formule è stata data nella Memoria — *Di un problema di analisi indeterminata* ecc. — pubblicata nel T. IX della Serie 3ª delle Memorie di quest' Accademia. In quella Memoria non fu notata relativamente alla s la prima delle due formule che ne limitano i valori, ma soltanto la seconda che deriva dalla prima delle equazioni (3): la prima, qui aggiunta, procede dalla seconda delle dette equazioni (3) e somministra un limite più ristretto ai valori della s in tutti i casi in cui u supera $3v$, ossia $n(n-9)$ supera $2(2^v - p - 2)$.

$$m = s-1, s-2, \ldots, 3, 2, 1 \;;$$

$$i_s \geq 1 + \sqrt{1 + u - 2v - \Sigma_{s-1}\, i\,(i-2)} \;,$$

$$\text{se} \quad 1 + u - 2v - \Sigma_{s-1}\, i\,(i-2) \geq 0 \;;$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\,\{u - v - \Sigma_s\, i\,(i-1)\},$$

$$x_1 = \Sigma_s\, i\,(i-2) - (u - 2v) \;:$$

coll' avvertenza che quando fosse

$$v \leq u \leq 2v \;,$$

alle soluzioni che potrebbero essere date dalle precedenti formule si dovrebbe aggiungere la soluzione

$$x_2 = \frac{1}{2}\,(u - v), \qquad x_1 = 2v - u \;.$$

Quando dunque i valori numerici delle u e v sono conosciuti, ammetteremo sieno anche conosciute tutte le soluzioni delle equazioni (3) ovvero delle (2).

Nel caso particolare $p = 2$, $v = 0$ la più semplice fra le soluzioni delle equazioni (1) è la notissima soluzione

$$i_1 = n - 1, \; i_2 = i_3 = \ldots = i_{2n-1} = 1.$$

2. Un sistema di due curve, l' una dell' ordine a e del genere α, l' altra dell' ordine b e del genere β, ha punti multipli (doppi, tripli, ecc.) che equivalgono in tutto a

$$\frac{(a + b - 1)(a + b - 2)}{2} - (\alpha + \beta) + 1$$

punti doppi.

Se i punti multipli di ciascuna delle due curve non cadono sull' altra curva e le ab intersecazioni delle curve medesime sono perciò tutte intersecazioni semplici, i punti multipli del sistema sono manifestamente costituiti dai punti multipli

dell' una e dell' altra curva separatamente e dalle ab intersecazioni delle due curve, ed equivalgono a

$$\frac{(a-1)(a-2)}{2}-\alpha+\frac{(b-1)(b-2)}{2}-\beta+ab=\frac{(a+b-1)(a+b-2)}{2}-(\alpha+\beta)+1$$

punti doppi.

Se una delle due curve avesse un punto multiplo secondo i comune con un punto multiplo secondo j dell' altra, non varierebbe per ciò il numero dei punti doppi equivalenti ai punti multipli del sistema: perchè il sistema perderebbe un punto multiplo secondo i della prima curva, un punto multiplo secondo j della seconda curva e ij intersecazioni semplici delle due curve, cioè perderebbe punti multipli equivalenti a

$$\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}+ij=\frac{(i+j)(i+j-1)}{2}$$

punti doppi, ed acquisterebbe un punto multiplo secondo $(i+j)$ equivalente appunto ad altrettanti punti doppi.

Similmente si dimostrerebbe che il numero dei punti doppi equivalenti ai punti multipli del sistema non varia se una delle due curve ha due o più de' suoi punti multipli coincidenti con punti o semplici o multipli dell' altra.

Un sistema di k curve degli ordini a, b, c, ... e dei generi α, β, γ, ... rispettivamente ha punti multipli (doppi, tripli, ecc.) equivalenti a

$$\frac{(a+b+c+\ldots-1)(a+b+c+\ldots-2)}{2}-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)+k-1$$

punti doppi.

Se i punti multipli di ciascuna curva non cadono sopra nessuna delle altre, i punti multipli del sistema sono evidentemente costituiti dai punti multipli di ogni curva separatamente e dalle scambievoli intersecazioni delle curve medesime, ed equivalgono a

$$\frac{(a-1)(a-2)}{2}-\alpha+\frac{(b-1)(b-2)}{2}-\beta+\ldots+ab+ac+\ldots+bc+\ldots$$

$$=\frac{(a+b+\ldots-1)(a+b+\ldots-2)}{2}-(\alpha+\beta+\ldots)+k-1$$

punti doppi: e, come si è fatto precedentemente considerando il caso di due sole curve, si potrebbe dimostrare che il numero dei punti doppi equivalenti ai punti multipli del sistema non varia se vi siano punti multipli di una curva coincidenti con punti o semplici o multipli di una o più delle altre curve.

Se adunque un sistema di k curve degli ordini a, b, c,... e dei generi α, β, γ,... si riguarda come una linea complessa dell' ordine $m = a + b + c + \ldots$ e del genere μ, sarà

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \ldots - k + 1.$$

Si avverta però che il genere della linea complessa potrebbe riuscire espresso da un numero negativo. Se per es. una linea complessa fosse un sistema di k curve razionali, si avrebbe $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 0$ e

$$\mu = - k + 1$$

numero negativo quando è $k > 1$.

Il teorema sarebbe vero anche quando le supposte k curve fossero tutte dello stesso ordine a e dello stesso genere α e dotate degli stessi punti multipli: il genere del loro sistema sarebbe allora $k(\alpha - 1) + 1$ qualunque poi fosse la disposizione delle k curve nel piano. Se supponiamo che le stesse k curve sieno tutte eguali fra loro e inoltre si sovrappongano e coincidano intieramente l' una coll' altra, anche in questo caso dovremo, per legge di continuità, riguardare il loro sistema come un sistema del genere $k(\alpha - 1) + 1$.

3. Siano più curve C_a, C_b, ... degli ordini a, b, ... costituenti una linea complessa $C_a . C_b \ldots$ dell' ordine $a + b + \ldots = n$. Le curve C_a, C_b, ... s' intersechino fra loro e le intersecazioni formeranno punti multipli della linea complessa $C_a . C_b \ldots$ equivalenti a $ab + ac + \ldots + bc + \ldots$ punti doppi. Supponiamo che considerando t punti di questa linea complessa multipli secondo i numeri $i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_t$, nei quali sieno compresi tutti i punti multipli di ciascuna delle curve C_a, C_b, ... e non computando i rimanenti punti multipli della linea complessa (se pure vi saranno punti multipli rimanenti, ossia intersecazioni delle curve C_a, C_b, ...) essa linea complessa $C_a . C_b \ldots$ che è dell' ordine n appaia del genere v e riescano soddisfatte le equazioni (2), cosicchè essa linea complessa, che frattanto indicherò con L_{nv}, si presenti come una soluzione delle equazioni (2) medesime. Dico che le suddette intersecazioni delle curve C_a, C_b, ... saranno necessariamente comprese tutte nei t punti multipli considerati, per cui la linea complessa sarà realmente del genere v.

Concorrano le curve C_a, C_b, ... coi loro punti multipli secondo i_1', i_2', ...; i_1'', i_2''...; ecc. a formare i punti multipli secondo i_1, i_2, ... della soluzione L_{nv} e sia perciò

$$i_r' + i_r'' + \ldots = i_r \,, \; r = 1, 2, \ldots, t.$$

Siccome la linea $L_{n\nu}$ è determinata da p punti, così il sistema delle curve C_a, C_b, ecc. deve riuscire determinato quando ai punti multipli secondo i_1', i_2',...; i_1'', i_2'',...; ecc. di ciascuna curva si aggiungano p punti: deve cioè essere

$$\Sigma\frac{i'(i'+1)}{2}+\Sigma\frac{i''(i''+1)}{2}+\ldots=\frac{a(a+3)}{2}+\frac{b(b+3)}{2}+\ldots-p\ ;$$

ossia

$$\Sigma(i'^2+i''^2+\ldots)+\Sigma(i'+i''+\ldots)=a^2+b^2+\ldots+3(a+b+\ldots)-2p.$$

Per le equazioni (2) si ha

$$\Sigma i^2=\Sigma(i'^2+i''^2+\ldots)+2\,\Sigma(i'i''+i'i'''+\ldots+i''i'''+\ldots)=n^2-v-p+1,$$

$$\Sigma i=\Sigma(i'+i''+\ldots)=3n+v-p-1\ :$$

combinando queste due equazioni colla precedente e avvertendo che $a+b+\ldots=n$, si deduce

$$(4)\qquad \Sigma(i'i''+i'i'''+\ldots+i''i'''+\ldots)=ab+ac+\ldots+bc+\ldots$$

ed anche

$$(\alpha)\qquad \Sigma i'i''=ab\,,\quad \Sigma i'i'''=ac\,,\ldots,\Sigma i''i'''=bc\,,\ldots$$

perchè ciascuna delle somme di prodotti che sono nel primo membro dell' equazione (4) non può superare il valore del termine corrispondente che è nel secondo membro.

Il supposto sistema delle curve C_a, C_b,... non ha dunque punti multipli (doppi, tripli, ecc.) oltre quelli compresi nelle formule (2) che definiscono la linea $L_{n\nu}$ e da ciò viene che ogni soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (2), anche quando è linea complessa, è linea del genere v. Se si rappresentano con α, β,... i generi delle predette curve C_a, C_b,... e sia k il loro numero, si è veduto (n. prec.) che esse costituiscono una linea complessa del genere $\alpha+\beta+\ldots-k+1$: ne segue che sarà anche

$$\alpha+\beta+\ldots-k+1=v.$$

4. Se fra le curve che formano la linea complessa $L_{n\nu}$ del (n. prec.) sieno h curve C_a identiche l'una coll'altra, la precedente equazione (4) prende la forma

$$\frac{h(h-1)}{2}\Sigma i'^2 + h\Sigma i'(i'' + i''' + \ldots) + \Sigma(i'' i''' + \ldots)$$

$$= \frac{h(h-1)}{2} a^2 + h a (b + c + \ldots) + bc + \ldots$$

e da questa non derivano necessariamente le equazioni (α). D'ora in poi, quando non sia detto espressamente il contrario, s'intenderà escluso questo caso; si supporrà cioè che la linea $L_{n\nu}$, quando è linea complessa, sia un sistema di linee diverse l'una dall'altra.

5. Nell'ipotesi del (n. 3) qualunque sia il numero delle curve il sistema delle quali forma la soluzione $L_{n\nu}$, si potrà riguardare questa $L_{n\nu}$ come un sistema di due linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ (che potranno essere nei diversi casi o due linee semplici o due linee complesse o una semplice e l'altra complessa) degli ordini m e s e dei generi μ e σ rispettivamente e tali che sia $m + s = n$, $\mu + \sigma = \nu + 1$ e rappresentare la linea $L_{n\nu}$ nel modo seguente:

$$L_{n\nu} \equiv C_{m\mu} \,.\, C_{s\sigma}\,;\; m + s = n,\; \mu + \sigma = \nu + 1\,.$$

Sia la linea $L_{n\nu}$ un sistema di k curve e riguardiamo k' di queste curve come formanti una linea complessa $C_{m\mu}$ e le rimanenti $k'' = k - k'$ come formanti un altra linea complessa $C_{s\sigma}$. La linea $C_{m\mu}$ dell'ordine m e del genere μ riesca così formata delle k' curve $C_{a\alpha}$, $C_{b\beta}$,... degli ordini a, b,... e dei generi α, β,..., e la linea $C_{s\sigma}$ dell'ordine s e del genere σ riesca formata delle curve $C_{c\gamma}$, $C_{d\delta}$,... degli ordini c, d,..., e dei generi γ, δ,... si avrà (n. 2)

$$a + b + \ldots = m,\; c + d + \ldots = s\;;$$

$$\alpha + \beta + \ldots - k' + 1 = \mu,\; \gamma + \delta + \ldots - k'' + 1 = \sigma\;;$$

e sarà inoltre (n. 3)

$$a + b + \ldots + c + d + \ldots = n$$

$$\alpha + \beta + \ldots + \gamma + \delta + \ldots - (k' + k'') + 1 = \nu,$$

e quindi anche

$$m + s = n,\; \mu + \sigma = \nu + 1.$$

Si noti che riguardando la $L_{n\nu}$ nel modo ora indicato, cioè come un sistema di due sole linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$, può accadere che uno dei due numeri μ o σ riesca negativo, giusta ciò che fu avvertito sotto il (n. 2).

Fasci

6. Nelle equazioni (2) pongasi $p = 1$. Esse diventano

$$(5) \qquad \Sigma\, i^2 = n^2 - v\,; \quad \Sigma\, i = 3n - 2 + v.$$

Allorquando n e v sono numeri intieri dati, ed è

$$n \geq 1, \quad 0 \leq v \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

ogni soluzione di queste equazioni determina un *fascio* di linee dell' ordine n e del genere v. Tutte le linee $L_{n\nu}$ del fascio hanno comuni punti multipli secondo i numeri $i_1, i_2, \ldots, i_t$ e ognuna di esse è determinata da un punto. I predetti punti multipli comuni a tutte le linee del fascio diconsi *punti base* del fascio e denomineremo *base* del fascio il loro sistema. Allorquando le linee del fascio sono linee semplici, due qualsivoglia di esse s' intersecano fuori della base del fascio in v punti: poichè il numero totale delle loro intersecazioni è espresso da n^2 e i punti che esse hanno comuni nei punti base del fascio, per la prima delle equazioni (5) equivalgono a $n^2 - v$ intersecazioni. I v punti fuori della base del fascio nei quali s' intersecano due linee, sono comuni anche a tutte le altre del fascio: perchè se indichiamo con $l = 0$ e $l' = 0$ le equazioni di due linee del fascio riferito a qualsivoglia sistema di assi coordinati e con ω un parametro arbitrario, ogni altra linea del fascio sarà rappresentata dall' equazione $l - \omega\, l' = 0$ e passerà per tutti i punti nei quali s' intersecano le due $l = 0$ e $l' = 0$ e che sono determinati dal sistema di queste due ultime equazioni; passerà perciò anche per quelle v intersecazioni delle dette due linee, le quali cadono fuori della base del fascio. Da ciò deriva che per un punto dato nel piano della base del fascio, non può passare che *una sola* linea del fascio, semprechè il punto dato non sia uno dei suddetti v punti pei quali passano tutte le linee del fascio.

7. Sia $L_{n\nu}$ una soluzione delle equazioni (5) e sia una linea complessa. Si riguardi la $L_{n\nu}$ come un sistema di due linee (semplici o complesse) $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ (n. 5) ponendo

$$L_{n\nu} \equiv C_{m\mu} \,.\, C_{s\sigma}\,;\; m + s = n,\; \mu + \sigma = v + 1,$$

Ogni linea $L_{n\nu}$ è determinata da un punto, e perciò delle predette due linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ dovrà una essere *fissa*, cioè comune a tutte le linee $L_{n\nu}$ del fascio, l' altra *variabile*, cioè diversa nelle diverse linee $L_{n\nu}$. La linea $C_{m\mu}$ sia fissa ed abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i_1', i_2',...; la $C_{s\sigma}$ sia variabile e nei punti base del fascio abbia punti multipli secondo i numeri i_1'', i_2'',...: dovranno i numeri i' e i'' soddisfare le seguenti equazioni:

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \qquad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \mu;$$

$$\Sigma \frac{i''(i''+1)}{2} = \frac{s(s+3)}{2} - 1, \quad \Sigma \frac{i''(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - \sigma:$$

dalle quali si deduce,

$$(6) \qquad \begin{cases} \Sigma i'^2 = m^2 + 1 - \mu, & \Sigma i' = 3m - 1 + \mu \\ \Sigma i''^2 = s^2 - \sigma, & \Sigma i'' = 3s - 2 + \sigma \end{cases}$$

e dovrà inoltre essere (n. 6)

$$\Sigma i^2 = n^2 - \nu, \quad \text{ossia} \quad \Sigma (i' + i'')^2 = (m+s)^2 - \mu - \sigma + 1,$$

ed eliminando da questa per mezzo delle equazioni (6) le quantità $\Sigma i'^2$ e $\Sigma i''^2$

$$(7) \qquad \Sigma i' i'' = ms.$$

Le equazionì (6) e (7) esprimono le condizioni necessarie affinchè due linee (semplici o complesse) possano col loro sistema formare una soluzione delle equazioni (5).

Inversamente due linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ degli ordini m e s e dei generi μ e σ, dotate di punti multipli secondo i numeri i_1', i_2',... e secondo i numeri i_1'', i_2'',... rispettivamente i quali soddisfanno le equazioni (6) e (7) e coi punti multipli secondo i_1', i_2'... della prima coincidenti ordinatamente coi punti multipli secondo i_1'', i_2'',... della seconda, formano col loro sistema un fascio di linee complesse $L_{n\nu}$ dell' ordine $n = m + s$ e del genere $\nu = \mu + \sigma - 1$ con punti multipli secondo i numeri $i_1 = i_1' + i_1''$, $i_2 = i_2' + i_2''$,... e la linea $L_{n\nu}$ è una soluzione delle equazioni (5). Perchè dalle equazioni (6) e (7) ricavasi immediatamente

$$\Sigma i'^2 + \Sigma i''^2 + 2\,\Sigma i' i'' = m^2 + s^2 + 2ms - (\mu + \sigma - 1),$$

$$\Sigma i' + \Sigma i'' = 3m + 3s - 2 + (\mu + \sigma - 1),$$

cioè

$$\Sigma\, i^2 = n^2 - v, \quad \Sigma\, i = 3n - 2 + v.$$

8. Le linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ del (n. prec.) siano due linee semplici, ossia due curve: la curva variabile $C_{s\sigma}$ dovrà passare per tutti i punti base del fascio.

Se fra i punti base del fascio fosse un punto p semplice pel quale passasse la curva $C_{m\mu}$ e non passasse la $C_{s\sigma}$, si potrebbe scegliere quel punto per determinare quest' ultima curva, la quale verrebbe così ad intersecare nel punto p la $C_{m\mu}$. Per la formula (7) le due curve $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ hanno negli altri punti base del fascio un numero ms d' intersecazioni: non potranno dunque intersecarsi di nuovo in p senza che la curva $C_{s\sigma}$ o s' identifichi colla $C_{m\mu}$ o si risolva in due linee una delle quali sia identica colla $C_{m\mu}$ e l' altra sia una linea $C_{p\pi}$ dell' ordine $p = s - m$ e del genere $\pi = \sigma - \mu + 1$ (n. 2). Nella prima di queste ipotesi si avrebbe

$$s = m, \quad \sigma = \mu, \quad \mu + \sigma = 2\,\sigma = v + 1.$$

Inoltre nei punti comuni alle linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$ nella base del fascio sarebbe $i' = i''$ e quindi per la (7) $\Sigma\, i'^2 = s^2$, mentre per la terza delle (6) è $\Sigma\, i''^2 = s^2 - \sigma$; dovrebbe quindi essere $\sigma = 0$, condizione che non può aver luogo ad un tempo colla precedente $2\sigma = v + 1$. Nella seconda delle due ipotesi, rappresentiamo con $\mathcal{C}_{m\mu}$ una linea che abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri i_1', i_2',... come la $C_{m\mu}$, ad eccezione soltanto del punto p che rimanga escluso. La curva $\mathcal{C}_{m\mu}$ resta così definita dalle equazioni

$$\Sigma\, i'^2 - 1 = m^2 - \mu, \quad \Sigma\, i' - 1 = 3m - 2 + \mu,$$

ed è determinata da un punto. Ciò val quanto dire che la serie delle linee $\mathcal{C}_{m\mu}$ costituisce un fascio di linee e che la $C_{m\mu}$ è quella linea del fascio che è determinata dal punto p. Se ora cerchiamo quale sia la linea $L_{n\nu}$ che è determinata da un punto p_1 non situato sulla curva $C_{m\mu}$ e avvertiamo: 1° che delle linee definite dalle equazioni (5), ossia delle linee $L_{n\nu}$, una sola passa pel punto p_1: 2° che il punto p_1 determina una linea del fascio di linee $\mathcal{C}_{m\mu}$; concluderemo che quella particolar linea $L_{n\nu}$ che è determinata dal punto p_1 è formata di tre linee semplici che sono: la linea $C_{m\mu}$, una determinata linea del fascio di linee $\mathcal{C}_{m\mu}$ (determinata dal punto p_1) e la linea $C_{p\pi}$. La linea $C_{p\pi}$ è dunque comune a tutte le linee L_n e per conseguenza la linea $C_{s\sigma}$ è un sistema della linea variabile $\mathcal{C}_{m\mu}$ e della linea fissa $C_{p\pi}$ contro l' ipotesi.

Se poi si volesse che il supposto punto p fosse non un punto semplice ma un punto multiplo secondo un numero $i' > 1$, si proverebbe, come precedentemente,

che allorquando si scegliesse un punto qualunque della $C_{m\mu}$ per determinare la $C_{s\sigma}$, questa curva dovrebbe o identificarsi colla $C_{m\mu}$ o risolversi in due linee, una delle quali, che diremo $\mathcal{C}_{m\mu}$, fosse identica colla $C_{m\mu}$. In amendue le ipotesi la $C_{s\sigma}$, per la scelta del punto che la determina, acquisterebbe in p un nuovo punto multiplo secondo i' e perciò essa dovrebbe risolversi in un sistema di linee, e un numero i' di queste linee intersecarsi in p e così formare il punto multiplo i', come fu avvertito da principio. Il punto p apparterebbe alla curva $\mathcal{C}_{m\mu}$ identica colla $C_{m\mu}$, quindi anche in quest' ultima linea il punto p sarebbe formato dalla intersecazione di i' linee, contro l' ipotesi che stabiliva essere la $C_{m\mu}$ una linea semplice. Non può adunque la $C_{m\mu}$ passare per un punto (semplice o multiplo) base del fascio pel quale non passi anche la $C_{s\sigma}$ e quindi la $C_{s\sigma}$ passa per tutti i punti base del fascio.

Dalle ultime considerazioni fatte, relative al caso del punto p multiplo si comprende come dimostrare che la curva variabile $C_{s\sigma}$ non solo passerà per tutti i punti base del fascio pei quali passa la curva $C_{m\mu}$, ma per ciascuno di questi punti passerà almeno tante volte quante vi passa la $C_{m\mu}$; ossia in tutti i punti base del fascio dovrà essere $i'' \geq i'$.

9. Suppongasi ora che le linee del fascio determinato da una soluzione delle equazioni (5) sieno ciascuna un sistema di più curve $C_{l\lambda},\ldots, C_{s\sigma}$ degli ordini $l,\ldots, s$ e dei generi $\lambda,\ldots, \sigma$. Siccome ogni linea $L_{n\nu}$ del fascio è determinata da un punto, così delle curve $C_{l\lambda},\ldots, C_{s\sigma}$ una sola sarà variabile e le altre saranno fisse, cioè comuni a tutte le linee del fascio. Sia $C_{s\sigma}$ la curva variabile e questa abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri i_1'', i_2'',... Consideriamo una qualsivoglia delle curve fisse $C_{l\lambda}$ che supporremo abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo j_1, j_2,... Questi punti determinano intieramente la $C_{l\lambda}$ e però

$$\Sigma\frac{j(j+1)}{2}=\frac{l(l+3)}{2}, \quad \Sigma\frac{j(j-1)}{2}=\frac{(l-1)(l-2)}{2}-\lambda\,;$$

onde

$$\Sigma j^2 = l^2+1-\lambda, \quad \Sigma j = 3l-1+\lambda. \tag{8}$$

La curva variabile $C_{s\sigma}$ ha, nella base del fascio, punti multipli che soddisfanno le equazioni

$$\Sigma\,\frac{i''(i''+1)}{2}=\frac{s(s+3)}{2}-1, \quad \Sigma\,\frac{i''(i''-1)}{2}=\frac{(s-1)(s-2)}{2}-\sigma$$

equivalenti alle

(9) $$\Sigma i''^2 = s^2 - \sigma, \quad \Sigma i'' = 3s - 2 + \sigma ;$$

ed è anche (n. 3)

(10) $$\Sigma j i'' = ls.$$

Confrontando le formule (8), (9), (10) colle formule (6), (7), si scorge che le curve $C_{l\lambda}$ e $C_{s\sigma}$ indipendentemente dalle altre curve del sistema formano un fascio di linee complesse ($\equiv C_{l\lambda} \,.\, C_{s\sigma}$) analogo precisamente a quello su cui ragionammo nel (n. prec.) nel quale ciascuna linea del fascio è il sistema della curva fissa $C_{l\lambda}$ e della curva variabile $C_{s\sigma}$ (n. 7): perciò la curva variabile $C_{s\sigma}$ passa per tutti i punti base del fascio pei quali passa la curva fissa $C_{l\lambda}$ (n. 8). Lo stesso ragionamento può essere ripetuto relativamente a ognuna delle curve fisse del sistema $L_{n\nu}$; ond' è che se una linea $L_{n\nu}$ è una soluzione delle equazioni (5) ed è un sistema di una o più curve fisse e di una curva variabile, la curva variabile passa per tutti i punti base del fascio.

Una conseguenza immediata di questo teorema è che trattandosi di soluzioni delle equazioni (5) nelle quali ogni linea $L_{n\nu}$ del fascio è un sistema di una linea fissa (semplice o complessa) $C_{m\mu}$ e di una curva variabile $C_{s\sigma}$, se si vogliono porre a calcolo i punti multipli del sistema $L_{n\nu}$, non si deve tener conto dei punti multipli della linea $C_{m\mu}$ quando si tenga conto delle intersecazioni della curva $C_{s\sigma}$ colla stessa linea $C_{m\mu}$ e si riguardino queste intersecazioni come punti multipli del sistema.

10. Come nel (n. prec.) suppongasi ciascuna linea $L_{n\nu}$ del fascio sia il sistema delle curve fisse $C_{l\lambda}, \ldots$ e della curva variabile $C_{s\sigma}$. La curva $C_{l\lambda}$ è pienamente determinata dai punti che, nella base del fascio, ha comuni colla $C_{s\sigma}$ (n. prec.), la $C_{s\sigma}$ è variabile ma determinata da un punto, e i numeri $j_1, j_2, \ldots; \; i_1'', i_2'', \ldots$ debbono soddisfare le precedenti equazioni (8), (9) e (10).

Si faccia passare la curva $C_{s\sigma}$ per un punto o preso ad arbitrio sulla curva $C_{l\lambda}$: le due curve $C_{l\lambda}$, $C_{s\sigma}$ avranno così in o un punto comune, e siccome per l' equazione (10) hanno ls punti comuni nei punti base del fascio, esse verrebbero ad intersecarsi in $ls + 1$ punti. Bisogna dunque che la curva $C_{s\sigma}$ o si identifichi colla $C_{l\lambda}$ o si risolva in due linee una delle quali $\mathcal{C}_{l\lambda}$ sia identica colla $C_{l\lambda}$. Se si ammette la prima di queste ipotesi, si viene con ciò ad ammettere che le curve $C_{l\lambda}$ e $C_{s\sigma}$ appartengono a un medesimo fascio di curve, che $s = l$, $\sigma = \lambda$, che le due curve passano pei medesimi punti base del fascio e che in tutti questi punti è $i'' = j$. Allora le equazioni (8), (9) e (10) danno

$$\Sigma j^2 = l^2 + 1 - \lambda = l^2 - \lambda = l^2$$

risultamento assurdo. Non potendo la $C_{s\sigma}$ identificarsi colla $C_{l\lambda}$, dovrà essere $l < s$ affinchè la curva $C_{s\sigma}$ si possa risolvere in due linee, una $\mathcal{C}_{l\lambda}$ identica colla $C_{l\lambda}$ e l' altra $C_{p\pi}$ dell' ordine $p = s - l$ e del genere π che determineremo nel modo seguente.

Abbia la $C_{p\pi}$, nei punti base del fascio, punti multipli secondo $j_1', j_2', \ldots$ Essa è pienamente determinata da questi punti, ed è poi anche evidentemente $j_r + j_r' = i_r''$ qualunque sia l' indice r; perciò

$$\Sigma \frac{j'(j'+1)}{2} = \frac{p(p+3)}{2}, \quad \Sigma j' = \Sigma i'' - \Sigma j:$$

onde

$$\Sigma j'^2 + \Sigma j' = p^2 + 3p, \quad \Sigma j' = 3p - 1 + \sigma - \lambda,$$

ed anche

$$\Sigma j'^2 = p^2 + 1 - (\sigma - \lambda), \quad \Sigma j' = 3p - 1 + (\sigma - \lambda)$$

$$\Sigma \frac{j'(j'-1)}{2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - (\sigma - \lambda);$$

è dunque

$$\pi = \sigma - \lambda.$$

Ciò posto, dalla preindicata condizione $j_r + j_r' = i_r''$ si deduce anche

$$\Sigma j'^2 = \Sigma (i'' - j)^2 = \Sigma i''^2 + \Sigma j^2 - 2\, \Sigma j i'',$$

e per le precedenti (8), (9) e (10)

$$\Sigma j'^2 = p^2 + 1 - (\sigma + \lambda).$$

Confrontando quest' ultimo col precedente valore di $\Sigma j'^2$ si deduce che è necessariamente

$$\lambda = 0.$$

Questo risultamento congiunto alla condizione $l < s$ dimostra che se in una soluzione delle equazioni (5) ogni linea del fascio è un sistema di due o più curve, una variabile e le altre fisse, tutte le curve fisse sono curve razionali e sono ciascuna d' ordine inferiore all' ordine della curva variabile.

11. Se la soluzione $L_{n\nu}$ è una linea complessa e si rappresenta con $C_{m\mu}$ il sistema delle curve fisse razionali (n. 10) e con $C_{s\sigma}$ la curva variabile, sarà (n. 2), indicando con k il numero delle curve fisse,

$$\mu = -k + 1, \quad \sigma = \nu + k.$$

Il minimo valore di σ si ha quando $\nu = 0$, $k = 1$ e quindi $\mu = 0$, $\sigma = 1$; e allora il genere della curva $C_{p\pi}$ indicata nel (n. prec.) diventa $\pi = \sigma = 1$ e dovrà essere

$$m + p = s, \quad n = 2m + p.$$

Una curva del genere 1 è almeno dell' ordine 3: quindi sarà $p \geq 3$ e

$$m \leq \frac{n-3}{2}:$$

cioè l' ordine di una curva razionale comune a tutte le linee di un fascio di linee dell' ordine n non può in nessun caso superare il numero $(n-3):2$. Da ciò viene che non si danno fasci di linee complesse e d' ordine inferiore a 5.

12. Ritenuto che le linee $L_{n\nu}$ del fascio sieno sistemi di k curve razionali fisse e di una curva variabile, rappresentiamo con $C_{m\mu}$ il sistema delle k curve fisse e con $C_{s\sigma}$ la curva variabile. Consideriamo due linee del fascio che rappresenteremo distintamente con $L_{n\nu}$ e con $\mathfrak{L}_{n\nu}$, cui corrispondano le curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$, cosicchè la linea $L_{n\nu}$ sia il sistema delle due linee $C_{m\mu}$ e $C_{s\sigma}$, la linea $\mathfrak{L}_{n\nu}$ sia il sistema delle due $C_{m\mu}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$.

Nel sistema $L_{n\nu} \,.\, \mathfrak{L}_{n\nu}$ delle due linee $L_{n\nu}$ e $\mathfrak{L}_{n\nu}$ le curve del sistema $C_{m\mu}$ figurano ciascuna due volte formando una linea *doppia*, e per questo riguardo può dirsi che ognuna di esse serve ad accrescere di un numero infinito di punti la base del fascio. Se nel sistema $L_{n\nu} \,.\, \mathfrak{L}_{n\nu}$ si tenga conto delle curve doppie una sola volta, i suoi punti multipli saranno formati dalle intersecazioni delle curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ fra loro e colle curve del sistema $C_{m\mu}$ (n. 9). Sappiamo già che cadono nei punti base del fascio le intersecazioni di ciascuna delle curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ con ciascuna delle curve del sistema $C_{m\mu}$ (n. 3) e inoltre che le due curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ hanno comuni, nei punti base del fascio, punti multipli secondo certi numeri i_1'', i_2'',... che (n. 9) soddisfano l' equazione $\Sigma\, i''^2 = s^2 - \sigma$: cadranno dunque fuori della base del fascio soltanto quelle intersecazioni delle due curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ che

non sono formate dalla coincidenza dei punti multipli secondo i detti numeri i_1'', i_2'',..., cioè

$$s^2 - \Sigma\, i''^2 = \sigma = v + k$$

intersecazioni. Se dunque le linee L_{nv} del fascio sono ciascuna un sistema di k curve fisse (razionali) e di una curva variabile (del genere $\sigma = v + k$), due linee qualunque del fascio si segano fuori della base del fascio in $v + k$ punti. Questi $v + k$ punti sono fissi, cioè comuni a tutte le linee del fascio : poichè queste linee sono rappresentate dall' equazione

$$ll' \dots (\lambda - \omega\lambda') = 0,$$

nella quale si suppone che $l = 0$, $l' = 0$,... sieno le equazioni delle k curve fisse formanti il sistema $C_{m\mu}$, che $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, sieno le equazioni delle preindicate curve $C_{s\sigma}$ e $\mathcal{C}_{s\sigma}$, e che ω sia un parametro arbitrario: ognuna di esse passa dunque per *tutti* i punti comuni alle due curve $C_{s\sigma}$ e $\mathcal{C}_{s\sigma}$.

13. Nell' ipotesi che le linee del fascio sieno linee complesse, pongasi

$$L_{nv} \equiv C_m \,.\, C_{s\sigma}\,, \quad m + s = n, \quad \sigma = v + 1\;;$$

rappresentando con C_m una curva fissa razionale (n. 10) dell' ordine m e con $C_{s\sigma}$ una linea dell' ordine $s = n - m$ e del genere $\sigma = v + 1$ (n. 5) variabile, la quale sarà o una curva variabile, o un sistema di una o più curve fisse e di una curva variabile. La curva C_m abbia, nei punti base del fascio punti multipli secondo i numeri i_1', i_2',... e la linea $C_{s\sigma}$ vi abbia punti multipli secondo i_1'', i_2'',... e sia perciò

$$i_r' + i_r'' = i_r\,, \quad r = 1, 2, \dots, t$$

I numeri i' e i'' dovranno soddisfare le seguenti condizioni (n. 6)

$$\Sigma\, i'^2 = m^2 + 1,\;\; \Sigma\, i' = 3m - 1\,;\;\; \Sigma\, i''^2 = s^2 - 1 - v,\;\; \Sigma\, i'' = 3s - 1 + v$$

$$\Sigma\, i'i'' = ms.$$

L' ultima di queste equazioni somministra

$$\Sigma\, i'\,(i - i') = \Sigma\, ii' - \Sigma\, i'^2 = ms;\quad \Sigma\,(i - i'')\, i'' = \Sigma\, ii'' - \Sigma\, i''^2 = ms\,;$$

onde

$$(11) \qquad \Sigma\, ii' = mn + 1, \quad \Sigma\, ii'' = ns - 1 - v.$$

Suppongasi ora che essendo data una soluzione

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t)$$

delle equazioni (5) si trovi una curva razionale C_m dell' ordine m con punti multipli secondo i numeri i_1', i_2',... tali che si abbia

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \quad \Sigma\, ii' = mn + 1, \tag{12}$$

$$i_r' < i_r, \quad r = 1, 2, \ldots, t:$$

allora ciascuna linea $L_{n\nu}$ del fascio è un sistema di due linee, cioè della curva C_m fissa e di una linea $C_{s\sigma}$ (semplice o complessa) variabile dell' ordine s e del genere σ che ha, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i_1'', i_2'',... essendo i numeri s, σ, i_1'', i_2'',... determinati dalle condizioni

$$m + s = n; \quad \sigma = 1 + v; \quad i_r' + i_r'' = i_r, \quad r = 1, 2, \ldots, t. \tag{13}$$

Dalla prima delle equazioni (12) congiunta alla

$$\Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

che esprime essere la C_m una linea del genere zero, si ricava

$$\Sigma\, i'^2 = m^2 + 1, \quad \Sigma\, i' = 3m - 1; \tag{14}$$

la seconda delle stesse (12) non differisce dalla

$$\Sigma\, i'^2 + \Sigma\, i'i'' = m(m+s) + 1,$$

che combinata colla prima delle (14) dà

$$\Sigma\, i'i'' = ms. \tag{15}$$

Per le equazioni (5) deve anche essere

$$\Sigma\, i^2 = \Sigma\,(i' + i'')^2 = \Sigma\, i'^2 + \Sigma\, i''^2 + 2\,\Sigma\, i'i'' = (m+s)^2 - v,$$

$$\Sigma\, i = \Sigma\,(i' + i'') = \Sigma\, i' + \Sigma\, i'' = 3\,(m+s) - 2 + v:$$

eliminando da queste le quantità $\Sigma\, i'^2$, $\Sigma\, i'$ e $\Sigma\, i'i''$ mediante le precedenti equazioni (14) e (15) si ottengono le due

$$(16)\qquad \Sigma\, i''^2 = s^2 - (1+v), \quad \Sigma\, i'' = 3s - 2 + (1+v)$$

che si trasformano facilmente nelle

$$(17)\quad \Sigma\, \frac{i''(i''+1)}{2} = \frac{s(s+3)}{2} - 1, \quad \Sigma\, \frac{i''(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - (1+v)\,;$$

che definiscono la predetta linea $C_{s\sigma}$.

Combinando la (15) colla prima delle (16) si ottiene anche

$$\Sigma\, ii'' = ns - 1 - v,$$

che è la seconda delle equazioni (11); e ciò fa vedere in qual modo le stesse equazioni (11) sono connesse l' una coll' altra, scorgendosi che ammessa la seconda e le due equazioni (17) e posto $i_r' + i_r'' = i_r$, verrebbero di conseguenza le (12) e la prima delle (11). Se dunque essendo data la soluzione $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ delle equazioni (5) si trovasse una linea $C_{s\sigma}$ con punti multipli secondo i numeri i_1'', i_2'',... che soddisfacessero le equazioni (17) e la seconda delle (11) e fosse $s < n$, $i_r'' \leq i_r$, $r = 1, 2, \ldots, t$; ciascuna linea del fascio sarebbe il sistema della linea $C_{s\sigma}$ variabile e di una curva fissa razionale C_m dell' ordine m avente, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri i_1', i_2',... essendo i numeri m, i_1', i_2',... determinati dalle condizioni (13).

14. Suppongasi che una soluzione $L_{n\nu}$ sia un sistema di linee e che fra le linee del sistema sia una retta C_1; e pongasi

$$(a)\qquad L_{n\nu} \equiv C_1 \,.\, C_{s\sigma}, \quad 1 + s = n, \quad \sigma = v + 1:$$

sarà $i_1' = 1$, $i_2' = 1$, $i_3' = i_4' = \ldots = i_t' = 0$, e per la prima delle formule (11)

$$(\alpha)\qquad i_1 + i_2 = n + 1.$$

Suppongasi sia anche

$$(\beta)\qquad (m-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2m+1} = mn + 1:$$

e che per conseguenza si possa porre (n. prec.)

$$(b)\qquad L_{n\nu} \equiv C_m \,.\, C_{s'\sigma'}, \quad m + s' = n, \quad \sigma = v + 1:$$

allora il sistema $L_{n\nu}$ comprenderà e la retta C_1 e la curva razionale C_m dell'ordine m che ha nei punti base del fascio un punto multiplo secondo $m - 1$ e $2m$ punti semplici; e perciò la preindicata linea $C_{s\sigma}$ sarà una linea complessa formata dalla curva C_m e da un'altra linea variabile $C_{p\pi}$ dell'ordine $p = s - m = n - 1 - m$ e del genere $\pi = \sigma + 1 = \nu + 2$ (n. 5). Infatti si avrà per la $C_{s\sigma}$

$$i_1'' = i_1 - 1, \quad i_2'' = i_2 - 1, \quad i_3'' = i_3, \ldots, i_t'' = i_t;$$

e quindi

$$(m-1)\, i_1'' + i_2'' + \ldots + i''_{2m+1} = (m-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2m+1} - m$$

$$= m(n-1) + 1 = ms + 1.$$

La linea $C_{s\sigma}$ è dunque il sistema della curva C_m e della predetta linea $C_{p\pi}$ (n. 13).

In simil modo si potrebbe dimostrare che nella formula (b) la linea $C_{s'\sigma'}$ è un sistema della retta C_1 e della linea variabile $C_{p\pi}$. Nel supposto caso si può dunque (scrivendo s e σ a luogo di p e π) rappresentare la linea complessa $L_{n\nu}$ nel modo seguente

$$(c) \qquad L_{n\nu} \equiv C_1 \,.\, C_m \,.\, C_{s\sigma}, \quad 1 + m + s = n, \quad \sigma = \nu + 2.$$

In una data soluzione

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t)$$

sia

$$(\beta) \qquad (m-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2m+1} = mn + 1, \quad m > 1:$$

e possa perciò la linea complessa $L_{n\nu}$ del fascio essere rappresentata dalla precedente formula (b): si domanda se per un valore $q > m$ potrà essere anche

$$(\gamma) \qquad (q-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2m+1} + i_{2m+2} + \ldots + i_{2q+1} = qn + 1.$$

Suppongasi che le condizioni (β) e (γ) abbiano luogo simultaneamente. La linea $C_{s'\sigma'}$, indicata nella formula (b) avrà, nei punti base del fascio, punti multipli secondo $i_1'', i_2'', \ldots i_t''$ che avranno i seguenti valori

$$i_1'' = i_1 - (m-1), \quad i_2'' = i_2 - 1, \quad i_3'' = i_3 - 1, \ldots i''_{2m+1} = i_{2m+1} - 1,$$

$$i''_{2m+2} = i_{2m+2}, \ldots, i_t'' = i_t:$$

sarà quindi

$$(q-1)\, i_1'' + i_2'' + \ldots + i''_{2q+1} = (q-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2q+1} - (q-1)(m-1) - 2m$$

$$= q\,(n-m) + (q-m) = qs' + (q-m).$$

Essendo per ipotesi $q > m$, l'equazione ora ottenuta dimostra che una curva razionale C_q dell'ordine q e con un punto multiplo secondo $q-1$ potrebbe incontrare la linea $C_{s'\sigma'}$, nei punti base del fascio in più di qs punti; perciò quest'ultima linea è un sistema della curva C_q e di un'altra linea $C_{s\sigma}$ dell'ordine $s = s' - q$. La linea $C_{s'\sigma'}$ è definita (n. 6) dalle equazioni

$$(18) \qquad \Sigma\, i''^2 = s'^2 - (v+1), \quad \Sigma\, i'' = 3s' - 2 + (v+1).$$

Si è dimostrato (n. 13) che quando una linea definita dalle equazioni (5) è un sistema di una curva razionale fissa e di una linea variabile, il genere della linea variabile supera di un' unità quello del sistema delle due linee e che è soddisfatta la prima delle equazioni (11). Essendo le equazioni (18) della stessa forma delle (5), dovrà essere

$$\sigma = \sigma' + 1 = v + 2;\; qs' + (q-m) = qs' + 1 \quad \text{ovv.} \quad q - m = 1.$$

Se dunque fa parte del sistema $L_{n\nu}$ la curva C_m dell' ordine m e con un punto multiplo secondo $m-1$, potrà far parte del sistema stesso un'altra curva C_q dell' ordine $q > m$ e con un punto multiplo secondo $q-1$, purchè sia $q = m+1$; e allora la $L_{n\nu}$ potrà essere rappresentata nel seguente modo:

$$(d) \qquad L_{n\nu} \equiv C_m \,.\, C_{m+1} \,.\, C_{s\sigma}\,; \quad 2m + 1 + s = n, \quad \sigma = v + 2.$$

Da ciò segue anche che quando una linea complessa $L_{n\nu}$, soluzione delle equazioni (5), comprende una curva C_m dell' ordine $m > 1$ con un punto multiplo secondo $m-1$, non può comprendere che un' altra sola curva C_q dell' ordine q la quale abbia un punto multiplo secondo $q-1$, e allora è $q = m \pm 1$. Potrebbe però la $L_{n\nu}$ comprendere la predetta curva C_m e una retta, e anche amendue le dette curve C_m e C_q e una retta: in quest' ultimo caso indicando con m il minore dei due numeri m e q, la soluzione $L_{n\nu}$ potrebbe essere rappresentata come segue:

$$(e) \qquad L_{n\nu} \equiv C_1 \,.\, C_m \,.\, C_{m+1} \,.\, C_{s\sigma}\,, \quad 2\,(m+1) + s = n, \quad \sigma = v + 3:$$

coll' avvertenza che la $C_{s\sigma}$ non potrà comprendere nessuna curva d' ordine qualsivoglia l che abbia un punto multiplo secondo $l-1$.

15. Passando ora a esaminare il caso in cui fra le curve che formano la linea complessa $L_{n\nu}$, soluzione delle equazioni (5), sono più curve eguali fra loro e coincidenti l' una coll' altra, cominciamo dal supporre che la linea $L_{n\nu}$ comprenda h curve $C_{m\mu}$ dell' ordine m e del genere μ con punti multipli secondo i_1, i_2,... nei punti base del fascio. Queste curve dovranno evidentemente essere fisse, cioè comuni a tutte le linee del fascio e pienamente determinate dai predetti punti: coincideranno quindi l' una coll' altra e si avrà

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \quad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \mu;$$

ovvero

$$\Sigma i'^2 = m^2 + 1 - \mu, \quad \Sigma i' = 3m - 1 + \mu.$$

Rappresentiamo con $C_{s\sigma}$ il sistema di tutte le altre curve che insieme colla $C_{m\mu}$ ripetuta h volte formano la linea complessa $L_{n\nu}$. La linea $C_{s\sigma}$ dell' ordine $s = n - hm$ e del genere $\sigma = \nu + h(1 - \mu)$ (n. 2), abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i_1, i_2,... onde

$$\Sigma i''^2 = s - \sigma, \quad \Sigma i'' = 3s - 2 + \sigma;$$

$$\Sigma i^2 = \Sigma (hi' + i'')^2 = h^2 \Sigma i'^2 + \Sigma i''^2 + 2h \Sigma i'i'' = n^2 - \nu.$$

Da queste e dalle precedenti equazioni deducesi

$$\Sigma i'i'' = ms - \frac{h-1}{2}(1-\mu). \tag{19}$$

I numeri $\Sigma i'i''$ e ms sono amendue numeri intieri e il primo non può evidentemente superare il secondo, quindi μ non può superare l' unità, ed è h numero dispari se $\mu = 0$.

Consideriamo la linea complessa $\mathfrak{L}_{l\lambda}$ dell' ordine $l = m + s$ e del genere $\lambda = \mu + \sigma - 1$ (n. 2) formata da una delle curve $C_{m\mu}$ e dalla linea $C_{s\sigma}$ e che, nei punti base del fascio, ha punti multipli secondo i numeri $i_1' + i_1'' = j_1$, $i_2' + i_2'' = j_2$,...: avrassi

$$\Sigma j^2 = \Sigma i'^2 + \Sigma i''^2 + 2 \Sigma i'i'', \ \Sigma j = \Sigma i' + \Sigma i'';$$

e quindi anche

$$\Sigma j^2 = l^2 - \lambda - (h-1)(1-\mu), \ \Sigma j = 3l - 2 + \lambda.$$

Queste due ultime equazioni dimostrano che non può essere $\mu = 1$; poichè in questa ipotesi sarebbe

$$\Sigma j^2 = l^2 - \lambda, \ \Sigma j = 3l - 2 + \lambda;$$

e sarebbe la $\mathfrak{L}_{l\lambda}$ una linea complessa soluzione di due equazioni della forma (5), formata di curve tutte diverse l'una dall'altra e una di queste curve (la curva C_m) fissa e del genere 1. Ciò essendo assurdo (n. 10) non può ritenersi $\mu = 1$. Pongasi dunque $\mu = 0$, e

$$\Sigma\, i'i'' = ms - \frac{h-1}{2}. \tag{20}$$

Quindi: se una soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (5) è un sistema di curve e fra le curve che lo formano sono alcune curve eguali e coincidenti l'una coll'altra, queste curve sono razionali e il loro numero è numero dispari.

Essendo $\mu = 0$, il genere della preindicata linea $C_{s\sigma}$ diventa $\sigma = \nu + h$. Se $h > 1$, quand'anche fosse $\nu = 0$, non potrebbe essere $\sigma < 3$ e per conseguenza $s < 4$; si ha pertanto un limite massimo dell'ordine m della curva razionale C_m nella ineguaglianza

$$m \leq \frac{n-4}{h}.$$

16. La soluzione $L_{n\nu}$ sia una linea complessa formata dal sistema di h curve eguali e coincidenti C_m razionali (n. 15), fisse, dell'ordine m, sistema che rappresenteremo brevemente con C^h_m e da una linea (semplice o complessa) $C_{s\sigma}$ variabile, dell'ordine $s = n - hm$ e del genere $\sigma = \nu + h$ (n. 5), sia cioè

$$L_{n\nu} \equiv C^h_m \,.\, C_{s\sigma}; \quad hm + s = n, \quad \sigma = \nu + h.$$

La curva C_m abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i_1', i_2',... e la $C_{s\sigma}$ vi abbia punti multipli secondo i_1'', i_2'',...: onde

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \qquad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

$$\Sigma \frac{i''(i''+1)}{2} = \frac{s(s+3)}{2} - 1, \quad \Sigma \frac{i''(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - \sigma;$$

e quindi

(21) $\Sigma i'^2 = m^2 + 1,\ \Sigma i' = 3m - 1\ ;\ \Sigma i''^2 = s^2 - \sigma,\ \Sigma i'' = 3s - 2 + \sigma$:

e per la formula (20)

$$\Sigma i' i'' = ms - \frac{h-1}{2}.$$

Da queste equazioni si deducono le due seguenti:

(22) $$\Sigma i i' = mn + \frac{h+1}{2},\quad \Sigma i i'' = sn - (v + h) - \frac{h(h-1)}{2}\ ;$$

che si riducono alle (11) quando è $h = 1$.

Suppongasi inversamente che essendo data una soluzione

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t)$$

delle equazioni (5), si trovi una linea razionale C_m dell' ordine m con punti multipli secondo i numeri i_1', i_2',... tali che si abbia

(23) $$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2},\ \Sigma i i' = mn + \frac{h+1}{2},\ h i_r' < i_r,\ r = 1, 2, \ldots t:$$

allora ciascuna linea $L_{n\nu}$ del fascio è un sistema di h linee eguali e coincidenti C_m fisse e di una linea $C_{s\sigma}$ (semplice o complessa) variabile, dell' ordine s e del genere σ, che ha, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i_1'', i_2'',..., essendo i numeri s, σ, i_1'', i_2'',... determinati dalle condizioni

(24) $$hm + s = n,\ \sigma = v + h,\ h i_r' + i_r'' = i_r,\ r = 1, 2, \ldots, t.$$

Infatti le equazioni

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2},\ \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2},\ \Sigma i i' = mn + \frac{h+1}{2}$$

equivalgono alle

(25) $$\Sigma i'^2 = m^2 + 1,\ \Sigma i' = 3m - 1,\ h\,\Sigma i'^2 + \Sigma i' i'' = m(hm+s) + \frac{h+1}{2},$$

dalle quali deducesi

$$(26) \qquad \Sigma\, i' i'' = ms - \frac{h-1}{2}\,.$$

Per le equazioni (5) deve essere

$$\Sigma i^2 = \Sigma\,(hi' + i'')^2 = h^2\, \Sigma i'^2 + \Sigma i''^2 + 2\,h\, \Sigma i' i'' = (hm + s)^2 - v,$$

$$\Sigma i = \Sigma\,(hi' + i'') = h\, \Sigma i' + \Sigma i'' = 3\,(hm + s) - 2 + v\,;$$

onde

$$(27) \qquad \Sigma i''^2 = s^2 - (v + h),\ \ \Sigma i'' = 3s - 2 + (v + h)\,:$$

equazioni equivalenti alle

$$(28) \qquad \Sigma\, \frac{i''\,(i''+1)}{2} = \frac{s\,(s+3)}{2} - 1,\ \ \Sigma\, \frac{i''\,(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - (v+h),$$

che definiscono la predetta linea $C_{s\sigma}$.

Noteremo che dalla (26) i cui termini siansi moltiplicati per h e dalla prima delle (27) addizionando si ricava

$$(29) \qquad \Sigma i i'' = sn - (v + h) - \frac{h\,(h-1)}{2}\,,$$

che è la seconda delle equazioni (22): e da ciò è agevole dedurre che se, essendo data una soluzione $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ delle equazioni (5) si trovasse una linea $C_{s\sigma}$ con punti multipli secondo i numeri $i_1'', i_2'', \ldots$ i quali soddisfacessero le equazioni (28) e (29) e fosse $s < n$, $i_r'' \leq i_r$, $r = 1, 2, \ldots, t$; ciascuna linea del fascio determinato dalla soluzione data sarebbe il sistema della linea $C_{s\sigma}$ e di h linee razionali eguali e coincidenti C_m dell'ordine m, ciascuna con punti multipli secondo $i_1', i_2' \ldots$ e i numeri $m, i_1', i_2', \ldots$ soddisferebbero le equazioni (24).

17. Si è veduto che le formule (22) si riducono alle (11) col porvi $h = 1$. Ammetteremo il seguente principio generale. Se una soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (5) è una linea complessa, e a formare questa linea entrano curve $C', C'', \ldots$ ripetute $h', h'', \ldots$ volte e aventi (nei punti base del fascio multipli secondo $i_1, i_2, \ldots$) punti multipli secondo $i_1', i_2' \ldots$; $i_1'', i_2'', \ldots$; ecc. rispettivamente; quelle equazioni che esprimono relazioni che hanno luogo fra i numeri $i, i', i'', \ldots, h', h'', \ldots$ se espri-

meranno anche relazioni determinate quando in esse si sarà posta l'unità a luogo di uno dei numeri h', h'',..., esprimeranno relazioni che hanno fra loro que' numeri nel caso particolare in cui una linea complessa soluzione di equazioni analoghe alle equazioni (5) è formata delle stesse curve che formano la $L_{n\nu}$, colla differenza soltanto che quella delle curve C', C'',... cui corrisponde la h che fu posta eguale all' unità, vi entra una sola volta.

18. Una osservazione faremo pure sulla formula (20) che non differisce dalla

$$(30) \qquad \Sigma\, hi'i'' = hms - \frac{h(h-1)}{2}.$$

Se la linea $C_{s\sigma}$ è una linea semplice e se si riguarda il sistema C^h_m delle h curve eguali C_m come una linea dell' ordine hm, l' equazione (30) può interpretarsi col dire che la linea C^h_m è intersecata dalla curva variabile $C_{s\sigma}$ e fuori della base del fascio in $(h-1):2$ punti multipli secondo h: e però se $h=1$, essa non è incontrata dalla curva variabile se non nei punti base, giusta il teorema del (n. 3). Sia invece la linea $C_{s\sigma}$ un sistema delle curve razionali C_p, C_q,... degli ordini p, q,... e che abbiano, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri j_1', j_2',...; j_1'', j_2'',...; ecc. rispettivamente, e di una linea variabile $C_{s\sigma}$ dell' ordine s e che abbia, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri i_1'', i_2'',...: supponiamo, cioè, che a luogo della linea semplice $C_{s\sigma}$ si abbia una linea complessa $C_p\,.\,C_q \ldots C_{s\sigma}$. Nella formula (30) si sostituisca a i'' la somma $j'+j''+\ldots+i''$ e a s la somma $p+q+\ldots+s$; sarà

$$\Sigma\, hi'j' + \Sigma\, hi'j'' + \ldots + \Sigma\, hi'i'' = hmp + hmq + \ldots + hms - \frac{h(h-1)}{2}.$$

La forma di quest' ultima equazione e una certa legge di simmetria ci inducono ad ammettere che anche nell' ipotesi che a luogo della curva $C_{s\sigma}$ sia una linea complessa formata nel predetto modo, si ha

$$\Sigma\, hi'i'' = hms - \frac{h(h-1)}{2}$$

e che per conseguenza la precedente equazione può scomporsi nelle seguenti

$$\Sigma i'j' = mp,\ \Sigma i'j'' = mq, \ldots, \Sigma\, hi'i'' = hms - \frac{h(h-1)}{2}.$$

19. Sia la soluzione $L_{n\nu}$ un sistema della curva $C_{m\mu}$ dell' ordine m e del genere μ ripetuta h volte, della curva $C_{p\pi}$ dell' ordine p e del genere π ripetuta k

volte, e della linea variabile $C_{s\sigma}$ semplice o complessa, ma però, se complessa, formata di curve tutte diverse l' una dall' altra e diverse anche dalle curve $C_{m\mu}$, $C_{p\pi}$: sia, cioè,

$$L_{n\nu} \equiv C^h_{m\mu} \,.\, C^k_{p\pi} \,.\, C_{s\sigma},\ hm + kp + s = n,\ h\mu + k\pi + \sigma = \nu + h + k.$$

Le linee $C_{m\mu}$, $C_{p\pi}$, $C_{s\sigma}$ abbiano, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri $i_1', i_2', \ldots; i_1'', i_2'', \ldots; j_1', j_2', \ldots$ rispettivamente onde $hi_r' + ki_r'' + j_r = i_r$ qualunque sia r. Si avranno le equazioni

$$\Sigma i'^2 = m^2 + 1 - \mu,\ \Sigma\, i''^2 = p^2 + 1 - \pi,\ \Sigma j'^2 = s^2 - \sigma\,;$$

$$\Sigma i^2 = h^2\, \Sigma i'^2 + k^2\, \Sigma i''^2 + \Sigma j'^2 + 2\,(h\, \Sigma i'j' + k\, \Sigma i''j' + hk\, \Sigma i'i'') = n^2 - \nu\,;$$

dalle quali dedurassi

$$2(h\,\Sigma i'j' + k\,\Sigma i''j' + hh\,\Sigma i'i'') = 2(hms + kps + hkmp) - h(h-1)(1-\mu) - k(k-1)(1-\pi).$$

La quantità

$$h\,(h-1)(1-\mu) + k\,(k-1)(1-\pi)$$

non può evidentemente essere minore di zero, non potendo il primo membro dell' equazione superare la somma dei primi tre termini del secondo membro, e con un ragionamento affatto simile a quello del (n. 15) si dimostrerebbe che non può essere eguale allo zero: una delle due quantità μ, π è dunque lo zero. Suppongasi $\pi = 0$ e

$$2\,(h\,\Sigma i'j' + k\,\Sigma i''j' + hk\,\Sigma i'i'') = 2\,(hms + kps + hkmp) - h\,(h-1)(1-\mu) - k\,(k-1).$$

Pel principio del (n. 17) l' equazione deve essere vera anche quando fosse $k = 1$, quando cioè nel sistema $L_{n\nu}$ fossero h curve eguali e le altre curve differissero tutte l' una dall' altra, caso considerato nel (n. 15): deve dunque essere anche $\mu = 0$ e l' equazione precedente, liberata dal fattore 2 comune a tutti i suoi termini, diventa

$$(31)\quad h\,\Sigma i'j' + k\,\Sigma i''j' + hk\,\Sigma i'i'' = hms + kps + hkmp - \frac{h\,(h-1)}{2} - \frac{k\,(k-1)}{2}\,,$$

e la linea $L_{n\nu}$ è rappresentata dalla formula

$$L_{n\nu} \equiv C^h_{m} \,.\, C^k_{p} \,.\, C_{s\sigma},\ hm + kp + s = n,\ \sigma = \nu + h + k.$$

Procedendo oltre si dimostrerebbe in simil modo che se una soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (5) fosse formata di un sistema di h curve eguali C_m, di k curve eguali C_p, di l curve eguali C_q ecc. le curve C_m, C_p, C_q,... sarebbero tutte curve razionali.

20. Nelle formule del (n. prec.) si ponga $k = 1$ (n. 17), onde

$$L_{n\nu} \equiv C^h_m \,.\, C_p \,.\, C_{s\sigma}\,,\ hm + p + s = n,\ \sigma = \nu + h + 1:$$

$$h\,\Sigma\, i'j' + \Sigma\, i''j' + h\,\Sigma\, i'i'' = hms + ps + hmp - \frac{h\,(h-1)}{2}\,.$$

Si riguardi il sistema delle due linee C_p, $C_{s\sigma}$ come una linea complessa dell' ordine $p + s$, che ha, nei punti base del fascio, punti multipli secondo i numeri $i_1'' + j_1'$, $i_2'' + j_2'$,...: per la formula (20) si avrà

$$\Sigma\, i'\,(i'' + j') = m\,(p + s) - \frac{h-1}{2}\,, \tag{32}$$

e combinando questa coll' equazione precedente,

$$\Sigma\, i''j' = ps\,; \tag{33}$$

cioè: la curva C_p che entra una volta sola nel sistema di curve $L_{n\nu}$ ha tutte le sue intersecazioni colla linea variabile $C_{s\sigma}$ nei punti base del fascio.

L' equazione (33) ha luogo e quando la linea variabile $C_{s\sigma}$ è linea semplice e quando è linea complessa formata di linee diverse l'una dall'altra; perciò si avrà in generale che le curve le quali entrano una volta sola a formare una linea complessa $L_{n\nu}$ che sia soluzione delle equazioni (5) hanno tutte le loro scambievoli intersecazioni nei punti base del fascio. Si è già veduto (n. 18) che l' equazione (32) può scomporsi nelle

$$\Sigma\, i'i'' = mp, \quad \Sigma\, i'j' = ms - \frac{h-1}{2}\,,$$

e perciò anche le scambievoli intersecazioni della curva fissa C_p colla curva fissa C_m cadono tutte nei punti base del fascio.

Considerazioni analoghe che si facessero sui risultamenti del precedente (n. 19) condurrebbero similmente a concludere che l' equazione (31) può spezzarsi nelle tre

$$\Sigma\, i'i'' = mp, \quad \Sigma\, i'j' = ms - \frac{h-1}{2}\,, \quad \Sigma\, i''j' = ps - \frac{k-1}{2}\,:$$

e che in generale: allorquando una linea $L_{n\nu}$ soluzione delle equazioni (5) è formata di h' curve eguali $C_{m'}$, h'' curve eguali $C_{m''}$, ecc., di k curve diverse l' una dall' altra $C_{p'}$, $C_{p''}$, ecc. e di una curva variabile $C_{s\sigma}$; le intersecazioni fra loro delle curve $C_{m'}$, $C_{m''}$, ecc. e di ciascuna di queste curve con ciascuna delle curve $C_{p'}$, $C_{p''}$, ecc.; le intersecazioni fra loro delle curve $C_{p'}$, $C_{p''}$, ecc. e di ciascuna di queste curve colla curva variabile $C_{s\sigma}$ cadono tutte nei punti base del fascio; e che i sistemi di curve eguali $(C^h_m)'$, $(C^h_m)''$, ecc. hanno rispettivamente colla curva variabile $C_{s\sigma}$, fuori della base del fascio, $h'(h'-1):2$, $h''(h''-1):2$, ecc. intersecazioni.

21. Nell' equazione (30) si ponga $h=1$: si ha (n. 17)

$$\Sigma\, i'i'' = ms.$$

Si è veduto (n. 9) che quest' ultima equazione non potrebbe essere soddisfatta se la curva variabile $C_{s\sigma}$ non passasse per tutti i punti base del fascio pei quali passa la curva fissa C_m, perciò riterremo che anche quando nella soluzione $L_{n\nu}$ una curva fissa è ripetuta più volte, la linea variabile passa per tutti i punti base del fascio pei quali passa la curva fissa: e più generalmente che comunque sia formata la linea complessa $L_{n\nu}$ soluzione delle equazioni (5), sia essa formata da curve tutte diverse l' una dall' altra, ovvero concorrano a formarla uno o più sistemi di curve eguali fra loro, la curva variabile passa per tutti i punti base del fascio.

22. Una soluzione $L_{n\nu}$ è un sistema di curve fra le quali è una retta C_1 ripetuta h volte, onde

$$(a)\qquad L_{n\nu} \equiv C_1^h \,.\, C_{s\sigma}\,,\quad h+s=n,\quad \sigma=\nu+h.$$

Sarà $i_1'=1$, $i_2'=1$, $i_3'=i_4'=\ldots=i_l'=0$, e per la prima delle formule (22)

$$(\alpha)\qquad i_1+i_2=n+\frac{h+1}{2}\,.$$

Suppongasi sia anche

$$(\beta)\qquad (m-1)\,i_1+i_2+\ldots+i_{2m+1}=mn+\frac{k+1}{2}\,,$$

e che si possa (n. 16) riguardare la $L_{n\nu}$ come un sistema di una curva fissa C_m dell' ordine m dotata di un punto multiplo secondo $m-1$ ripetuta k volte e di una linea variabile $C_{s'\sigma'}$, e porre

$$(b)\qquad L_{n\nu} \equiv C^k_m \,.\, C_{s'\sigma'}\,,\quad km+s'=n,\quad \sigma'=\nu+k:$$

allora il sistema $L_{n\nu}$ comprenderà e la retta C_1 ripetuta h volte e la curva C_m ripetuta k volte; essendo la preindicata linea $C_{s\sigma}$ una linea complessa formata della curva C_m ripetuta k volte e di un' altra linea $C_{p\pi}$ dell'ordine $p = s - km = n - h - km$ e del genere $\pi = \sigma + k = \nu + h + k$. Infatti si avrà

$$i_1'' = i_1 - h,\ i_2'' = i_2 - h,\ i_3'' = i_3, \ldots, i_t'' = i_t;$$

$$(m-1)\, i_1'' + i_2'' + \ldots + i''_{2m+1} = (m-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2m+1} - hm = ms + \frac{k+1}{2}.$$

La linea $C_{s\sigma}$ è dunque (n. 16) il sistema dalla curva C_m ripetuta k volte e della predetta linea $C_{p\pi}$.

In simil modo si dimostrerebbe che nella formula (b) la linea $C_{s'\sigma'}$ è il sistema della retta C_1 ripetuta h volte e della linea variabile $C_{p\pi}$. Nell' ipotesi che si verifichino simultaneamente le condizioni (α) e (β), si può dunque (scrivendo s e σ in luogo di p e π) rappresentare la linea $L_{n\nu}$ nel modo seguente:

$$(c) \qquad L_{n\nu} \equiv C_1^{\,h} \,.\, C^k_{\,m} \,.\, C_{s\sigma}, \quad h + km + s = n, \quad \sigma = \nu + h + k.$$

In una soluzione data $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ sia

$$(\beta) \qquad (m-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2m+1} = mn + \frac{k+1}{2},\ m > 1$$

e possa perciò la linea $L_{n\nu}$ del fascio essere rappresentata dalla precedente formula (b): si domanda se per un valore $q > m$ potrà anche essere

$$(\gamma) \qquad (q-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2q+1} = qn + \frac{l+1}{2}.$$

Suppongasi che le condizioni (β) e (γ) abbiano luogo simultaneamente. La linea $C_{s'\sigma'}$ indicata nella formula (b), avrà, nei punti base del fascio, punti multipli secondo

$$i_1'' = i_1 - k(m-1),\ i_2'' = i_2 - k,\ i_3'' = i_3 - k, \ldots, i''_{2m+1} = i_{2m+1} - k,$$

$$i''_{2m+2} = i_{2m+2}, \ldots, i_t'' = i_t,$$

e sarà quindi

$$(q-1)\, i_1'' + i_2'' + \ldots + i''_{2q+1} = (q-1)\, i_1 + i_2 + \ldots + i_{2q+1} - k(q-1)(m-1) - 2mk$$

$$= q(n-km) + k(q-m-1) + \frac{l+1}{2} = qs' + k(q-m-1) + \frac{l+1}{2}.$$

Essendo per ipotesi $q > m$, quest' equazione dimostra che una curva C_q dell' ordine q dotata di un punto multiplo secondo $q - 1$, potrebbe incontrare la linea $C_{s'\sigma'}$ nei punti base del fascio in più di qs' punti; perciò quest' ultima linea è un sistema della curva C_q (che potrebbe anche essere ripetuta più volte) e di un' altra linea variabile $C_{s\sigma}$. La linea $C_{s'\sigma'}$ è definita (n. 16) dalle equazioni

$$\Sigma\, i'^2 = s'^2 - (v + k), \quad \Sigma\, i' = 3s' - 2 + (v + k).$$

che sono della forma (5). Si è dimostrato (n. 16) che quando una linea definita dalle equazioni (5) è un sistema di una curva razionale fissa C_m ripetuta h volte e di una linea variabile $C_{s\sigma}$, il genere σ della linea variabile supera di h unità quello del sistema delle due linee e che è soddisfatta la prima delle equazioni (22): applicando questi risultamenti al caso qui considerato, ne dedurremo immediatamente che deve essere

$$\sigma = \sigma' + l, \; q - m - 1 = 0, \quad \text{ovv.} \quad \sigma = v + k + l, \; q = m + 1.$$

Se dunque fa parte del sistema $L_{n\nu}$ la curva C_m dell' ordine m dotata di un punto multiplo secondo $m - 1$ e ripetuta k volte, potrà far parte del sistema stesso un' altra curva C_q dell' ordine $q > m$ dotata di un punto multiplo secondo $q - 1$ e ripetuta l volte, purchè sia $q = m + 1$ e allora la linea $L_{n\nu}$ si potrà rappresentare nel modo seguente:

$$(d) \quad L_{n\nu} \equiv C^k_{\;m} \,.\, C^l_{\;m+1} \,.\, C_{s\sigma}, \; (k + l)\, m + l + s = n, \; \sigma = v + k + l.$$

Da ciò segue anche che quando una linea complessa $L_{n\nu}$ soluzione delle equazioni (5) comprende una curva C_m dell' ordine $m > 1$ dotata di un punto multiplo secondo $m - 1$ e ripetuta k volte, non può comprendere che un' altra sola curva C_q dell' ordine q dotata di un punto multiplo secondo $q - 1$ e ripetuta l volte, e quando ciò accade è $q = m \pm 1$. Potrebbe però la linea $L_{n\nu}$ comprendere la predetta curva C_m ripetuta k volte e una retta C_1 ripetuta h volte; e anche le dette curve C_m ripetuta k volte e C_q ripetuta l volte e inoltre una retta C_1 ripetuta h volte. In quest' ultimo caso la $L_{n\nu}$ si rappresenterebbe scrivendo

$$(e) \quad L_{n\nu} = C_1^{\,k} \,.\, C^k_{\;m} \,.\, C^l_{\;m+1} \,.\, C_{s\sigma}, \; h + (k + l)\, m + l + s = n, \; \sigma = v + h + k + l:$$

coll' avvertenza che la $C_{s\sigma}$ non potrà essere un sistema di linee che comprenda una curva d' ordine qualsivoglia p dotata di un punto multiplo secondo $p - 1$.

Se si pone $h = 1$, $k = 1$, $l = 1$, i risultamenti ottenuti in questo numero diventano identici con quelli del (n. 14) e ciò conferma il principio del (n. 17). (*)

(*) Fra le curve razionali che possono concorrere a formare una linea complessa soluzione delle equazioni (5), ho considerato particolarmente quelle dotate di un punto multiplo secondo un numero minore di un' unità del numero che esprime l' ordine della curva. Non mi è accaduto di trovare soluzione delle predette equazioni che fosse una linea complessa e che comprendesse una curva razionale d' ordine $m > 1$ non dotata di un punto multiplo secondo $m - 1$: sarebbe forse che a formare tali soluzioni non possono entrare curve razionali fisse dotate di più di un punto multiplo secondo un numero i maggiore dell' unità? e che le formule (a), (b), (c), (d), (e) (n. 22) rappresentassero tutte le forme possibili delle linee di fasci di linee complesse?

23. La prima delle formule (22) si può applicare molto convenientemente a risolvere la seguente questione. È data una soluzione

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_t)$$

delle equazioni (5): si vuol sapere se le linee del fascio determinato dalla soluzione data sono linee semplici o linee complesse, e nel caso fossero linee complesse, quali linee semplici concorrano a formarle.

Per iscoprire se la linea $L_{n\nu}$ del fascio è linea semplice o linea complessa, si dovrà esaminare se fra le curve razionali d'ordine $m \leq (n-3):2$ (n. 11) sia qualche curva C_m dotata di punti multipli secondo numeri i_2', i_2'',... che soddisfacciano la prima delle equazioni (22). Si incomincerà dalla linea retta esaminando se sia $i_1 + i_2 \geq n + 1$; se questo caso non ha luogo, si passerà alla curva del secondo ordine guardando se sia $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \geq 2n + 1$; se anche questa condizione non è soddisfatta, si procederà alla curva del 3.° ordine la quale dovrebbe dare $2i_1 + i_2 + \ldots + i_7 \geq 3n + 1$; poi, se occorre, alle curve del 4.° ordine, le quali richiederebbero fosse $3i_1 + i_2 + \ldots + i_9 \geq 4n + 1$ ovvero $2(i_1 + i_2 + i_3) + i_4 + i_5 + i_6 \geq 4n + 1$; ecc. Se non si trova così nessuna curva che possa soddisfare l' equazione (22), si concluderà che la linea $L_{n\nu}$ è una linea semplice: se invece si trovasse una curva che somministrasse l' equazione

$$\Sigma\, ii' = mn + r,$$

si dirà che le linee del fascio sono linee complesse e ciascuna linea $L_{n\nu}$ è il sistema della curva C_m fissa e ripetuta $h = 2r - 1$ volte e di un' altra linea variabile $C_{s\sigma}$ dell' ordine s e del genere σ definita dalle equazioni (24); e ciò si potrà esprimere scrivendo

$$L_{n\nu} \equiv C^h_m \,.\, C_{s\sigma}\,,\;\; hm + s = n,\;\; \sigma = v + h.$$

La linea variabile $C_{s\sigma}$ sarà o una curva o una linea complessa: in ogni caso però adempirà le condizioni espresse dalle due ultime equazioni (21) ossia dalle

$$\Sigma\, i''^2 = s^2 - (v + h), \quad \Sigma\, i'' = 3s - 2 + (v + h),$$

che non differiscono dalle (5) se non perchè vi si trova $v + h$ a luogo della v che è nelle (5). E però se si ripeteranno sulla $C_{s\sigma}$ ricerche simili a quelle fatte sulla $L_{n\nu}$, si arriverà a conoscere se essa è una linea semplice ovvero una linea complessa e in quest' ultimo caso quali sono le due linee, una razionale fissa che potrebbe anche essere ripetuta più volte e l' altra (semplice o complessa) variabile e di genere determinato che la formano; e così di seguito.

Questo modo di risolvere la questione richiede si conoscano tutte le combinazioni diverse di punti multipli che può avere una curva razionale dell' ordine $m \leq (n - 3) : 2$; o, in altri termini, bisogna sapere quali sono le soluzioni delle equazioni.

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \quad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

ovvero delle equivalenti

$$\Sigma i'^2 = m^2 + 1, \quad \Sigma i' = 3m - 1;$$

per tutti i preaccennati valori di m. Queste due ultime equazioni sono della forma (2): si potrà dunque sempre ottenere tutte le loro soluzioni mediante le formule (S) del (n. 1).

Reti

24. Nelle equazioni (2) si ponga $p = 2$. Esse diventano

$$(34) \qquad \Sigma i^2 = n^2 - 1 - v, \quad \Sigma i = 3(n-1) + v.$$

Allorquando n e v sono numeri intieri dati ed è

$$n \geq 2, \quad 0 \leq v \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

ogni soluzione di queste equazioni determina una rete di linee dell' ordine n e del genere v. Tutte le linee L_{nv} della rete hanno comuni punti multipli secondo i numeri $i_1, i_2, \dots i_t$ e sono tali che ognuna di esse è determinata da due punti. I punti comuni a tutte le linee della rete sono i *punti base* della rete, e *base* della rete è il loro sistema. Allorquando le linee L_{nv} della rete sono linee semplici, due qualsivoglia di esse s' intersecano fuori della base in $1 + v$ punti; perchè il numero totale delle loro intersecazioni è n^2 e i punti che hanno comuni nella base della rete equivalgono a Σi^2 cioè a $n^2 - 1 - v$ intersecazioni

25. Sia L_{nv} una soluzione delle equazioni (34). Indichiamo con $\mathfrak{L}_{nv}$ una linea la quale soddisfaccia le equazioni (34) e inoltre passi per un punto o scelto ad arbitrio nel piano dei punti base. La linea $\mathfrak{L}_{nv}$ sarà una soluzione delle equazioni

$$(35) \qquad \Sigma i^2 + 1 = n^2 - v, \quad \Sigma i + 1 = 3n - 2 + v:$$

quindi infinite linee sono rappresentate dal simbolo $\mathfrak{L}_{n\nu}$ e sono le linee del fascio determinato dalle equazioni (35). Tutte queste linee appartengono anche alla rete determinata dalle equazioni (34): e se avvertiamo che il punto o è arbitrario, concluderemo che le linee della rete determinata dalle equazioni (34) sono quelle di infiniti fasci determinati ciascuno da due equazioni della forma (35); e più particolarmente che una linea della detta rete determinata da due dati punti o_1 e o_2, è la linea comune a due degli indicati fasci e che sono determinati l' uno dal punto o_1, l' altro dal punto o_2.

Le linee della rete determinata dalle equazioni (34) appartengono dunque tutte a fasci determinati da equazioni della forma (35), perciò dalle proprietà geometriche dei fasci riuscirà agevole dedurre proprietà analoghe delle reti.

26. In una soluzione delle equazioni (34) le linee della rete sieno ciascuna un sistema di più curve C', C'',... Siccome una linea $L_{n\nu}$ della rete è determinata da due punti, si possono fare due ipotesi circa le curve C', C'',...: si può supporre che di queste curve due sieno variabili (ciascuna determinata da un punto) e le altre fisse, cioè comuni a tutte le linee della rete: ovvero che una sola delle dette curve sia variabile (determinata da due punti) e le altre tutte fisse.

Esaminiamo l' ipotesi che fra le linee C', C'',... sieno due curve variabili, per es. C' e C'' e che le altre curve sieno fisse. Ognuna delle curve C' e C'' è determinata da un punto. Si fissi un punto o ad arbitrio che determini la curva C' e rimanga variabile la C''. Si forma così un fascio la di cui base è formata dai punti base della rete e dal punto o e ogni linea del fascio è anche una linea della rete ed è il sistema delle curve C', C''',... fisse e della curva C'' variabile. Le linee del fascio dovrebbero dunque soddisfare le equazioni (35) ed essere ognuna il sistema di una o più curve fisse e di una linea variabile la quale non passa per tutti i punti base del fascio. Non potendo ammettersi siffatto fascio (n. 9) dovrà essere esclusa l' ipotesi che nel sistema $L_{n\nu}$ due siano le curve variabili. Se dunque una soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (34) è un sistema di più curve, una sola delle curve del sistema è variabile e le altre sono tutte curve fisse.

27. Sia $L_{n\nu}$ una soluzione delle equazioni (34) e sia un sistema di k curve C', C'',... fisse, diverse l' una dall' altra e di una curva $C_{s\sigma}$ variabile (n. 26). Assumasi un punto o ad arbitrio nel piano della rete e si stabilisca che per questo punto debba passare la curva variabile $C_{s\sigma}$, la quale però rimane ancora variabile e si determinerebbe con un punto. Si ha così un fascio di linee, e le linee (complesse) del fascio debbono soddisfare le equazioni (35). Si è dimostrato che tal fascio è possibile soltanto se la curva variabile passa per tutti i punti base del fascio (n. 9) e le curve fisse sono tutte razionali e di ordine inferiore all' ordine della curva variabile (n. 10); e che allora il genere della curva variabile è $\nu + k$, essendo k il numero delle curve fisse, e che l' ordine di una curva razionale fissa non può in nessun caso superare il numero $(n - 3):2$ (n. 11); possiamo dunque senz' altro concludere che, se in una soluzione delle equazioni (34)

le linee $L_{n\nu}$ della rete sono ciascuna un sistema di due o più curve: 1° quella fra le curve del sistema $L_{n\nu}$ che è variabile (n. 26) passa per tutti i punti base della rete: 2° le curve fisse del sistema $L_{n\nu}$ sono tutte curve razionali e il loro ordine non può mai superare il numero $(n - 3):2$; 3° se k e il numero delle curve fisse del sistema $L_{n\nu}$, la curva variabile del sistema è del genere $v + k$.

Avvertiremo pure che se occorrerà porre a calcolo i punti multipli (doppi, tripli, ecc.) del sistema $L_{n\nu}$, basterà si tenga conto delle intersecazioni della curva variabile con tutte le altre curve del sistema e si riguardino queste intersecazioni come punti multipli del sistema.

28. Collo stesso principio dal teorema del (n. 14) si deduce che quando una linea complessa $L_{n\nu}$ soluzione delle equazioni (34) comprende una curva razionale C_m dell' ordine $m > 1$ e con un punto multiplo secondo $m - 1$, non può comprendere che una sola curva C_q dell' ordine q dotata di un punto multiplo secondo $q - 1$, e allora è $q = m \pm 1$. Potrebbe però la $L_{n\nu}$ comprendere la predetta curva C_m e una retta, e anche amendue le dette curve C_m e C_q e una retta ed essere quindi rappresentata dalla formula (*e*) del cit. (n. 14).

29. Nell' ipotesi che una soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (34) sia un sistema di k curve razionali fisse diverse l' una dall' altra e di una curva variabile, pongasi

$$L_{n\nu} \equiv C_{m\mu} \,.\, C_{s\sigma},\ m + s = n,\ \sigma = v + k\,;$$

rappresentando con $C_{m\mu}$ il sistema di tutte le curve fisse e con $C_{s\sigma}$ la linea variabile. La linea $C_{s\sigma}$ passerà per tutti i punti base della rete (n. 26) e supporremo vi abbia punti multipli secondo i numeri $j_1, j_2, \dots j_t$. Questi numeri soddisferanno le equazioni

$$\Sigma \frac{j\,(j+1)}{2} = \frac{s\,(s+3)}{2} - 2,\quad \Sigma \frac{j\,(j-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - (v+k)\,;$$

dalle quali si deduce

$$\Sigma j^2 = s^2 - (1 + v + k).$$

Consideriamo due linee quali si voglia $L_{n\nu}$ e $\mathfrak{L}_{n\nu}$ della rete, cui corrispondano le due curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$, cosichè la linea $L_{n\nu}$ sia il sistema delle due linee $C_{m\mu} \,.\, C_{s\sigma}$ e la linea $\mathfrak{L}_{n\nu}$ il sistema delle due linee $C_{m\mu} \,.\, \mathfrak{C}_{s\sigma}$. Nel sistema $L_{n\nu} \,.\, \mathfrak{L}_{n\nu}$ delle due linee $L_{n\nu}$ e $\mathfrak{L}_{n\nu}$ le curve del sistema $C_{m\mu}$ figurano ciascuna due volte formando una linea *doppia* e perciò si può dire che ognuna di esse serve ad accrescere di un numero indefinito di punti la base della rete. Se nel detto sistema $L_{n\nu} \,.\, \mathfrak{L}_{n\nu}$ si tenga conto delle linee doppie una volta sola, i suoi punti multipli saranno formati dalle intersecazioni delle curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ fra loro e con ciascuna delle curve

del sistema $C_{m\mu}$ (n. 27). Sappiamo (n. 3) che cadono nei punti base della rete le intersecazioni di ciascuna delle curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ colle curve del sistema $C_{m\mu}$; e le curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ hanno comuni nei punti base della rete, punti multipli secondo $j_1, j_2, \ldots$: cadranno dunque fuori dei punti base della rete quelle intersecazioni delle curve $C_{s\sigma}$ e $\mathfrak{C}_{s\sigma}$ che non sono formate dalla coincidenza dei predetti loro punti multipli, cioè

$$s^2 - \Sigma j^2 = 1 + v + k$$

intersecazioni. Quando adunque le linee $L_{n\nu}$ sono linee complesse formate di k curve fisse e di una curva variabile, due linee quali si voglia della rete s' intersecano fuori della base della rete in $1 + v + k$ punti.

30. Sia $L_{n\nu}$ una soluzione delle equazioni (34) e sia linea complessa. Si riguardi la $L_{n\nu}$ come un sistema di due linee; di una curva razionale C_m dell' ordine m e di una linea $C_{s\sigma}$ (che potrà essere semplice o complessa) variabile, dell' ordine $s = n - m$ e del genere $\sigma = v$ (n. 5). La curva C_m concorra a formare i punti base della rete con punti multipli secondo $i_1', i_2', \ldots$ e la $C_{s\sigma}$ vi concorra con punti multipli secondo $i_1'', i_2'', \ldots$; onde

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \qquad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

$$\Sigma \frac{i''(i''+1)}{2} = \frac{s(s+3)}{2} - 2, \quad \Sigma \frac{i''(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - (v+1)$$

e quindi

$$(36) \quad \Sigma i'^2 = m^2 + 1, \ \Sigma i' = 3m - 1; \ \Sigma i''^2 = s^2 - 2 - v, \ \Sigma i'' = 3s - 2 + v.$$

Sarà anche (n. 3)

$$(37) \qquad \Sigma i' i'' = ms,$$

ovvero

$$\Sigma i'i'' = \Sigma ii' - \Sigma i'^2 = mn - m^2, \ \Sigma i'i'' = \Sigma ii'' - \Sigma i''^2 = sn - s^2;$$

ed eliminando da queste equazioni $\Sigma i'^2$ e $\Sigma i''^2$ per mezzo delle (36)

$$(38) \qquad \Sigma ii' = mn + 1, \ \Sigma ii'' = ns - 2 + v.$$

Poniamo ora che essendo data una soluzione

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t)$$

delle equazioni (34) si trovi una curva razionale C_m dell' ordine m con punti multipli secondo numeri $i_1', i_2', \ldots$ che adempiendo le condizioni

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \quad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

$$i_r' < i_r, \; r = 1, 2, \ldots, t$$

soddisfacciano anche l' equazione

$$\Sigma\, ii' = mn + 1; \tag{40}$$

allora ciascuna linea $L_{n\nu}$ della rete determinata dalla soluzione data è un sistema di due linee, cioè della curva C_m fissa e di una linea variabile (semplice o complessa $C_{s\sigma}$ dell' ordine s e del genere σ, che ha, nei punti base della rete, punti multipli secondo $i_1'', i_2'', \ldots,$ essendo i numeri s, σ, i_1'', i_2'',... determinati dalle equazioni seguenti:

$$m + s = n, \; \sigma = 1 + \nu; \; i_r' + i_r'' = i_r, \; r = 1, 2, \ldots, t \tag{41}$$

Dalle equazioni (39) si deduce

$$\Sigma\, i'^2 = m^2 + 1, \; \Sigma\, i' = 3m - 1: \tag{42}$$

la prima di queste, e l' equazione (40) che non differisce dalla

$$\Sigma\, i'^2 + \Sigma\, i'i'' = m^2 + ms + 1,$$

danno

$$\Sigma\, i'i'' = ms. \tag{43}$$

Inoltre per le equazioni (34) deve essere

$$\Sigma\, i^2 = \Sigma\, i'^2 + \Sigma\, i''^2 + 2\, \Sigma\, i'i'' = (m + s)^2 = (1 + \nu),$$

ed eliminando le quantità $\Sigma\, i'^2$, $\Sigma\, i'$, $\Sigma\, i'i''$ per mezzo delle precedenti (42) e (43) si ottengono le equazioni

$$(44) \qquad \Sigma\, i''^2 = s^2 - 1 - (1 + v), \ \Sigma\, i'' = 3\,(s - 1) + (1 + v)$$

che equivalgono alle

$$(45)\ \ \Sigma \frac{i''\,(i'' + 1)}{2} = \frac{s\,(s+3)}{2} - 2, \quad \Sigma \frac{i''\,(i'' - 1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - (1 + v),$$

le quali definiscono la predetta linea $C_{s\sigma}$.

Combinando la (43) colla prima delle (44) per via di addizione, si ottiene anche l' equazione

$$\Sigma\, ii'' = ns - 2 - v$$

che è la seconda delle equazioni (38): e quindi posta quest' ultima equazione unitamente alle (45) e posto $i_r' + i_r'' = i_r$, $r = 1, 2, \ldots, t$, si potrebbe risalire alle (39) e (40): ond' è che se fosse data una soluzione $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ delle equazioni (34) e si trovasse una linea $C_{s\sigma}$ dell' ordine s e del genere σ con punti multipli secondo numeri i_1'', i_2'',... che soddisfacessero le equazioni (45) e la seconda delle (39), e fosse anche $s > n$, $i_r'' \leq i_r$, $r = 1, 2, \ldots, t$; ciascuna linea della rete sarebbe il sistema della linea $C_{s\sigma}$ variabile e di una curva fissa C_m razionale dell' ordine m, avente, nei punti base della rete, punti multipli secondo i_1', i_2',..., essendo i numeri m, i_1', i_2',... determinati dalle condizioni (41).

31. Estendendo ora immediatamente alle reti le proprietà dei fasci di linee complesse nei quali ogni linea del fascio comprende una o più curve ripetute ciascuna più volte (n. 25) si hanno i seguenti teoremi: 1.° Se una soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (34) è formata da un sistema di h curve eguali C_m, di k curve eguali C_p, ecc. e di una linea variabile $C_{s\sigma}$, le curve C_m, C_p, ecc. sono curve razionali (n. 19): 2.° Se la soluzione $L_{n\nu}$ è formata di h' curve eguali C_m', di h'' curve eguali $C_{m''}$, ecc. di k curve $C_{p'}$, $C_{p''}$,... diverse l' una dall' altra e di una curva variabile $C_{s\sigma}$, le intersecazioni fra loro delle curve $C_{m'}$, $C_{m''}$, ecc; le intersecazioni fra loro delle curve $C_{p'}$, $C_{p''}$,... e di ciascuna di queste con ciascuna delle $C_{m'}$, $C_{m''}$, ecc. e colla curva variabile $C_{s\sigma}$ cadono tutte nei punti base della rete, ma le curve $(C^{h}_{m})'$, $(C^{h}_{m})''$, ecc. sono intersecate dalla curva variabile $C_{s\sigma}$ fuori della base della rete in $(h' - 1) : 2$, $(h'' - 1) : 2$, ecc. punti multipli secondo h', h'', ecc. rispettivamente (n. 20): 3.° Nella soluzione $L_{n\nu}$ l' ordine di una curva fissa ripetuta $h > 1$ volte non può mai superare il numero $(n - 4) : h$ (n. 15): 4° Comunque sia formata la linea complessa $L_{n\nu}$, la linea variabile passa per tutti i punti base della rete (n. 21): 5.° Se la linea complessa $L_{n\nu}$ comprende una curva C_m dell' or-

dine $m > 1$ dotata di un punto multiplo secondo $m-1$ e ripetuta k volte, non potrà comprendere che un' altra sola curva C_q dell' ordine q dotata similmente di un punto multiplo secondo $q-1$ e ripetuta l volte, e quando ciò accade è $q = m \pm 1$: potrebbe però comprendere oltre le linee C^k_m e C^l_q una linea retta e questa anche ripetuta h volte (n. 22). 6.° I predetti numeri h, k, l sono sempre o l' unità o numeri dispari (n. 15).

32. La soluzione $L_{n\nu}$ delle equazioni (34) sia una linea complessa formata dal sistema di h curve eguali C_m razionali (n. 31. 1.°) dell' ordine m e di una linea (semplice o complessa) $C_{s\sigma}$ variabile, dell' ordine $s = n - hm$ e del genere $\sigma = \nu + h$: sia cioè

$$L_{n\nu} \equiv C^h_m \,.\, C_{s\sigma},\ hm + s = n,\ \sigma = \nu + h.$$

La curva C_m abbia, nei punti base della rete, punti multipli secondo $i_1', i_2', \ldots$, e la linea $C_{s\sigma}$ punti multipli secondo $i_1'', i_2'', \ldots$, onde

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \qquad \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

$$\Sigma \frac{i''(i''+1)}{2} = \frac{s(s+3)}{2} - 2, \quad \Sigma \frac{i''(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - \sigma;$$

e quindi

$$(46) \quad \Sigma i'^2 = m^2 + 1,\ \Sigma i' = 3m - 1;\ \Sigma i''^2 = s^2 - 1 - \sigma,\ \Sigma i''^2 = 3(s-1) + \sigma:$$

e inoltre (n. 31. 2.°)

$$(47) \qquad \Sigma\, h i' i'' = hms - \frac{h(h-1)}{2}.$$

Da quest' ultima equazione si ricava

$$\Sigma\, h i'(i - h i') = h\,\Sigma\, i i' - h^2\,\Sigma\, i'^2 = hm(n - hm) - \frac{h(h-1)}{2};$$

$$\Sigma\,(i - i'')\,i'' = \Sigma\, i i'' - \Sigma\, i''^2 = (n - s)\,s - \frac{h(h-1)}{2}:$$

e per le precedenti (46)

$$(48) \quad \Sigma i i' = mn + \frac{h+1}{2}, \quad \Sigma i i'' = sn - 1 - (\nu + h) - \frac{h(h-1)}{2};$$

formule che si riducono alle (38) se vi si pone $h = 1$.

Suppongasi inversamente che essendo data una soluzione $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ delle equazioni (34) si trovi una curva razionale C_m dell' ordine m con punti multipli secondo numeri i_1', i_2',... tali che si abbia

$$(49) \qquad \Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \ \Sigma ii' = mn + \frac{h+1}{2}; \ hi_r' < i_r, \ r = 1, 2, \ldots t:$$

allora ciascuna linea $L_{n\nu}$ della rete è un sistema di h curve eguali C_m fisse e di una linea $C_{s\sigma}$ (che potrà essere semplice o complessa) variabile, che ha nei punti base della rete punti multipli secondo i_1'', i_2'',..., i''_t, essendo i numeri s, σ, i_1'', i_2'',... determinati dalle condizioni

$$(50) \qquad hm + s = n, \ \sigma = \nu + h, \ hi_r' + i_r'' = i_r, \ r = 1, 2, \ldots, t.$$

Le equazioni

$$\Sigma \frac{i'(i'+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \ \Sigma \frac{i'(i'-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \ \Sigma ii' = mn + \frac{h+1}{2},$$

equivalgono alle

$$(51) \qquad h^2 \Sigma i'^2 = h^2 m^2 + h^2, \Sigma hi' = 3hm - h; h^2 \Sigma i'^2 + \Sigma hi'i'' = hm(hm+s) + \frac{h(h+1)}{2};$$

ed eliminando dalla terza $h^2 \Sigma i'^2$ mediante la prima si ottiene

$$(52) \qquad \Sigma hi'i'' = hms - \frac{h(h-1)}{2}.$$

Per le equazioni (34) deve essere

$$\Sigma i^2 = \Sigma (hi' + i'')^2 = h^2 \Sigma i'^2 + \Sigma i''^2 + 2 \Sigma hi'i'' = (hm + s)^2 - 1 - \nu,$$

$$\Sigma i = \Sigma (hi' + i'') = \Sigma hi' + \Sigma i'' = 3(hm + s) - 3 + \nu;$$

e per le (51) e (52)

$$(53) \qquad \Sigma i''^2 = s^2 - 1 - (\nu + h), \ \Sigma i'' = 3(s-1) + (\nu + h),$$

equazioni equivalenti alle

$$(54) \qquad \Sigma \frac{i''(i''+1)}{2} = \frac{s(s+3)}{2} - 2, \ \Sigma \frac{i''(i''-1)}{2} = \frac{(s-1)(s-2)}{2} - (\nu+h),$$

che definiscono la predetta linea $C_{s\sigma}$.

Combinando per via di addizione la (52) colla prima delle (53) si ottiene

$$(55) \qquad \Sigma i i'' = sn - 1 - (v + h) - \frac{h(h-1)}{2},$$

e ciò prova che se essendo data una soluzione $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ delle equazioni (34) si trovasse una linea $C_{s\sigma}$ con punti multipli secondo numeri $i_1'', i_2'', \ldots, i_t''$ che soddisfacessero le equazioni (54) e (55) e fosse anche $s < n$, $i_r'' \leq i_r$, $r = 1, 2, \ldots, t$, ciascuna linea della rete determinata dalla soluzione data sarebbe il sistema della linea $C_{s\sigma}$ variabile e di h linee razionali eguali C^h_m dell' ordine m ciascuna e con punti multipli secondo $i_1', i_2', \ldots$, essendo i numeri $m, i_1', i_2', \ldots$ determinati dalle equazioni (50).

33. Applicheremo le formule (48) a risolvere una questione che è analoga a quella del (n. 23).

È data una soluzione

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t)$$

delle equazioni (34): si vuol sapere se le linee della rete determinata dalla soluzione data sono linee semplici o linee complesse, e nel caso fossero linee complesse, quali linee semplici concorrano a formarle.

Si esamini se fra le curve razionali dell' ordine $m \leq (n-3) : 2$ (n. 27. 2.°) sia qualche curva C_m che possa adempiere la prima delle condizioni (48), e ciò si faccia coll' ordine indicato nel (n. 23), incominciando, cioè, dal considerare la linea retta, poi la curva di 2.° ordine, poi quella di 3.° ordine, indi quelle di 4.° ordine ecc. Se non si trova così nessuna curva C_m che possa soddisfare la predetta equazione (48), si concluderà che le linee $L_{n\nu}$ della rete sono linee semplici; se si trovasse una curva che somministrasse l' equazione

$$(56) \qquad \Sigma i i' = mn + r,$$

si sarà certi che le linee $L_{n\nu}$ sono linee complesse e ciascuna è formata dalla curva C_m fissa ripetuta $h = 2r - 1$ volte e da un' altra linea variabile $C_{s\sigma}$ dell' ordine s e del genere σ definita dalle equazioni (54), ossia che

$$L_{n\nu} \equiv C^h_m \,.\, C_{s\sigma}, \; hm + s = n, \; \sigma = v + h.$$

La linea variabile $C_{s\sigma}$ potrebbe poi essere o una curva o una linea complessa: in ogni caso però soddisferà le equazioni (53) che si riducono alle (34) col cambiarvi $v + 1$ in v. Si potrà dunque far uso del metodo ora indicato per iscoprire se la linea $C_{s\sigma}$ sia una linea semplice ovvero una linea complessa, e in quest' ultimo

caso quali sono le linee, una razionale fissa (che potrebbe anche essere ripetuta più volte), l' altra (semplice o complessa) variabile che la formano, e così di seguito. Un tal metodo richiede si sappia quali sono per $m \leq (n-3):2$ le soluzioni delle equazioni

$$\Sigma \frac{i(i+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}, \quad \Sigma \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

equivalenti alle (42): ma, come fu avvertito nel precitato (n. 23), queste soluzioni potranno sempre essere date dalle formule (S) del (n. 1).

Esempio — Si vuol formare una rete di curve razionali, e si vuole inoltre che sia

$$i_1 = i_2 = \ldots = i_t.$$

Si dovranno trovare i numeri incogniti n, i, t. Le equazioni (34) per le condizioni del problema diventano

$$ti^2 = n^2 - 1, \quad ti = 3(n-1),$$

e da queste ricavasi

$$\frac{ti^2}{ti} = i = \frac{n+1}{3} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{3(n-1)}{t}.$$

Pongasi $n = 3\mu - 1$: onde

$$i = \mu = \frac{3(3\mu - 2)}{t}, \quad \mu = \frac{6}{9-t};$$

e quindi le seguenti soluzioni

1.ª $t = 3$, $\mu = 1$; $n = 2$, $i = 1$.
2.ª $t = 6$, $\mu = 2$; $n = 5$, $i = 2$.
3.ª $t = 7$, $\mu = 3$; $n = 8$, $i = 3$.
4.ª $t = 8$, $\mu = 6$; $n = 17$, $i = 6$.

È già noto che le prime tre soluzioni danno reti di curve razionali; e relativamente alla quarta, cercando le soluzioni delle equazioni (42) per $n = 2, 3, \ldots, 7$

ed omettendo quelle soluzioni che comprendono più di otto termini, si hanno i seguenti risultamenti:

$m = 1,\ i_1' = i_2' = 1,\ \Sigma ii' = 12 = mn - 5.$
$m = 2,\ i_1' = i_2' = \ldots = i_5' = 1,\ \Sigma ii' = 30 = mn - 4.$
$m = 3,\ i_1' = 2,\ i_2' = i_3' = \ldots = i_7' = 1,\ \Sigma ii' = 48 = mn - 3.$
$m = 4,\ i_1' = i_2' = i_3' = 2,\ i_4' = i_5' = \ldots = i_8' = 1,\ \Sigma ii' = 66 = mn - 2.$
$m = 5,\ i_1' = i_2' = \ldots = i_6' = 2,\ i_7' = i_8' = 1,\ \Sigma ii' = 84 = mn - 1.$

Anche la 4.ª soluzione rappresenta dunque una rete di curve razionali (*).

Ricerca di soluzioni che rappresentino Reti o Fasci di linee complesse.

34. Come applicazione delle teorie esposte nei capitoli precedenti diremo di un modo di trovare soluzioni delle equazioni (34) che rappresentino reti di linee complesse del genere zero. La via da seguire non sarebbe diversa se si volessero ottenere reti di linee complesse del genere 1, 2, ecc. Non ci fermeremo nella ricerca di fasci di linee complesse, perchè in ogni rete si ha già un numero infinito di fasci (n. 25): basterà perciò che accenniamo in fine come dagli esempii che saranno stati addotti di reti di linee complesse si potrebbero ricavare altrettanti esempi di fasci di linee complesse.

Per $v = o$, le equazioni (34) diventano

$$\Sigma i^2 = n^2 - 1, \quad \Sigma i = 3(n-1); \tag{57}$$

e per $v = o$, $h = 1$ le (48) si riducono alle

$$\Sigma ii' = mn + 1, \quad \Sigma ii'' = ns - 2 \tag{58}$$

Sia L_n una soluzione delle equazioni (57) e sia una linea complessa. Riguardando questa linea come un sistema di una curva razionale fissa C_m dell' ordine m e di una linea variabile $C_{s\sigma}$ si ponga

$$L_n \equiv C_m \,.\, C_{s\sigma},\ m + s = n,\ \sigma = 1.$$

(*) Ciò valga a rettificare e compiere la soluzione che del problema medesimo fu data nella Memoria — *Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni Cremoniane delle figure piane* — inserita fra le Memorie di quest' Accademia nel Tomo VIII. della Serie 3.ª a pag. 462.

Ritenute le denominazioni del (n. 31) e $h = 1$, le linee C_m e $C_{s\sigma}$ saranno definite dalle formule (46) nelle quali si dovrà porre $v = 0$, $\sigma = 1$; ossia la C_m dalle

$$\Sigma i'^2 = m^2 + 1, \quad \Sigma i' = 3m - 1, \tag{59}$$

e la $C_{s\sigma}$ dalle

$$\Sigma i''^2 = s^2 - 2, \quad \Sigma i'' = 3s - 2. \tag{60}$$

Per trovare soluzioni che rappresentino reti di linee complesse si può tenere questa via. Si cerchi se fra le soluzioni conosciute delle equazioni (59) e (60) vi fossero coppie di due soluzioni, una C_m delle equazioni (59) l' altra $C_{s\sigma}$ delle equazioni (50) che adempiessero la condizione

$$\Sigma i' i'' = ms: \tag{61}$$

trovata una coppia di tali soluzioni (e ciò che dicesi di una intendasi di ciascuna coppia) si formerà la L_n ponendo

$$i_r = i_r' + i_r'', \; r = 1, 2, \ldots, t,$$

ove t rappresenta il numero dei punti base della rete che è anche il numero delle i'' nella soluzione assunta delle equazioni (60) le quali definiscono la linea variabile (n. 31. 4°). Infatti si avrà

$$\Sigma i^2 = \Sigma i'^2 + \Sigma i''^2 + 2\, \Sigma i' i'' = n^2 - 1, \; \Sigma i = \Sigma i' + \Sigma i'' = 3\,(n - 1).$$

Ad agevolare la ricerca delle preindicate coppie di soluzioni delle equazioni (59) e (60) gioveranno le seguenti avvertenze. Sia

$$(i_1, \; i_2, \ldots, i_s, x_2 \geq 1, x_1)$$

una soluzione nota delle equazioni (57); s è il numero delle i (numeri noti) che hanno un valore non minore di 3, x_2 è il numero noto delle i che hanno il valore 2, x_1 quello parimenti noto delle i che hanno il valore 1: sarà

$$(i_1, i_2, \ldots, i_s, x_2 - 1, x_1 + 3)$$

una soluzione delle equazioni

$$\Sigma i^2 = n^2 - 2, \quad \Sigma i = 3n - 2$$

come è facile verificare.

Ciò posto, suppongasi sia

$$(62) \qquad (i_1'', i_2'' i_3'', \ldots, i_t'')$$

una soluzione nota delle equazioni (60) e che sia anche $i_1'' + i_2'' = s$; allora se si assume $m = 1$, la condizione (61) è adempita, e perciò

$$(i_1'' + 1, i_2'' + 1, i_3'', \ldots, i_t'')$$

è una soluzione delle equazioni (57) che determina una rete di linee dell' ordine $n = s + 1$ e del genere zero nella quale ogni linea L_n della rete è un sistema di una retta fissa e di una linea variabile dell' ordine $s = n - 1$ e del genere $\sigma = 1$ definita dalla soluzione (62).

Così se nella soluzione (62) fosse $i_1'' + i_2'' + i_3'' + i_4'' + i_5'' = 2s$, la soluzione

$$(i_1'' + 1, i_2'' + 1, i_3'' + 1, i_4'' + 1, i_5'' + 1. i_6'', \ldots, i_t'')$$

determinerebbe una rete di linee dell' ordine $n = s + 2$ e del genere zero formate ciascuna di una conica fissa e di una linea variabile dell' ordine s e del genere 1 definita dalla soluzione (62). E più generalmente se nella soluzione (62) fosse

$$(63) \qquad (m + 1)\, i_1'' + i_2'' + \ldots + i''_{2m+1} = ms,$$

si ponga

$$i_1 = i_1'' + m - 1, \; i_q = i_q'' + 1, \; q = 2, 3, \ldots, 2m + 1, \; i_r = i_r''. \; r = 2m + 2, \ldots, t;$$

e sarà

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_t)$$

una soluzione delle equazioni (57) e determinerà una rete di linee nella quale ciascuna linea L_n dell' ordine $n = m + s$ e del genere zero sarà formata della curva razionale fissa C_m dell' ordine m avente, nei punti base della rete, un punto multiplo secondo $i_1' = m - 1$ e $2m$ punti semplici, e di una linea variabile C_{s1} dell' ordine s e del genere 1 definita dalla soluzione (62).

Si conoscono parecchie soluzioni delle equazioni (57) (*) e se ne possono trarre nel modo sopra indicato soluzioni delle equazioni (60) che adempiano per qualche valore di m la condizione (63) e ottenere quindi reti di linee complesse. Negli esempi che seguono sono notati soltanto i risultamenti ottenuti col metodo di ri-

(*) V. Cremona — *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* — fra le Memorie di quest'Accademia nel T. V. della Serie 2.ª e anche la precit.ª Memoria — *Sulla risoluzione delle equazioni ecc.*

cerca ora dichiarato. Per rendere questi risultamenti immediatamente evidenti, si sono rappresentati i punti che determinano o che definiscono una linea secondo le seguenti convenzioni: la lettera o rappresenta un punto semplice; la lettera d un punto doppio; un punto multiplo secondo il numero i è rappresentato dalla lettera p coll' esponente i. Così una soluzione in cui si avessero per punti base della rete un punto multiplo secondo $n-2$, un punto triplo, $n-5$ punti doppi e 6 punti semplici si indicherebbe scrivendo

$$L_n \equiv p^{n-2}\, p^3\, d_1\, d_2 \ldots d_{n-5}\, o_1 \ldots o_6$$

35. Nella precedente soluzione le linee della rete sono ciascuna un sistema di una retta fissa C_1 e di una linea variabile C_{s1} dell' ordine $s=n-1$ e del genere 1 come apparisce dallo schema

$$m=1,\ s=n-1,\ n\geq 5$$

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv o_1\quad o_2 \\ C_{s1} &\equiv p^{n-3}\, d\ \ d_1 \ldots d_{n-5}\, o_1 \ldots o_6 \\ L_n &\equiv p^{n-2}\, p^3\, d_1 \ldots d_{n-5}\, o_1 \ldots o_6 \end{aligned}$$

Altri esempi di reti nelle quali ciascuna linea della rete è un sistema di una retta fissa e di una linea variabile dell' ordine $n-1$ e del genere 1 sono i seguenti:

$$m=1,\ s=2\mu,\ n=2\mu+1,\ \mu\geq 2$$

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv o_1\quad o_2 \\ C_{s1} &\equiv p^{\mu}\quad p^{\mu}\quad p^{\mu-1}\, p^{\mu-1}\, d_1 \ldots d_{\mu-2}\, o_1 \ldots o_4 \\ L_n &\equiv p^{\mu+1}\, p^{\mu+1}\, p^{\mu-1}\, p^{\mu-1}\, d_1 \ldots d_{\mu-2}\, o_1 \ldots o_4 \end{aligned}$$

$$m=1,\ s=2\mu,\ n=2\mu+1,\ \mu\geq 3$$

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv o_1\quad o_2 \\ C_{s1} &\equiv p^{\mu+1}\, p^{\mu-1}\, p^{\mu-1}\, p^{\mu-1}\, d_1 \ldots d_{\mu-3}\, o_1 \ldots o_6 \\ L_n &\equiv p^{\mu+2}\, p^{\mu}\quad p^{\mu-1}\, p^{\mu-1}\, d_1 \ldots d_{\mu-3}\, o_1 \ldots o_6 \end{aligned}$$

$$m=1,\ s=2\mu+\nu,\ n=2\mu+\nu+1,\ \mu+\nu\geq 3,\ 0\leq \nu \leq 1$$

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv o_1\qquad o_2 \\ C_{s1} &\equiv p^{\mu+\nu}\quad p^{\mu}\quad p^{\mu}\, p^{\mu+\nu-2}\, d_1 \ldots d_{\mu+\nu-3}\, o_1 \ldots o_{6-\nu} \\ L_n &\equiv p^{\mu+\nu+1}\, p^{\mu+1}\, p^{\mu}\, p^{\mu+\nu-2}\, d_1 \ldots d_{\mu+\nu-3}\, o_1 \ldots o_{6-\nu} \end{aligned}$$

Aggiungiamo qualche esempio di reti nelle quali le linee della rete sono sistemi di una conica C_2 e di una linea variabile C_{s1} dell' ordine $s = n - 2$ e del genere 1.

$$m = 2,\ s = 2\mu - 2,\ n = 2\mu,\ \mu \geq 5$$

$$\begin{array}{llllllll} C_1 & \equiv o_1 & o_2 & o_3 & o_4 & o_5 & & \\ C_{s1} & \equiv p^{\mu} & p^{\mu-2} & p^{\mu-2} & p^{\mu-2} & d & d_1 \ldots d_{\mu-5} & o_1 \ldots o_6 \\ L_n & \equiv p^{\mu+1} & p^{\mu-1} & p^{\mu-1} & p^{\mu-1} & p^3 & d_1 \ldots d_{\mu-5} & o_1 \ldots o_6 \end{array}$$

$$m = 2,\ s = 2\mu - 2,\ n = 2\mu,\ \mu \geq 5$$

$$\begin{array}{llllllll} C_2 & \equiv o_1 & o_2 & o_3 & o_4 & o_5 & & \\ C_{s1} & \equiv p^{\mu-1} & p^{\mu-1} & p^{\mu-2} & p^{\mu-2} & d & d_1 \ldots d_{\mu-5} & o_1 \ldots o_6 \\ L_n & \equiv p^{\mu} & p^{\mu} & p^{\mu-1} & p^{\mu-1} & p^3 & d_1 \ldots d_{\mu-5} & o_1 \ldots o_6 \end{array}$$

$$m = 2,\ s = 2\mu + \nu - 2,\ n = 2\mu + \nu,\ \mu + \nu \geq 5,\ 0 \leq \nu \leq 1$$

$$\begin{array}{llllllll} C_1 & \equiv o_1 & o_2 & o_3 & o_4 & o_5 & & \\ C_{s1} & \equiv p^{\mu+\nu-1} & p^{\mu-1} & p^{\mu-1} & p^{\mu+\nu-3} & d & d_1 \ldots d_{\mu+\nu-5} & o_1 \ldots o_{6-\nu} \\ L_n & \equiv p^{\mu+\nu} & p^{\mu} & p^{\mu} & p^{\mu+\nu-2} & p^3 & d_1 \ldots d_{\mu+\nu-5} & o_1 \ldots o_{6-\nu} \end{array}$$

Per non accrescere soverchiamente il numero degli esempi, ne rechiamo pochi altri che furono dedotti da una medesima soluzione delle equazioni (34) (*). In questi è indicato con m un numero intiero dispari e non minore di 3.

La soluzione

$$n = \frac{m+1}{2}\mu + 3, \qquad \mu \geq \frac{m^2-1}{8} + 1$$

$$L_n \equiv p^{\frac{m-1}{2}\mu+2} p^{\mu+2} p_1^{\mu+1} .. p_{m-2}^{\mu+1} p^{\mu-\frac{m-1}{2}} d_1 .. d_{\mu-\frac{m^2-1}{8}-1} o_1 .. o_{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+5}$$

determina una rete nella quale ciascuna linea è un sistema di una retta fissa e di una linea variabile dell' ordine $s = n - 1$ e del genere 1:

$$\begin{array}{ll} C_1 & \equiv o_1 \qquad o_2 \\ C_{s1} & \equiv p^{\frac{m-1}{2}\mu+1} p^{\mu+1} p_1^{\mu+1} .. p_{m-2}^{\mu+1} p^{\mu-\frac{m-1}{2}} d_1 .. d_{\mu-\frac{m^2-1}{8}-1} o_1 .. o_{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+5}. \end{array}$$

(*) Veggasi la Memoria cit. — *Sulla risoluzione delle equazioni ecc.* — p. 494.

La soluzione

$$n = \frac{m+1}{2}(\mu+1)+2, \qquad \mu \geq \frac{m^2-1}{2}+2$$

$$L_n \equiv p^{\frac{m-1}{2}(\mu+1)+1} \, p_1^{\mu+2} \, .. \, p_{m-1}^{\mu+2} \, p^{\mu-\frac{m-3}{2}} \, p^3 \, d_1 \, .. \, d_{\mu-\frac{m^2-1}{8}-2} \, o_1 \, .. \, o_{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+5}$$

determina una rete in cui ciascuna linea è un sistema di una curva razionale fissa dell' ordine $(m+1):2$ e di una linea variabile dell' ordine $s = n(m-1):2$ e del genere 1:

$$C_{\frac{m+1}{2}} \equiv p^{\frac{m-1}{2}} \quad o_1 \quad .. \, o_{m-1} \, o_m \quad o_{m+1}$$

$$C_{s1} \equiv p^{\frac{m-1}{2}\mu+1} \, p_1^{\mu+1} \, .. \, p_{m-1}^{\mu+1} \, p^{\mu-\frac{m-1}{2}} \, d \, d_1 \, .. \, d_{\mu-\frac{m^2-1}{8}-2} \, o_1 \, .. \, o_{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+5}.$$

La soluzione

$$n = \frac{m+1}{2}(\mu+1)+3, \qquad \mu \geq \frac{m^2-1}{8}+3$$

$$L_n \equiv p^{\frac{m-1}{2}\mu+2} \, p^{\mu+3} \, p_1^{\mu+2} \, .. \, p_{m-2}^{\mu+2} \, p^{\mu-\frac{m-3}{2}} \, p^3 \, d_1 \, .. \, d_{\mu-\frac{m^2-1}{8}-3} \, o_1 \, .. \, o_{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+8}$$

determina una rete di linee che sono ciascuna un sistema di una retta fissa, di una curva razionale dell' ordine $(m+1):2$ parimente fissa e di una linea variabile dell' ordine $s = n - (m+3):2$ e del genere 2:

$$C_1 \equiv o_1 \quad o_2$$

$$C_{\frac{m+1}{2}} \equiv p^{\frac{m-1}{2}} \quad o_1 \quad .. \, o_{m-1} \, o_m \quad o_{m+1}$$

$$C_{s2} \equiv p^{\frac{m-1}{2}\mu+1} \, p_1^{\mu+1} \, .. \, p_{m-1}^{\mu+1} \, p^{\mu-\frac{m-1}{2}} \, d \, d_1 \, .. \, d_{\mu-\frac{m^2-1}{2}-3} \, o_1 \, .. \, o_{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+8}.$$

Per dare anche un esempio di reti di linee complesse che comprendono una curva razionale fissa ripetuta più volte, esaminiamo se nell' ultima delle soluzioni precedenti la C_{s2} possa essere una linea complessa formata di una curva fissa del-

l' ordine $(m-1):2$ con un punto multiplo secondo $(m-3):2$ (n. 31. 5.°) e ripetuta h volte, e di una linea variabile $C_{s'\sigma'}$. Ciò avrà luogo (n. 33) se sia

$$\frac{m-3}{2}\left(\frac{m-1}{2}\mu+1\right)+(m-1)(\mu+1)=\frac{m-1}{2}\left(\frac{m+1}{2}\mu+2\right)+r,\ r>0\ ;$$

e in tal caso sarà $h=2r-1$: ossia riducendo

$$r=\frac{m-3}{2}>0;\quad m>3,\ h=2r-1=m-4.$$

Quindi dovendo per ipotesi essere m numero dispari non minore di 3, si hanno i seguenti risultamenti

$$1.^\circ\quad m=3$$

C_{s2} è linea semplice

$$n=2\mu+5,\quad \mu\geq 4,\quad s=2\mu+2:$$

$$L_n\equiv C_1\,.\,C_2\,.\,C_{s2},\ s+3=n:$$

onde lo schema

$$\begin{array}{llllllll}
C_1 & \equiv o_1 & o_2 \\
C_2 & \equiv o_1 & o_2 & o_3 & o_4 & o_5 \\
C_{s2} & \equiv p^{\mu+1} & p^{\mu+1} & p^{\mu+1} & p^{\mu-1} & d & d_1\,..\,d_{\mu-4} & o_1\,..\,o_9 \\
L_n & \equiv p^{\mu+3} & p^{\mu+3} & p^{\mu+2} & p^{\mu} & p^3 & d_1\,..\,d_{\mu-4} & o_1\,..\,o_9
\end{array}$$

$$2.^\circ\quad m=5,\ h=1$$

$$C_{s2}\equiv C_2\,.\,C_{s'\sigma'},\ s'+2=s,\ \sigma'=2+1$$

$$n=3\mu+6,\ \mu\geq 6,\ s'=3\mu,\ \sigma'=3$$

$$L_n\equiv C_1\,.\,C_2\,.\,C_3\,.\,C_{s'\sigma'},\ s'+6=n$$

$$\begin{array}{lllllllll}
C_1 & \equiv o_1 & o_2 \\
C_2 & \equiv o_1 & o_2 & o_3 & o_4 & o_5 \\
C_3 & \equiv d & o_1 & o_2 & o_3 & o_4 & o_5 & o_6 \\
C_{s'\sigma'} & \equiv p^{2\mu} & p^{\mu} & p^{\mu} & p^{\mu} & p^{\mu} & p^{\mu-2} & d & d_1\,..\,d_{\mu-6}\ o_1\,..\,o_{12} \\
L_n & \equiv p^{2\mu+4} & p^{\mu+3} & p^{\mu+2} & p^{\mu+2} & p^{\mu+2} & p^{\mu-1} & p^3 & d_1\,..\,d_{\mu-6}\ o_1\,..\,o_{12}
\end{array}$$

3.° $m = 7,\ h = 3$

$$C_{s2} \equiv C_3^{\,3} \,.\, C_{s'\sigma'},\ s' + 9 = s,\ \sigma' = 2 + 3$$

$$n = 4\mu + 7,\ \mu \geq 9,\ s' = 4\mu - 7,\ \sigma' = 5$$

$$L_n = C_1 \,.\, C_3^{\,3} \,.\, C_4 \,.\, C_{s'\sigma'},\ s' + 14 = n$$

$$\begin{array}{ll}
C_1 & \equiv o_1 \quad o_2 \\
C_3 & \equiv d \quad o_1 \quad o_2 \quad .. \ o_6 \\
C_3 & \equiv d \quad o_1 \quad o_2 \quad .. \ o_6 \\
C_3 & \equiv d \quad o_1 \quad o_2 \quad .. \ o_6 \\
C_4 & \equiv p^3 \quad o_1 \quad o_2 \quad .. \ o_6 \quad o_7 \quad o_8 \\
C_{s'\sigma'} & \equiv p^{2\mu-5}\ p^{\mu-2}\ p_1^{\ \mu-2}\ ..\ p_5^{\ \mu-2}\ p^{\mu-3}\ d\ \ d_1\ ..\ d_{\mu-9}\ o_1\ ..\ o_{17} \\
L_n & \equiv p^{2\mu+5}\ p^{\mu+3}\ p_1^{\ \mu+2}\ ..\ p_5^{\ \mu+2}\ p^{\mu-2}\ p_3\ d_1\ ..\ d_{\mu-9}\ o_1\ ..\ o_{17}
\end{array}$$

E così di seguito si potrebbero esprimere le soluzioni e formare gli schemi corrispondenti a $m = 9, 11, \ldots$ cui corrispondono i valori $h = 5, 7, \ldots$

35. Termineremo coll' avvertire che se nelle soluzioni L_n del (n. prec.) si aggiungerà ai punti base della rete un punto o semplice pel quale debba passare la linea variabile, si otterranno altrettante soluzioni determinanti ciascuna un fascio di linee nel quale ogni linea del fascio è il sistema di quelle medesime curve che compongono le linee della rete corrispondente (n. 25).

OSSERVAZIONI COMPARATIVE

INTORNO

ALLA STRUTTURA DELLE ULTIME DIRAMAZIONI

DELLE

ARTERIE PULMONARI

NOTA

Del Dott. GIAN PIETRO PIANA

(Letta nella Sessione del 22 Aprile 1880).

Oggetto della presente Nota è quello di descrivere una particolare disposizione di struttura da me osservata nella tonaca muscolare delle piccole arterie pulmonari nei bovini, negli ovini e nei suini.

È noto che i sottili rami arteriosi sono costituiti da quattro tonache: cioè da una interna endoteliale, da una elastica, da altra muscolare e dall' adventizia. La tonaca endoteliale è formata da cellule di forma lamellare e allungata, disposte nel senso della lunghezza del vaso, e collocate in modo che l' estremità di ciascuna di esse si trova nello spazio triangolare lasciato da due altre cellule vicine. L' elastica è un' esile membranella omogenea, molto rifrangente la luce, che ha la tendenza a formare delle increspature dirette secondo la lunghezza del vaso. La muscolare è formata da fibrocellule poste trasversalmente all' asse del vaso e incurvate in modo da foggiarsi sopra la forma del vaso stesso. In quanto alla disposizione di queste fibrocellule muscolari, da H. Müller (nel Trattato d' Istologia umana del Kölliker, I Edizione italiana sulla IV tedesca — pag. 457) e da Ranvier (nel Traitè technique d' Histologie — pag. 556) è stato notato che è ad elica. Ciò si deduce dal fatto che i nuclei delle fibrocellule sono posti l' uno vicino all' altro in una linea che avvolge il vaso in modo da descrivere una spira. L' adventizia è costituita ordinariamente da solo tessuto connettivo, le cui cellule sono allungate nel senso della lunghezza del vaso.

In quanto a singolarità di struttura della tonaca muscolare non so che ne sia nota altra che quella osservata da F. Lister (nel Kölliker, opera citata): cioè che le fibrocellule muscolari delle più piccole arterie della membrana digitale della rana, in una lunghezza di $^1/_{100}$ a $^1/_{200}$ di pollice sono avvolte a spirale una volta

e mezzo fino a due volte intorno alla membrana intima, e che tali fibrocellule formano in semplice strato tutta la muscolare.

Venendo ora alle mie osservazioni sopra alle piccole arterie pulmonari, mi limiterò a descrivere minutamente solo quelle fatte sopra ai bovini, essendo in questi animali più spiccata la particolarità da me rilevata.

Scoperto colla dissezione una piccola arteria nell' interno di uno dei lobuli pulmonari di un bovino ed asportatala colle forbici, unitamente ad una certa quantità di parenchima, si riesce poi, strappando pazientemente cogli aghi le vescicole pulmonari, a ripulirla unitamente ad alcune delle sue ultime diramazioni. — Quest' arteria così ripulita si presta ad essere sottoposta all' esame microscopico, immersa nell' ordinaria soluzione di cloruro di sodio, o pure anche nella glicerina e nel balsamo del Canadà, quando sia stata convenientemente colorita colla tintura carminica.

All' esame microscopico di queste arterie si nota che le fibrocellule non formano una tonaca muscolare continua, ma invece fanno degli anelli che circondano il lume del vaso, posti ad una certa distanza fra di loro, e inoltre degli esili fascetti che decorrendo obliquamente attorno al lume del vaso e tutti nella stessa direzione, congiungono fra di loro i diversi anelli (Fig. 1).

Questa particolarità la si comincia ad osservare nelle arteriuzze di $\frac{1}{4}$ di millimetro di diametro ed è manifesta fino alle piccolissime che si diramano in capillari, se non che in queste gli anelli e i fasci di congiunzione sono proporzionatamente più esili. Nelle arterie alquanto più grosse (di mezzo millimetro di diametro) la tonaca muscolare presentasi di tratto in tratto assottigliata: e in corrispondenza alle diramazioni lascia due interruzioni di forma triangolare, una per lato del punto di biforcazione. Di mano in mano che si procede all' esame di rami più sottili, gli assottigliamenti della muscolare si fanno più pronunciati, fino al punto che divengono vere interruzioni.

Nelle piccole arteriuzze comprese per un tratto alquanto considevole della loro lunghezza in una sezione microscopica del pulmone, si osserva pure come esse non abbiano tonaca muscolare continua, e come invece di questa, quando il foco del microscopio cade nel mezzo dal vaso, si trovino le sezioni trasversali dei fasci di fibrocellule che formano gli anelli muscolari (Fig. 2). Queste sezioni trasversali si presentano di forma ellissoide il cui maggior diametro è posto secondo la lunghezza del vaso. Il canale vasale in corrispondenza agli anelli è oltremodo ristretto in causa del corrugamento prodotto dall' alcool sugli anelli stessi.

Questa particolarità di struttura riesce anche più evidente nelle sezioni microscopiche di pulmone in cui i vasi siano stati iniettati con una massa trasparente, colorita debolmente in turchino. — I fasci di fibrocellule che formano gli anelli, per la distenzione prodotta dalla massa da iniezione, subiscono alcuni mutamenti nella loro forma, che li rendono anche più interessanti. In queste sezioni si osservano cioè le piccole arterie molto turgide, e che presentano il loro canale, di

tratto in tratto, traversato da diafragmi aventi un pertugio circolare nel loro centro. Nella Fig. 3.ª alla lettera *a, a,* è rappresentato un ultimo ramoscello arterioso in cui appunto si veggono questi diafragmi quasi fino all' origine dei vasi capillari; e alla lettera *b,* la sezione trasversa della piccola arteria da cui ha origine il piccolo ramoscello: in essa si vede di faccia un diafragma che restringe di oltre due terzi il lume del vaso. A forte ingrandimento si vede come tutti questi diafragmi sieno costituiti da fibrocellule muscolari e che quindi altro non sono che gli anelli da prima descritti (Fig. 4.ª).

Per accertarmi che questa singolare struttura delle arterie pulmonari dei bovini è un fatto normale, anzichè un' alterazione dovuta a qualche condizione patologica, feci l' esame delle arterie pulmonari anche in un vitello, non essendo ammissibili nei giovani animali tali condizioni patologiche. Colla Fig. 5.ª ho rappresentato appunto una di queste arterie che manifestamente offrono la stessa particolarità di struttura.

Compite queste osservazioni sopra i bovini, feci l' esame comparativo sopra gli altri mammiferi domestici e anche sopra l' Uomo, valendomi per tutti delle iniezioni, che rendono molto più agevole la ricerca. Solo nel Majale e nella Pecora riscontrai la stessa struttura trovata nel Bue, ma assai meno pronunciata. I fasci di fibrocellule che formano gli anelli erano assai più esili e meno sporgenti nel lume del vaso: in oltre questa speciale struttura era limitata ad arterie più sottili che quelle del bue.

Nell' Uomo, nel Cavallo, nel Cane, nel Gatto, nel Coniglio, trovai le fibrocellule delle piccole arterie pulmonari disposte come nelle piccole arterie di altre parti; cioè in modo da formare una tonaca muscolare continua.

Quale influenza può avere sopra la circolazione del sangue la speciale struttura delle piccole arterie pulmonari dei ruminanti domestici e del Majale? — Quando si rifletta che la corrente del sangue, nel passare attraverso al pulmone di questi animali, deve incontrare i restringimenti del lume dei piccoli vasi prodotti da quella specie di sfinteri o anelli di fibrocellule muscolari, si comprende di leggeri essere necessario che superi un ostacolo onde vincere la coesione intima della massa sanguigna, e che quindi dovrà consumare una parte della forza d' impulsione per la quale progredisce. In oltre la parete vasale, nei tratti in cui si trova sprovista di fibrocellule, deve presentare una resistenza minore alla pressione del sangue. Per questi fatti quindi sono indotto a credere che questa struttura abbia l' ufficio di moderare la velocità della corrente del sangue attraverso alla rete capillare delle vescicole pulmonari.

In condizioni patologiche poi la stessa particolarità di struttura parmi possa diventare causa di gravi complicazioni morbose facilitando la formazione di piccoli trombi; anzi molto probabilmente sono ad essa dovute le gangrene circoscritte di porzioni del parenchima pulmonare, che con frequenza si osservano nei bovini.

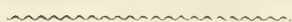
Avanti di por fine a questa nota mi piace fare una considerazione, che forse non manca di un certo interesse per l'istologia e la fisiologia dei vasi. Dal fatto di trovarsi tra un anello muscolare e l'altro un fascetto di fibrocellule muscolari che decorre obliquamente e sempre nella stessa direzione attorno al lume del vaso, parmi se ne possa dedurre che gli anelli muscolari risultino formati da parecchi giri sovraposti del detto fascetto di congiunzione: ossia che la parete muscolare in questi vasi sia rappresentata dal detto fascetto, il quale descrive dei giri di spira ora svolti, ora serrati e sovrapposti, in modo da formare come una serie di sfinteri lungo il lume del vaso. Se questa mia interpretazione è esatta, forse si può ammettere che anche nei vasi in cui la tonaca muscolare è continua, questa sia da considerarsi come formata ugualmente da un fascetto di fibrocellule, il quale non differirebbe da quello delle piccole arterie pulmonari, se non per essere i giri che descrive attorno al lume del vaso tutti serrati fra di loro in modo da non lasciare alcuna parte della parete vasale sprovista di fibrocellule muscolari — Questa interpretazione dell'andamento e della disposizione delle fibrocellule muscolari dei vasi è ben diversa da quella ammessa da Müller e da Ranvier (opere citate), poichè essi per disposizione ad elica altro non intendono significare che la situazione che ha ogni singola fibrocellula rispetto alle vicine, e non già l'andamento che risulta dal loro insieme.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1.ª Ultime diramazioni di una arteria pulmonare di bue — (ingrandimento di 100 diametri).

Fig. 2.ª Piccola arteria pulmonare di bovino sezionata per lo lungo — (ingrandimento di 100 diametri).

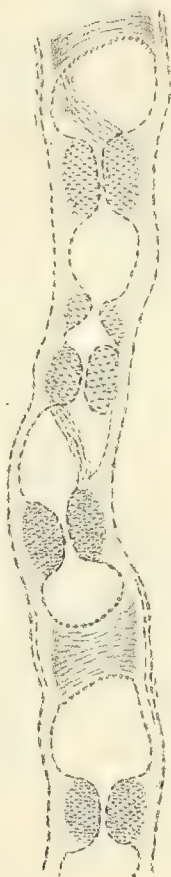
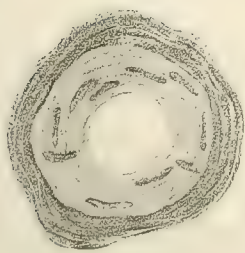
Fig. 3.ª Ultime diramazioni di una piccola arteria pulmonare di bue riempite da una massa da iniezione — (ingrandimento di 100 diametri.

Fig. 4.ª Piccolo ramo di una arteria pulmonare di bovino sezionato trasversalmente — (ingrandimento di 350 diametri).

Fig. 5.ª Ultime diramazioni di un'arteria pulmonare di vitello — (ingrandimento di 350 diametri.

Dot. Piana dis.e

C. Bettini di in pietra

Lit. G. Wenk.

CONTRIBUZIONE

ALLA CONOSCENZA DELLA STRUTTURA E DELLA FUNZIONE

DELL' ORGANO DEL JACOBSON

NOTA

Del Dott. GIAN PIETRO PIANA

(Letta nella Sessione del 22 Aprile 1880).

È già noto per un pregievolissimo lavoro del Bologh (1) che l' organo del Jacobson deve considerarsi come una dipendenza di quello dell' olfatto, non solo pei suoi nervi (il che era già dimostrato per opera dello scopritore (2)) ma ancora pei caratteri istologici della sua mucosa. Però la funzione speciale e il modo di entrare in azione di quest' organo, si possono considerare del tutto sconosciuti: poichè in proposito non si hanno che vaghe congetture.

Esso è formato da due canali, uno per parte, situati inferiormente e anteriormente al setto nasale; i quali nella parte posteriore terminano a fondo cieco e nell' anteriore si aprono nei canali di Stenson. Questi canali di Stenson in molti animali mettono in comunicazione le fosse nasali colla cavità boccale; in alcuni però terminano pur essi a fondo cieco verso il palato.

Ognuno dei canali dell' organo di Jacobson è formato esternamente da un astuccio cartilagineo, ed internamente da una mucosa. La mucosa si può distinguere in due parti, una che corrisponde all' interno, ossia al setto del naso, l' altra all' esterno. Le superficie libere di queste due parti della mucosa sono fra di loro avvicinate in modo da combaciare.

(1) Das Jacobson' sche Organ des Schafes — Von Dr. Coloman Balogh. Vorgelegt in der Sitzung vom 3 November 1860. Sonder-Abdruch aus dem XLII Bd. der Sitzungsb. der kais. Akad. der Wissenchaften. Wien.

(2) Rapporto di Cuvier della memoria del Jacobson — Déscription anatomique d' un organe observé dans les Mammiféres — presentata all' Accademia di Francia. (Annales du Muséum d' Histoire naturelle, Vol. XVIII. Paris 1811).

Per questa conformazione dell' organo di Jacobson, e per non possedere esso alcun mezzo speciale che valga ad introdurre l' aria nell' interno dei canali formati dalla sua mucosa, riesce oltremodo difficile a comprendersi come le particelle odorifere possano giungere a contatto delle sue cellule olfattorie.

Egli è certamente in considerazione di questo fatto che i trattatisti di Anatomia e di Fisiologia comparata, (Chauveau, Leyh, Gegenbaur, Colin, Huxley, ecc.) assai brevemente si occupano di quest' organo; e in quanto alla sua funzione azzardano semplicemente l' ipotesi che esso abbia l' ufficio di ricevere le impressioni odorifere degli alimenti contenuti nella cavità della bocca durante la masticazione. E ciò ammettono pel fatto della comunicazione dell' organo di Jacobson colla cavità boccale mercè i canali di Stenson.

Contro quest' ipotesi però sta il fatto che nei solipedi i canali di Stenson non arrivano ad aprirsi nel palato: ed inoltre io posso aggiungere, che nei roditori l' organo di Jacobson si apre direttamente nelle fosse nasali senza contrarre alcun rapporto coi canali di Stenson.

Le mie ricerche fatte sopra parecchi animali, allo scopo di scoprire per quale meccanismo l' aria venga rinnovata nell' interno dell' organo di Jacobson, mi condussero a qualche risultato solo in alcuni roditori e specialmente nel Coniglio. Infatti in questo animale l' organo in discorso è proveduto di uno speciale apparecchio, consistente in un invoglio di fibre elastiche attorno alla mucosa, il quale colla sua azione tende a restringere il canale da essa limitato; ed in oltre da fibrocellule muscolari disposte in modo, che dal loro contrarsi il lume dello stesso canale viene dilatato.

Queste mie osservazioni valendo a spiegare, come almeno in alcuni animali l' organo di Jacobson possa funzionare, oso sperare che riesciranno gradite ai cultori l' Anatomia e la Fisiologia comparata.

Disgiungendo pazientemente le ossa della faccia di un coniglio, si riesce ad avere isolato l' organo di Jacobson unitamente al setto nasale. Messo poscia per alcuni giorni in macerazione nell' alcool debole le dette parti, con facilità si può distaccare la mucosa dal setto e così scoprire l' organo di Jacobson, i fasci nervosi e i vasi che ad esso organo vanno (Fig. 1.ª e 2.ª, *a, a*).

Le sezioni microscopiche trasversali dell' organo di Jacobson, che meglio dimostrano l' apparecchio superiormente indicato, sono quelle eseguite verso la parte posteriore a due quinti dalla sua estremità.

Colla Fig. 3.ª ho delineata appunto una di queste sezioni comprendente entrambi i canali dell' organo. Il disegno di uno dei canali è semplicemente abbozzato e porta le lettere indicanti le varie parti. Così le lettere *t m,* indicano il tessuto muscolare, le cui fibrocellule da una parte si inseriscono alla superficie interna dell' astuccio cartilagineo *(ac)*, e dall' altra al derma della mucosa del lato esterno *(m e)*, o più propriamente all' invoglio di fibre elastiche della detta mucosa, il quale nella figura è rappresentato da quella linea oscura. Fra questo tessuto muscolare si trovano molte ed ampie lacune vascolari *(l v),* le quali col contrarsi

delle fibrocellule debbono necessariamente venire vuotate del sangue che contengono, e così favorire pur esse la dilatazione del canale. Fra questo tessuto muscolare si trova pure la sezione trasversale di un ramoscello del trigemino *(5)*. Nella mucosa del lato interno *(m i)* si trovano molte sezioni oblique di fasci nervosi (*1*, *1*, *1*,) provenienti dalla clava olfattiva. Nel derma invece della mucosa del lato esterno *(m e)*, si trova una piccola glanduletta mucosa che si apre alla superficie libera della mucosa stessa. — Tanto nella commessura superiore che nell' inferiore delle due porzioni della mucosa mettono capo delle grosse glandule mucose *(g s*, *g i)*: quelle che mettono nella commessura superiore sono molto più sviluppate *(g s)* e protrudono in gran parte da una interruzione che l' astuccio cartilagineo lascia superiormente.

Colla figura 4.ª ho rappresentato a più forte ingrandimento la sezione trasversa delle due superficie libere della mucosa, le quali si trovano l' una dirimpetto all'altra. Le lettere *i n t*, indicano la porzione della mucosa del lato interno, il cui epitelio è analogo a quello della regione olfattiva della mucosa nasale, poichè in esso si trovano in grandissima quantità delle cellule olfattive *(c)*. Nel derma di questa mucosa si trovano molte fibre nervee pallide, e dei vasi capillari; alcuni dei quali formano delle anse che si insinuano fra le cellule olfattive dell' epitelio *(v)*. Le lettere *e s t*, invece indicano la superficie della mucosa del lato esterno. L'epitelio di questa mucosa è analogo a quello delle altre parti della mucosa nasale.

Onde vie meglio dimostrare le differenze che presenta l' epitelio della mucosa dell' organo di Jacobson del Coniglio, a seconda che si considera nella porzione del lato interno od in quella del lato esterno, colle figure 5,ª 6ª e 7ª ho rappresentato a forte ingrandimento alcune delle sue cellule isolate colla macerazione nel liquido di Müller. Così nella figura 5ª sono disegnate delle cellule epiteliali della mucosa del lato interno; e nella figura 6ª delle cellule olfattive della stessa porzione della mucosa. Colla figura 7ª invece ho figurate le cellule epiteliali della mucosa del lato esterno.

Non istarò ora ad indicare minutamente tutte le particolarità che si veggono nelle diverse sezioni fatte lungo tutto l' organo di Jacobson del Coniglio e degli altri animali da me esaminati, ma mi limiterò ad esporre in modo riassuntivo le osservazioni comparative che credo di maggiore rilievo.

I. Nel Coniglio, nel Lepre e nella Cavia, l' organo di Jacobson non mette come fa negli altri animali nei canali di Stenson, ma si apre direttamente nella parte anteriore ed inferiore delle fosse nasali, ai lati del setto ed alquanto al davanti dell' apertura dei suddetti canali di Stenson (1).

(1) Io potei accertarmi di questo fatto coll' esame di sezioni microscopiche fatte in corrispondenza all' apertura dell' organo di Jacobson. L' egregio mio collega ed amico, il Dott. Francesco Peli riescì poscia con molta pazienza ad introdurre dalle narici una setola nel canale dell' organo stesso di un coniglio.

II. La mucosa dell' organo di Jacobson del Coniglio e del Lepre, dal lato esterno è involta da uno strato di fibre elastiche.

III. Interposto a questo strato di fibre elastiche e all' astuccio cartilagineo si trova una massa di tessuto muscolare a fibrocellule. Le fibrocellule di questo tessuto sono disposte a raggi e si inseriscono per una parte alla superficie dell' astuccio, e per l' altra all' invoglio di fibre elastiche della mucosa.

IV. Nello spessore di questo tessuto muscolare si trovano molte ed empie lacune vascolari.

V. La mucosa dell' organo di Jacobson anche nei roditori è innervata da fasci provenienti dalla clava olfattiva e da un sottil ramoscello del trigemino.

VI. I fasci nervosi provenienti dalla clava olfattiva si distribuiscono tutti al lato interno dell' organo di Jacobson ; e il ramoscello del trigemino al lato esterno.

VII. L' epitelio che tappezza la mucosa dell' organo di Jacobson di tutti gli animali da me esaminati (Bue, Cavallo, Majale, Pecora, Cane, Gatto, Talpa, Riccio, Coniglio, Lepre, e Cavia) si distingue in quasi tutta la lunghezza del canale in due porzioni, l' una corrispondente al lato interno, analoga all' epitelio della regione olfattiva ; l' altra al lato esterno, analoga all' epitelio delle altre parti delle fosse nasali.

VIII. Le glandule della mucosa dell' organo del Jacobson nel Coniglio si distinguono nettamente in tre categorie : 1.ª glandule che mettono nella commessura superiore delle due porzioni della mucosa ; 2.ª glandule che mettono nella commessura inferiore ; 3.ª glandule che mettono nella superficie della porzione esterna della mucosa. Le prime sono sviluppatissime, quelle della seconda categoria lo sono meno, e quelle della terza all' opposto sono piccolissime.

IX. Nell' organo di Jacobson della Cavia esistono pure fibrocellule muscolari ; le quali però non sono disposte a raggi come nel Coniglio, ma invece sono disposte intorno alle lacune vascolari.

X. Nei ruminanti, nei pachidermi e nei carnivori da me esaminati, in posto delle fibrocellule muscolari, si trova un tessuto connettivo fascicolare piuttosto molle.

XI. Nel Pipistrello (Vespertilio Murinus) l' organo di Jacobson è rappresentato semplicemente da due cilindretti cartilaginei, che sono un rudimento degli astucci cartilaginei. Manca in questo animale ogni traccia di mucosa.

XII. L' organo di Jacobson del Cavallo e del Bue, adulti, è scarsamente fornito di cellule olfattive, (Fig. 8.ª e 9.ª): mentre nel puledro e nel vitello come in tutti gli altri animali, ne è riccamente fornito.

XIII. Nel Delfino (Delphinus Tursio, Fabric.) esistono due canali tubulari di forma semicircolare situati uno per lato della faccia e che circondano lo sfiatatojo. Essi nella loro parte mediana comunicano col detto sfiatatojo e nelle estremità terminano a fondo cieco. Sono costituiti da una tonaca fibrosa all' esterno e da una mucosa all' interno. Questa mucosa presentasi tutta increspata e il suo derma è fornito di piccole papille ed è privo di glandule; l' epitelio che la riveste è pavimentoso stratificato. — Questi canali forse possono venire considerati come omologhi dell' organo di Jacobson (1).

Da questa serie di fatti a mio avviso ne emerge:

1.° Che l' organo di Jacobson non ha l' ufficio di percepire le impressioni odorifere degli alimenti contenuti nella cavità della bocca;

2.° Che per molti animali rimane ancora molto difficile a comprendere come possa funzionare, quantunque in alcuni sia pure riccamente provvisto di cellule olfattive;

3.° Che però nei roditori esistono condizioni di struttura speciali che favoriscono il contatto delle particelle odorifere colle cellule olfattive dell' organo. Così nel Coniglio, combinandosi l' azione antagonistica di fibre elastiche e di fibro-cellule muscolari, esso organo può benissimo eseguire dei movimenti d' aspirazione e d' espirazione, coi quali viene favorita l' introduzione e l' espulsione dell' aria nell' in-

(1) Debbo alla squisita gentilezza del carissimo amico Dott. Ferruccio Tartuferi l' avere potuto estendere le mie indagini nel Delfino avendomi esso graziosamente regalate ben quattro teste di questi animali. Di ciò gli rendo quelle grazie che posso maggiori.

L' esame anatomico di una di queste teste lo praticai in compagnia dell' accuratissimo Dottor Francesco Peli insegnante di Anatomia Veterinaria.

A. Kölliker, in una nota intorno all' organo di Jacobson nell' Uomo, letta alla facoltà di Würzburg dice che Darsy nel 1869 descrisse nell' Uomo un canale a fondo cieco che riguardò come un analogo dell' organo di Jacobson. Egli poi descrive questo canale in quattro embrioni e in parecchi individui adulti. In questi lo trovò più costante dei canali di Stenson. Considera quest' organo come rudimentario e senza alcuna funzione (Schmidt' s Jahrbücher Lipsia 1878).

In una testa d' uomo, fra alcune altre nelle quali io ricercai inutilmente l' organo di Jacobson e i canali di Stenson, trovai nella parte anteriore ed inferiore delle fossa nasali due infondibuli, uno per lato al setto delle narici, imbutiformi, che approfondandosi in una incavatura del tessuto osseo si dirigevano verso l' estrema parte anteriore del palato, in vicinanza della quale terminavano a fondo cieco. La mucosa di questi due infondibuli era fornita di glandole mucose, ed era per struttura in tutto simile alla schneideriana. Questi infondibuli, per la loro ubicazione, sono indotto a considerarli come un residuo dei canali di Stenson anzi che un rudimento dell' organo di Jacobson.

Ricercando poi in embrioni di bue e di coniglio lo sviluppo dei canali di Stenson e dell' organo di Jacobson, potei convincermi che la formazione di queste due parti è reciprocamente indipendente. L' organo di Jacobson si inizia con due infossamenti epiteliali, uno per lato al setto nasale; mentre che i canali di Stenson risultano dalla fusione incompleta dei processi mascellari col processo nasale, in corrispondenza alla parte anteriore del palato.

terno del canale. E nella Cavia, quantunque le fibrocellule siano disposte attorno alle lacune vascolari, indirettamente tendono pur esse a dilatare il lume del canale dell' organo, costringendo le lacune stesse.

4.° Che è probabile che l' organo di Jacobson nei roditori sia un ausiliario a quello dell' olfatto; e che entri in azione solo in alcune speciali circostanze, nelle quali si richieda squisitezza sensitiva molto maggiore di quella della regione olfattiva delle fosse nasali.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1.ª Organo di Jacobson di coniglio aderente al setto nasale, visto nella sua faccia inferiore (in proporzioni doppie del vero).

a, *a* Organo di Jacobson.

f Setto nasale.

Fig. 2.ª Setto nasale spogliato della sua mucosa, e coll' organo di Jacobson visto lateralmente (in proporzioni doppie del vero).

a Organo di Jacobson.

b Glandule mucose che protrudono dall' astuccio cartilagineo.

c Nervi provenienti dalla clava olfattiva che vanno all' organo di Jacobson.

d Ramo arterioso iniettato che va all' organo di Jacobson accompagnato da un sottil ramo nervoso del trigemino.

f Setto nasale.

Fig. 3.ª Sezione trasversale dell' organo di Jacobson di coniglio eseguita alquanto più posteriormente della parte mediana dell' organo stesso (ingrandimento di 50 diametri).

a c Astuccio cartilagineo.

t m Tessuto muscolare.

l v Lacune vascolari.

m i Mucosa del lato interno od olfattiva.

m e Mucosa del lato esterno con piccole glandule mucose.

g s Grandi glandule mucose della commessura superiore delle due porzioni della mucosa.

g i Glandule mucose della commessura inferiore.
1.° Fasci nervosi provenienti dalla clava olfattiva tagliati obliquamente.
5.° Ramuscello del trigemino.

Fig. 4.ª Sezione verticale delle due superficie della mucosa dell' organo di Jacobson di Coniglio (ingrandimento di 500 diametri).
int Superficie del lato interno od olfattiva.
b Strato dei nuclei delle cellule epiteliali.
c Strato dei corpi delle cellule olfattive.
e Derma della mucosa.
f Fibre nervee pallide.
v Ansa vascolare che si insinua fra le cellule olfattive.
est Superficie del lato esterno.
c Strato epiteliale.
p Derma.

Fig. 5.ª Cellule epiteliali della porzione olfattiva dell' organo di Jacobson di Coniglio (ingrandimento di 800 diametri).

Fig. 6.ª Cellule olfattive della mucosa del lato interno dell' organo di Jacobson di Coniglio (ingrandimento di 800 diametri).

Fig. 7. Cellule epiteliali della mucosa del lato esterno dell' organo di Jacobson di Coniglio (ingrandimento di 800 diametri.

Fig. 8.ª Sezione verticale della porzione olfattiva della mucosa dell' organo di Jacobson del Bue (ingrandimento di 300 diametri).
a Strato delle estremità libere delle cellule epiteliali ed olfattive.
b Strato dei nuclei delle cellule epiteliali.
c Strato dei corpi delle cellule olfattive.
d Strato nucleare sottostante, che poggia immediatamente sopra la membrana fondamentale.
e Derma della mucosa.

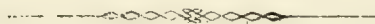
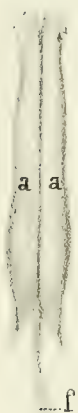
Fig. 9.ª Sezione verticale della porzione olfattiva della mucosa dell' organo di Jacobson del Cavallo trattata col cloruro d' oro ecc. (ingrandimento di diametri 550). Le cellule olfattive dello strato epiteliale e i filamenti nervosi sono venuti intensamente colorati dalla reazione.

Diversi tentativi da me fatti colla reazione del cloruro di oro, seguendo diversi metodi, sopra porzioni di organo di Jacobson di Bue, di Cavallo e di Co-

niglio, solo nell' organo di Jacobson del Cavallo ottenni un lodevole risultato. Piccole porzioni di quest' organo fresco, dopo averle delicatamente spogliate dell' astuccio cartilagineo con un rasoio bene affilato, le immersi in una soluzione di cloruro di oro ($^1/_3$ per $^0/_0$) e ve le lasciai per circa 18 ore; poscia le passai e le tenni per circa 30 ore nell' acqua leggiermente acidulata coll' acido acetico. Dopo l' indurimento ottenuto poi coll' alcool, queste porzioni di organo di Jacobson si prestarono ad essere sezionate in esilissime fettoline. Fra i preparati che feci, quelli che meglio si conservono, li ottenni tenendo chiuse queste sezioni nella glicerina per parecchi giorni, e poscia passandole nel balsamo del Canadà.

Fig. 10.ª Alcuni elementi disgregati dell' epitelio della porzione olfattiva della mucosa dell' organo di Jacobson di Bue (ingrandimento di 500 diametri).
a Cellule epiteliali.
b Cellula olfattiva.

Fig. 11.ª Sezione orizzontale eseguita alla superficie dell' epitelio della porzione olfattiva della mucosa dell' organo di Jacobson di Bue trattata colla soluzione di acido osmico (ingrandimento di 800 diametri).
a estremità delle cellule epiteliali.
b estremità delle cellule olfattive.

Fig. 12.ª Brano di membrana fondamentale dell' epitelio della porzione olfattiva della mucosa dell' organo di Jacobson di Bue (ingrandimento di 800 diametri). Essa è ancora in parte ricoperta dallo strato nucleare. Dove i nuclei vennero spostati dal pennello si notano delle specie di nicchie che corrispondono al luogo occupato da ciascun nucleo. E fra queste nicchie si trovano dei minutissimi forellini, che corrispondono molto probabilmente al luogo di passaggio delle estremità dei filamenti nervosi, che si congiungono colle cellule olfattive.

Dott. Piana dis.°

C. Bet

G.P.Piana

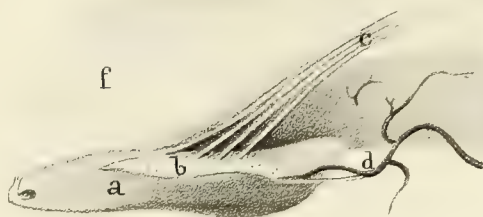
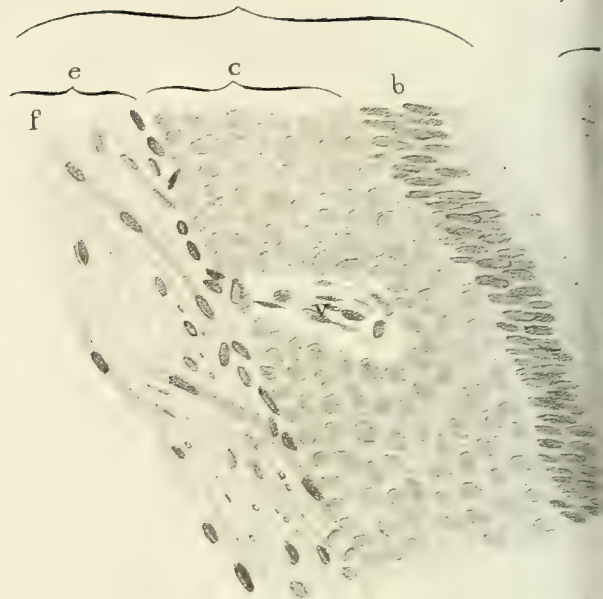
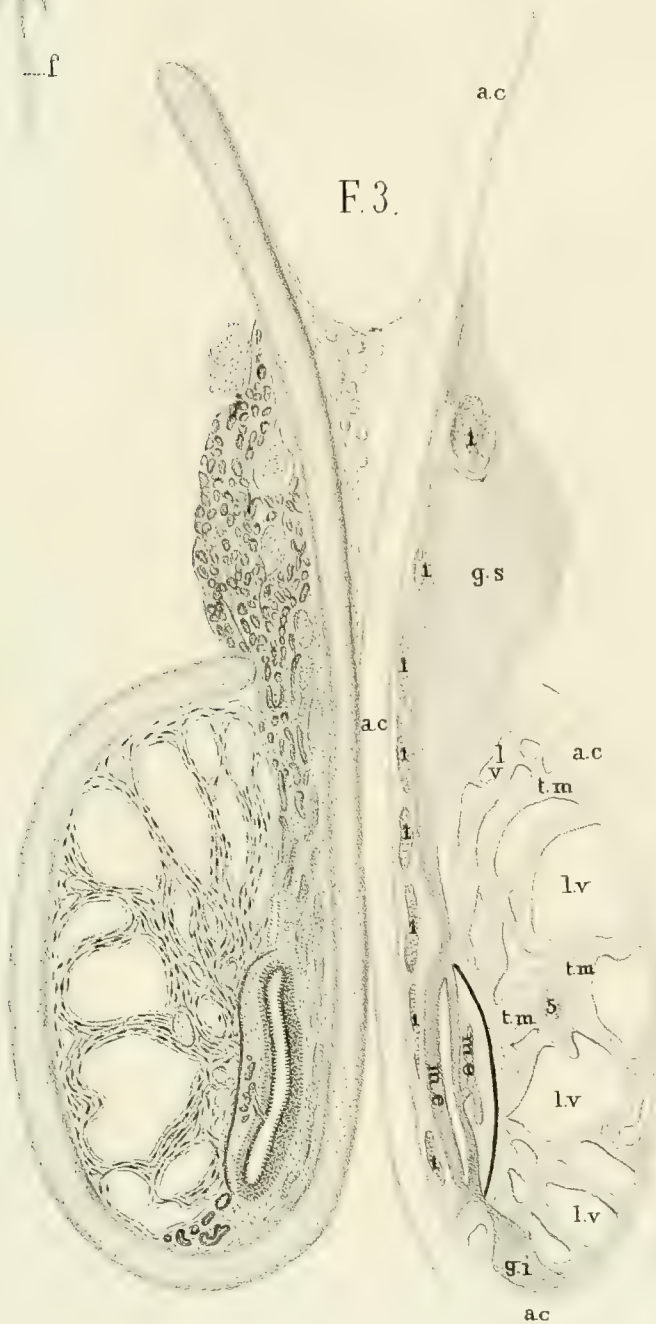
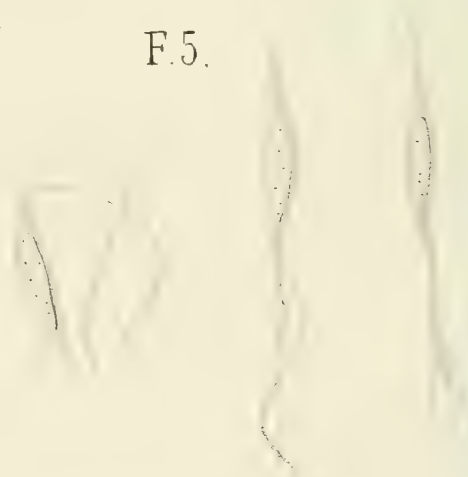
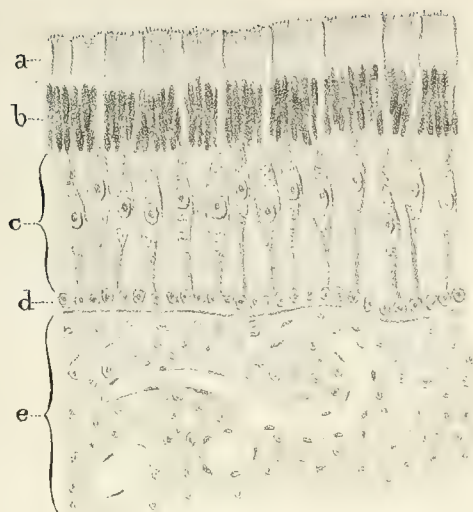
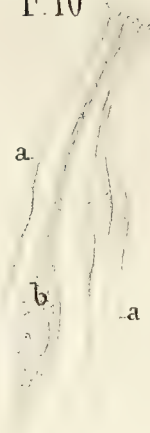
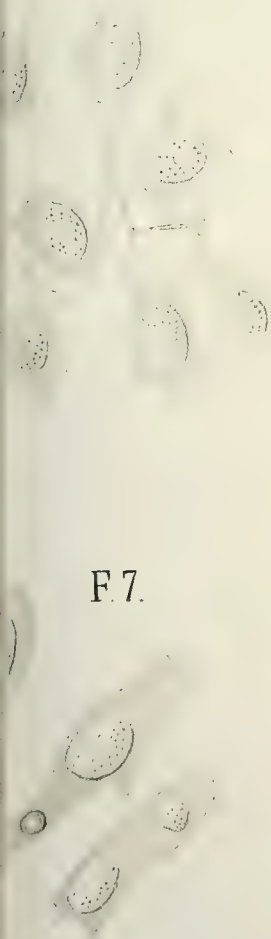
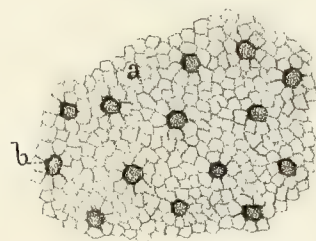
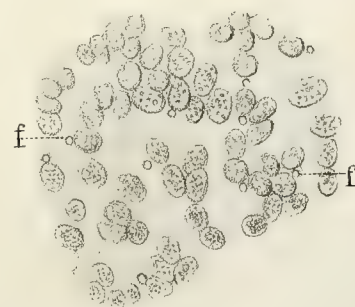
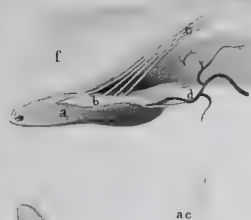
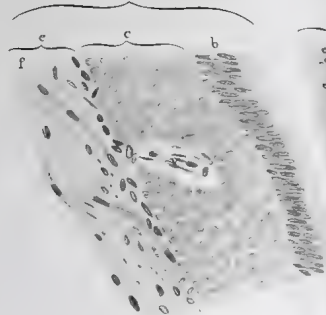
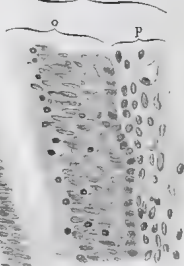
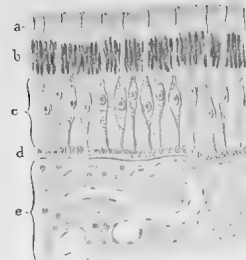
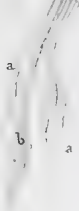
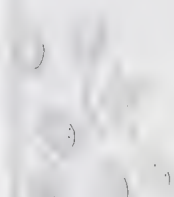
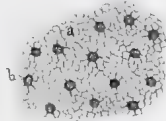
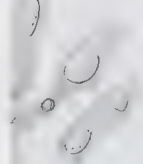
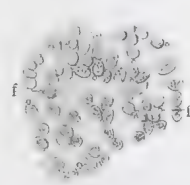
...n pietra

Lit. G. Wenk

G P Piana

Dott. Piana dis.

C Bettini fis. impietra

Lit. G Wenk

SUI

LOBI OLFATTORÏ

DEL

NEPHROPS NORWEGICUS

MEMORIA

DEL DOTT. GIUSEPPE BELLONCI

(Letta nella Sessione ordinaria 8 Aprile 1880)

Secondo la comune opinione, l' organo dell' olfatto dei Crostacei trovasi nelle appendici esterne delle antenne del primo paio o antennule; ed è rappresentato da filamenti speciali, descritti da Leydig (1) e denominati *coni olfattorï*. Questa opinione, ancora molto incerta, può essere corroborata da un argomento tratto dalla struttura del cervello.

È noto che nei Vertebrati i bulbi olfattorï sono sicuramente riconoscibili per la presenza dei *glomeruli olfattorï*. Se dunque ci fosse, nel cervello dei Crostacei, un organo contenente corpi simili ai glomeruli olfattorï, esso potrebbe servire, come un dato morfologico sicuro, per la determinazione dell' apparato centrale e periferico delle sensazioni olfattorie. Io ho fatto questa determinazione nel *Nephrops norwegicus*.

Il nervo delle antennule è diviso in due parti: una esterna formata di fibre sottili, l' altra interna formata di fibre grosse; come ha dimostrato Krieger (2) nell' *Astacus fluviatilis*. Giunto alla base delle appendici terminali delle antennule, questo nervo si divide ne' suoi due fasci costituenti; dei quali quello formato di fibre grosse entra nell' appendice interna, quello formato di fibre sottili nell' appendice esterna: in quest' ultima si inseriscono i coni olfattorï.

Il fascio di fibre sottili, penetrando nel cervello, si divide nuovamente dal fascio di fibre grosse e termina, in gran parte almeno, in un organo sferoidale, situato nella parte posteriore del cervello e già indicato da Dietl (3) nell' *Astacus fluv.* col nome di massa midollare inferiore del lobo ottico. Quest' organo, nel *Nephrops*, è sviluppatissimo e contiene dei corpi sferici, disposti regolarmente, il cui diametro

(1) Leydig. *Ueber Geruchs und Gehörorgane der Krebse und Insecten*, Reichert u. Du Bois Reymond's Archiv. 1860 S. 265.

(2) K. R. Krieger. *Ueber das Centralnervensystem des Flusskrebse.* Zeitschrift f. wissensch. Zoologie. XXXIII. Bd. 1879.

(3) M. J. Dietl. *Die Organisation des Arthropodengehirns.* Zeitschrift f. wissensch. Zoologie. XXVII. Bd. 1876.

eguaglia quello delle cellule di media grandezza. Questi corpi, per la forma, struttura e le proprietà chimiche, sono simili ai glomeruli olfattori dei vertebrati, e specialmente dei vertebrati inferiori. Essi, coll' acido osmico, si tingono in nero; si colorano invece pochissimo coll' ematossilina e col carminio. Nei preparati fatti coll' acido osmico, offrono nella loro periferia una zona chiara sfumata, che li separa dal tessuto bruno circostante; e si mostrano formati di un nucleo scuro, circondato da una zona relativamente chiara, a cui segue un' altra zona scura quanto il nucleo. Tutte queste zone sono leggermente sfumate.

Questi corpi, che chiamo addirittura *glomeruli olfattorï*, sono formati, come quelli dei vertebrati, di un reticolo nervoso, sostenuto da uno stroma reticolato di tessuto connettivo. In questo reticolo nervoso vanno a diramarsi da una parte le fibre sottili del nervo antennulare (nervo olfattorio), dall' altra i prolungamenti di piccole cellule, riunite in due gruppi, già descritti e figurati da molti.

Così io credo di poter stabilire queste determinazioni:

1.° Appendice esterna delle antennule = organo dell' olfatto.

2.° Fascio di fibre sottili proveniente da questa appendice = nervo olfattorio.

3.° Masse fibroso-reticolate posteriori del cervello e cellule ad esse congiunte = lobi olfattorï.

4.° Corpuscoli rotondi contenuti in queste masse = glomeruli olfattorï.

Veramente, come sostiene Krieger (1), un piccolo fascio di fibre sottili del nervo delle antennule penetra nella massa fibroso-reticolata anteriore, in cui non si trovano glomeruli olfattorï.

D' onde vengono queste fibre? Rappresentano esse il nervo acustico? Non ho fatto ricerche per risolvere questo problema.

Nella *Squilla*, i glomeruli olfattorï non si trovano nelle masse fibroso reticolate laterali, ma nel centro della parte media del cervello: queste masse laterali della *Squilla* corrispondono alle masse anteriori dell' *Astacus* e del *Nephrops* e in esse termina il fascio incrociato delle fibre del peduncolo oculare.

Negl' Insetti, i glomeruli olfattorï trovansi pure laddove termina il nervo delle antenne; le quali, com' è noto, portano i coni olfattorï.

Dopo questa nuova determinazione, fra i centri nervosi dei crostacei superiori e il cervello dei vertebrati, restano stabilite le seguenti omologie:

CROSTACEI	VERTEBRATI
1.° Gangli ottici.	Lobi ottici.
2.° Masse fibroso-reticolate anteriori e cellule che ne dipendono.	Emisferi cerebrali e cerebellari.
3.° Masse fibroso-reticolate posteriori (*Nephrops*) e cellule che ne dipendono.	Bulbi olfattorï.

(1) l. c. pag. 548.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1ª. Sezione trasversa della parte posteriore del Cervello del *Nephrops norwegicus* — *Hartnack* $^{3}/_{IV}$.

na, nervo antennulare.
- *na'*, fibre sottili che penetrano nella massa fibroso-reticolata anteriore.
- *na''*, fibre grosse.
- *nol*, nervo olfattorio.

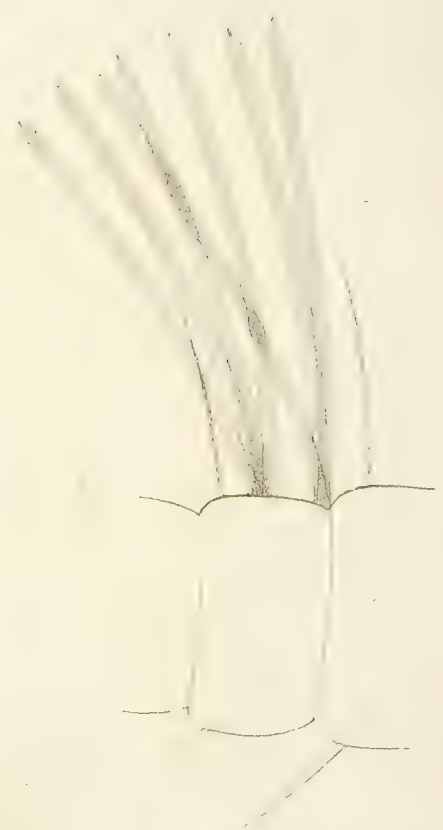
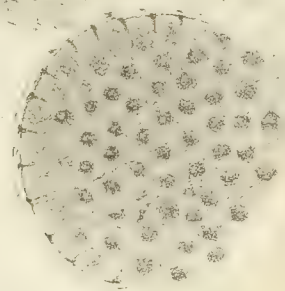
Lol, lobo olfattorio.
gl, glomeruli olfattorï.
c, piccole cellule (nuclei).

Fig. 2ª. Sezione trasversa della parte media del cervello del *Nephrops* — *Hartnack* $^{3}/_{IV}$.
He, massa fibroso-reticolata anteriore.
c', piccole cellule.
(per le altre lettere, come sopra).

Fig. 3ª. Glomerulo olfattorio del *Nephrops* — *Zeiss* $^{3}/_{J imm}$.

Fig. 4ª. Due anelli delle appendici esterne delle antennule del *Nephrops*.
bo, bastoncelli o coni olfattorï.

Fig. 5ª. Inserzione dei bastoncelli olfattorï — *Hartnack* $^{2}/_{VIII}$.

Fig. 6ª. Terminazione dei bastoncelli olfattorï — *Verick* $^{3}/_{VIII}$.

CONTRIBUZIONI
ALLA TEORIA DELLA MAGNETIZZAZIONE DELL' ACCIAIO

MEMORIA

DEL PROFESSOR AUGUSTO RIGHI

(Letta nella Sessione del 20 Maggio 1880).

Introduzione.

Tutte le esperienze che sono esposte in questa memoria, appoggiano validamente quella teoria, che fa consistere la magnetizzazione nello spostamento angolare delle molecole, permanentemente magnetizzate; ed in modo particolare dimostrano che le molecole stesse acquistando nel loro movimento di rotazione una quantità di forza viva, variabile nei vari casi, in virtù di essa continuano nel loro movimento, superando più o meno quella resistenza passiva, del genere d' un attrito, senza della quale non si possono spiegare in modo soddisfacente i fenomeni della magnetizzazione permanente. In causa di questa forza viva acquistata, le posizioni nelle quali si fermano le molecole non devono dipendere solo dall' intensità della forza magnetizzante, ma anche dal modo nel quale essa varia quando comincia o cessa d' agire; questo è il concetto teorico al quale sono informate le mie ricerche attuali, e che ha servito in alcuni casi a prevedere i risultati delle esperienze.

Le correnti indotte che si sviluppano in lamine metalliche vicine alla sbarra d'acciaio che si magnetizza, sia per effetto della corrente magnetizzante, nell'atto in cui comincia o finisce, sia per effetto delle variazioni nel momento magnetico, agiscono appunto sulle molecole ora accelerandole ora rallentandone il movimento. Le misure sperimentali, mettono in luce questi effetti delle induzioni, in modo evidentissimo; anzi in alcuni casi il momento magnetico d' una sbarra può variare dal semplice al doppio, o più ancora, in causa della diversa velocità acquistata dalle molecole.

Lo studio dell' induzione nei diaframmi metallici, conduce naturalmente a considerarla nella massa stessa dell'acciaio. Il risultato al quale conducono le esperienze è assai semplice, e può esprimersi dicendo, che per effetto delle correnti indotte, il movimento delle molecole della sbarra si compie sempre con rapidità decrescente dall' esterno all' interno. E siccome le azioni fra gli strati esterni e gli interni d' una sbarra sono tali, che tendono reciprocamente a scemare la loro magnetizzazione, così quelle parti che o si magnetizzano in minor tempo, o che più lentamente perdono il loro magnetismo temporario, renderanno assai minore la magnetizzazione delle altre. Ciò spiega il fatto dimostrato dal Jamin, che cioè in generale una sbarra si magnetizza principalmente negli strati superficiali; ma

conduce pure in certi casi a risultati opposti, che le esperienze confermano minuziosamente, e cioè che può formarsi maggiore magnetizzazione nelle parti interne che nelle esterne, od anche che in queste può svilupparsi una polarità in senso contrario. In certe circostanze succede anzi che l' azione esterna di questi strati superficiali di polarità inversa prevale, e la sbarra presenta il fenomeno di magnetizzarsi permanentemente con poli in senso inverso di quelli del rocchetto che serve a produrre la magnetizzazione.

Oltre dell' induzione, ogni altra circostanza che rallenti od acceleri gli spostamenti delle molecole, vale a variare il momento magnetico temporario o permanente; per esempio facendo crescere o diminuire più o meno lentamente la corrente magnetizzante, si ottengono valori del momento magnetico, i quali in alcuni casi possono differire enormemente in valore assoluto, e qualche volta differire anche nel segno.

Un fenomeno che pure mostra in modo evidentissimo gli effetti dovuti alla varia velocità acquistata dalle molecole, è quello dello spostamento angolare dell' asse magnetico d' un disco d'acciaio, quando dopo una prima magnetizzazione diretta secondo un diametro, si magnetizza nuovamente secondo un diametro diverso. Quì in certo modo lo spostamento dell' asse di polarità del disco, dà idea di quello dell' asse d' una molecola; lo spostamento stesso è più o meno grande, secondo la maggiore o minor velocità che nel loro movimento di orientazione acquistano le molecole magnetiche del disco.

In causa delle induzioni e delle azioni reciproche fra le sue parti, la forza magnetizzante ha valori e direzioni diverse nei vari punti d' una sbarra d' acciaio. Perciò la teoria di Weber nella quale si suppone quella forza costante in grandezza e direzione per tutte le molecole, e le altre teorie da essa derivate, non possono fornire che una rappresentazione a prossimativa dei fenomeni. Però nel caso particolare di sbarre d' acciaio corte e grosse, i risultati che si ottengono devono meno allontanarsi dai veri, poichè diffatti in tal caso per la forma della sbarra, sono meno sensibili le azioni interne, le quali sopravivono al cessare della forza magnetizzante esterna, e per la sua natura, essendo cioè di acciaio, sono meno sensibili gli effetti dell' induzione.

I risultati del calcolo istituito per alcuni casi speciali, sono piuttosto complicati. Ma contentandosi di una certa approssimazione, essi si semplificano grandemente, e si riducono ad espressioni algebriche di pochi termini. Il risultato principale cui si giunge è, che nelle sbarre d'acciaio, lo stato di saturazione nella magnetizzazione permanente, si raggiunge con valori assai piccoli della forza magnetizzante, tanto minori anzi quanto meno è temprato. Per ciò l' aumento di magnetismo permanente che si ottiene nelle sbarre d' acciaio poco temprato o meglio di ferro crudo, al crescere della corrente magnetizzante, è principalmente dovuto al fatto della penetrazione, e cioè alla formazione di strati di più in più profondi, completamente saturati.

Ma quest' ultima parte del lavoro, che comprende lo studio della teoria matematica della magnetizzazione, non è suscettibile di essere in poche parole analizzata.

CAPITOLO I.

Rivista di lavori anteriori.

Sulla preesistenza della polarità molecolare.

1. Per rendere agevole l' intelligenza e giustificare i principi della teoria e delle esperienze che formano l' oggetto della presente Memoria, devo passare brevemente in rassegna alcuni lavori teorici e sperimentali, eseguiti specialmente negli ultimi anni, intorno al Magnetismo. Questa rassegna sarà necessariamente incompleta, poichè per il gran numero delle pubblicazioni fatte di recente su tale argomento, dovrò limitarmi ad accennare solo a quanto si connette intimamente al mio lavoro.

Tutti i fenomeni recentemente scoperti e studiati inducono ad accettare l' ipotesi della polarità preesistente delle molecole, nel ferro o nell' acciaio. Secondo questa ipotesi, in un corpo non magnetizzato, gli assi polari delle molecole sono rivolti senza regola in tutte le direzioni, cosichè il numero probabile di molecole che hanno una data orientazione, è lo stesso per tutte le orientazioni possibili, e le azioni esterne dei loro poli restano così vicendevolmente dissimulate. Ma quando il corpo è avvicinato ad una calamita o ad un sistema di correnti elettriche, quando insomma viene portato in un campo magnetico, le molecole, obbedendo alla forza magnetica od elettromagnetica che le sollecita, si spostano verso la direzione della forza stessa; cessa la compensazione reciproca fra le azioni esterne dei loro poli, ed il corpo presenta i noti fenomeni della magnetizzazione.

In quanto poi alla causa della polarità delle molecole, la ben nota teoria d' Ampère la fa considerare come la manifestazione di correnti elementari che circolino intorno ad ognuna di esse.

Oltre che l' esistenza dello stato di saturazione pel magnetismo di una sbarra, l' influenza che hanno le azioni meccaniche sulla forza coercitiva, è uno degli argomenti che appoggiano l' ipotesi accennata. È noto da lungo tempo che la percussione, le vibrazioni ecc, mentre favoriscono lo sviluppo del magnetismo, se agiscono insieme alla forza magnetizzante, fanno invece scemare il magnetismo permanente agendo dopo. Ciò fa pensare che la così detta forza coercitiva sia una causa puramente passiva del magnetismo permanente, analoga ad un attrito, pel quale le molecole, dapprima non obbediscono completamente alla forza magnetizzante, quando essa agisce, e dopo non obbediscono completamente alle forze interne che tendono a ricondurle nella posizione iniziale. Gli urti agirebbero sulle molecole press' a poco come le scosse date al cartone che porta la limatura di ferro nell' esperienza dello spettro magnetico, i quali urti favoriscono la distribuzione regolare delle particelle di limatura, finchè sotto il cartone c' è la calamita, e ristabiliscono la loro primitiva distribuzione confusa, quando la calamita è allontanata.

L'effetto degli urti dati ad una sbarra d'acciaio o di ferro, può essere rivelato anche dalle correnti indotte che si sviluppano in circuiti vicini. Le correnti di *scuotimento* del Villari, che si sviluppano percuotendo una sbarra di ferro che fu percorsa da una corrente e che poi fu messa nel circuito d'un galvanometro, non potrebbero spiegarsi senza ammettere l' esistenza di molecole stabilmente magnetizzate, che cogli urti si spostano nell' interno della sbarra.

Le ben note ed importanti esperienze di G. Wiedemann, intorno ai rapporti esistenti fra i fenomeni molecolari d'elasticità del ferro e dell'acciaio, ed i fenomeni di magnetismo, aggiungono un grado ulteriore di probabilità alla ipotesi della stabile polarità molecolare. Le deformazioni temporarie e permanenti che si possono produrre colla torsione, colla flessione, sono analoghe alla magnetizzazione temporaria o permanente dell' acciaio. Citerò alcuni dei risultati ottenuti dal Wiedemann. Un filo d'acciaio che abbia subìto una torsione, la perde in parte nell'atto di magnetizzarlo; e reciprocamente un filo magnetizzato perde una parte del suo magnetismo, colla torsione. Torcendo un filo di ferro, dopo averlo fatto percorrere da una corrente, ed averlo così magnetizzato trasversalmente, il filo stesso acquista del magnetismo longitudinale, in un senso o nell' altro secondo il senso della torsione, e la direzione della precedente magnetizzazione trasversale. Reciprocamente, la corrente inviata in un filo già magnetizzato longitudinalmente, produce una torsione. In questi vari casi si osserva quindi la più evidente dipendenza fra gli spostamenti molecolari dovuti all' azione meccanica, e quelli dovuti alla magnetizzazione.

Le variazioni di lunghezza che si osservano nei fili di ferro o di acciaio nell'atto della magnetizzazione, le quali sono opposte a quelle che produrrebbero le azioni reciproche fra le varie parti del filo magnetizzato, sarebbero inesplicabili, senza ammettere che la magnetizzazione implica uno spostamento delle molecole. Vegga il lettore un mio precedente lavoro su questo argomento (1).

Teoria di Weber.

2. Il Weber diede forma matematica all'ipotesi della preesistente polarità molecolare, e con ipotesi sussidiarie giunse a stabilire la relazione fra il magnetismo temporario del ferro dolce, e la forza magnetizzante che lo produce, la quale praticamente può essere rappresentata dall'intensità di una corrente che avvolga il ferro. È necessario, pei confronti che in seguito dovrò fare, che richiami brevemente questa teoria, e a questo scopo seguirò in parte il Maxwell, il quale ne dà una chiara esposizione nel suo Trattato (2).

Sia n il numero delle molecole che contiene l'unità di volume del ferro, o se vogliamo, l'intera sbarra che consideriamo, ed m il momento magnetico invariabile

(1) Atti dell'Accademia di Bologna, 1880, pag. 99. — N. Cimento, 3.ª serie, t. VII, pag. 97.
(2) A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II, pag. 74.

di ciascuna, cosicchè se tutte potessero essere ridotte coi loro assi paralleli, il momento magnetico della sbarra sarebbe

$$M = mn.$$

Ciò costituirebbe lo stato di saturazione pel magnetismo temporario.

Consideriamo una molecola il cui asse AB (Fig. 1) faccia colla direzione della forza magnetizzante (ossia coll' asse del rocchetto, nel caso che in tal modo si ottenga la magnetizzazione), un angolo α, e sia X la forza stessa. L'asse AB girerà d' un certo angolo verso la direzione di X finchè l' effetto di questa forza sia bilanciato da quello delle forze che tendono a ricondurre la molecola nella posizione primitiva. Nell' ignoranza in cui ci troviamo circa le forze molecolari, il Weber adottò l' ipotesi, che queste riducansi ad una sola forza D applicata a ciascuna estremità dell' asse AB, diretta secondo AB e d' intensità costante. Sotto l' azione delle forze X e D, la molecola si fermerà in una posizione $A'B'$ formando colla direzione della forza un angolo θ tale, che la coppia dovuta ad X faccia equilibrio a quella dovuta a D; o ciò che vale lo stesso, tale, che l' asse $A'B'$ sia nella direzione della risultante R delle forze D ed X. I momenti delle coppie dovute alle forze X e D, dovranno essere numericamente eguali, ciò che porge la relazione

$$X \operatorname{sen} \alpha = D \operatorname{sen} (\alpha - \theta) \ldots\ldots \quad (1)$$

fra l' angolo θ e l' angolo α.

È necessario ora determinare quante sono le molecole le quali prima della magnetizzazione fanno colla direzione Ox, l' angolo α. Immaginiamo perciò condotte da un punto qualunque n rette di egual lunghezza, e che sieno parallele agli assi delle molecole del ferro. Esse formeranno colle loro estremità una superficie sferica; e siccome la distribuzione delle molecole prima della magnetizzazione è tale che all' esterno, non si manifesta alcuna polarità in nessuna direzione, le estremità di quelle certe rette, saranno uniformemente distribuite sulla superficie della sfera. Supponiamo pure tracciata una retta parallela ad X. Le rette che fanno con X un angolo minore od eguale ad α, formeranno sulla sfera una calotta sferica la cui area starà a quella della sfera completa, come il numero di quelle stesse rette sta ad n. Quel numero sarà dunque

$$n \frac{1 - \cos \alpha}{2} .$$

Ed il numero di rette che fanno con X un angolo compreso fra α e $\alpha + d\alpha$, sarà, differenziando,

$$\frac{n}{2} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha .$$

Questo sarà pure il numero delle molecole che fa colla retta Ox un angolo compreso fra α e $\alpha + d\alpha$.

Ora il momento magnetico della molecola $A' B'$, nella direzione Ox è

$$m \cos\theta ;$$

dunque il momento di tutte le molecole le quali prima che agisse X facevano con Ox angoli compresi fra α e $\alpha + d\alpha$ sarà

$$\frac{mn}{2} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta \, d\alpha ,$$

e quindi il momento magnetico totale del ferro magnetizzato sarà

$$I = \frac{mn}{2}\int_0^\pi \cos\theta \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha = \frac{M}{2}\int_0^\pi \cos\theta \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha .$$

Per calcolare I non resta dunque che trarre dalla formola (1) il valore di $\cos\theta$, porlo nel valore di I ed eseguire l'integrazione. Ora dalla (1) si ha

$$\cos\theta = \frac{X + D\cos\alpha}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}}$$

quindi

$$I = \frac{M}{2}\int_0^\pi \frac{[X + D\cos\alpha]\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}}\, d\alpha$$

L'integrazione si eseguisce senza difficoltà, per esempio cambiando la variabile α colla $R = \sqrt{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}$; ma in causa del radicale, il quale nel valore di $\cos\theta$ deve essere positivo, come ognuno può persuadersi colla sostruzione grafica che indicherò fra poco, si ottengono per I due valori distinti secondo che X sia minore o maggiore di D.

Per $X < D$ si ha

$$I = \frac{2}{3}\frac{MX}{D}$$

e per $X > D$

$$I = M\left(1 - \frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right) .$$

Il magnetismo temporario deve dunque dapprima essere proporzionale alla forza X; poi crescere meno rapidamente accostandosi ad un limite M. Le esperienze di Weber sembrarono confermare le conseguenze del calcolo.

Una costruzione grafica semplicissima permette di acquistare una chiara idea della dipendenza fra i due angoli α e θ.

S'immagini descritto con raggio eguale a D un circolo di centro O (Fig. 2),

e rappresenti Ox la direzione in cui agisce la forza magnetizzante. Sia OM la direzione d'una molecola che fa con Ox l'angolo α. A partire da O si prenda $OX = X$ e si conduca la retta XM. Dal confronto della figura 2 colla figura 1 risulta che $MX = R$ e che $MXO = \theta$. La costruzione del triangolo OMX, fa dunque conoscere la risultante R e la direzione dell'asse della molecola durante la magnetizzazione. Anzi tirando OM' parallela ad XM, sarebbe OM' questa direzione.

Si vede facilmente che se $X > D$, θ è sempre acuto; mentre che se $X < D$, per certi valori di α, θ è ottuso.

Teoria di Maxwell.

3. La teoria di Weber non rende conto dei fenomeni di magnetizzazione permanente, e solo può rappresentare la magnetizzazione temporaria del ferro dolce.

Il Maxwell cercò di modificarla in modo da spiegare anche il magnetismo permanente. Egli suppose perciò che ciascuna molecola al cessare della forza magnetizzante non torni alla posizione di equilibrio, che a patto che l'angolo $\alpha - \theta$ di cui fu spostata, sia minore di un certo valore che indicheremo con β_o; e che se $\alpha - \theta, > \beta_o$ la molecola retroceda solo per un angolo β_o.

Coll'ipotesi aggiunta dal Maxwell, resta modificato anche il valore del magnetismo temporario dato da Weber. Infatti quando una molecola nell'atto della magnetizzazione si sposta d'un angolo maggiore di β_o, la forza D non è più parallela alla direzione primitiva della molecola, ma fa colla posizione attuale un angolo β_o. Quindi le formole di Maxwell diversificano alquanto da quelle di Weber (1).

Colla teoria modificata, Maxwell spiega alcune leggi sperimentali relative alla magnetizzazione, come per esempio la possibilità di smagnetizzare una sbarra di acciaio, con una corrente inversa minore di quella che produsse la magnetizzazione stessa.

Ma l'influenza degli urti, e delle altre azioni meccaniche, sullo sviluppo del magnetismo temporario, e sul permanente, non restano spiegati. Infatti sia durante l'azione della forza magnetizzante sia dopo, ogni molecola ha una determinata posizione d'equilibrio, ed occupa questa posizione. Si deve dunque ricorrere ad una azione passiva analoga ad un attrito, come già si disse, per spiegare il magnetismo permanente.

Teoria di Chwolson.

4. Il Chwolson ha tentato di dare forma matematica a questo concetto (2), co-

(1) L. c., pag. 79 e seg.

(2) Da un estratto brevissimo che mi cadde sott'occhio nel *Journal de Physique de d'Almeida*, mentre gli ultimi capitoli del presente lavoro erano in gran parte formati, appresi la pubblicazione della memoria di Chwolson. Dietro mia richiesta il fisico russo m'inviò gentilmente un sunto francese della sua Memoria. Mi servo di questo per render conto della sua teoria. Solo, per facilitare i confronti, mi permetterò di cangiare le lettere adoperate dal Chwolson nelle sue formole, in quelle adoperate da me con significato simile.

minciando coll' ammettere che l' impedimento opposto alla rotazione delle molecole sia dovuto alla presenza delle particelle di carbonio.

Se sopra una molecola qualunque agisce una coppia, la molecola non potrà spostarsi che se il momento della coppia supera un certo valore che indicheremo con mL. Quando dunque una molecola è spostata dalla sua posizione di equilibrio, essa si arresta, non già quando le coppie che agiscono su di essa si fanno equilibrio, ma quando la coppia dovuta alla forza X supera quella dovuta a D della quantità mL. In luogo della equazione d' equilibrio dell' art. precedente si avrà quest' altra

$$X \operatorname{sen} \theta - D \operatorname{sen} (\alpha - \theta) = L$$

ove α e l' angolo dell' asse della molecola nella posizione iniziale, colla direzione di X, e θ l' angolo che fa con questa stessa direzione allorchè è deviata. Quando X cessa d' agire ogni molecola torna verso la posizione iniziale, ma si ferma quando la coppia che agisce su di essa è eguale ad mL.

Il Chwolson, calcola il momento magnetico permanente di una sbarra d'acciaio, dapprima nel caso di $X < 2\ L$. La formola seguente ch' esso trova, coincide con una di quelle che stabilirò più oltre, non so se con calcoli simili o diversi, ma che ha un altro significato:

$$N = \frac{MX}{2\ D} \left\{ \frac{4 - \left(\frac{L}{X}\right)^2}{3} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{X}\right)^2} - \frac{L}{X} \operatorname{Arcos} \frac{L}{X} \right\},$$

ove N è il magnetismo permanente sviluppato, ed M ha lo stesso significato precedente.

Dopo istituisce il Chwolson un calcolo del magnetismo permanente pel caso di $X > 2\ L$. Ma per essere questo calcolo solo approssimativo, e per una inesattezza nella scelta dei limiti della integrazione, non ne faccio parola.

Calcolando numericamente le sue due formole, giunge il Chwolson a concludere che anche per piccoli valori della forza magnetizzante l' acciaio acquista immediatamente lo stato di saturazione. Questo è il risultato principale della sua teoria, che poi il Chwolson applica alla spiegazione dei fatti osservati da varî sperimentatori, ed in particolare della smagnetizzazione prodotta da una corrente inversa, il quale ultimo fatto sembra il suo obbiettivo principale.

Si vedrà più oltre in che difetti la teoria del Chwolson.

Fenomeni che accadono invertendo la polarità magnetica.

5. Marianini (1) e Wiedemann (2) trovarono che era possibile smagnetizzare una sbarra d' acciaio, facendo agire una forza magnetizzante inversa. Il primo operò

(1) Ann. de Ch. et Phys. 3.e serie t. XVI.
(2) Pogg. Ann. t. C. p. 235. — Ann. de Ch. et Phys. 3.e serie t. L.

colle scariche di condensatori, il secondo con correnti voltaiche, le une e le altre trasmesse in un' elica di filo che avvolgeva la sbarra.

Dalle esperienze di Wiedemann risultò che la corrente inversa necessaria ad ottenere la smagnetizzazione, era d' intensità notevolmente minore di quella che aveva prodotto la calamitazione. Tanto il Marianini che il Wiedemann riconobbero che le scosse e gli urti facevano riprendere alla sbarra smagnetizzata, un certo grado di magnetismo nel senso primitivo; come pure che, a differenza d' una sbarra presa allo stato neutro o smagnetizzata per mezzo di un forte riscaldamento, una sbarra smagnetizzata con scarica o con corrente inversa, si magnetizzava di più nel senso primitivo che in senso inverso.

È notevole l' esperienza seguente di Marianini. Riunì 6 fili di ferro magnetizzati con 5 altri disposti in senso contrario, e magnetizzati in modo che il sistema appariva allo stato neutro. Una stessa scarica mandata in un' elica entro la quale era posto il mazzetto degli undici fili, produceva in questi una magnetizzazione di diversa intensità, secondo la sua direzione. Suppose il Marianini, che anche in una sbarra intera smagnetizzata da una scarica inversa, esistessero delle particelle magnetizzate in un senso ed altre in un senso contrario; con tale ipotesi spiegò la diversa attitudine della sbarra ad acquistare le due opposte polarità.

Propagazione dello stato magnetico.

6. Se un' elica magnetizzante agisce sopra una breve porzione d' una lunga sbarra, le variazioni di magnetismo nei punti lontani, si producono con un notevole ritardo. Ciò fu dapprima constatato da Beetz [1], e poscia quasi simultaneamente da Trève [2] e da Donati e Poloni [5]. Aprendo o chiudendo il circuito nell' elica induttrice, la corrente indotta che si produce in un' elica avvolta a distanza sulla stessa sbarra, rivela il formarsi ed il distruggersi della magnetizzazione in quel punto. Donati e Poloni nel loro importante lavoro, adoperarono l' ingegnosissimo interruttore galvanico del Felici [3], e trovarono che il magnetismo temporario che dopo un tempo t trascorso dall' apertura del circuito inducente, resta in una data sezione della sbarra di ferro, è rappresentato da

$$\rho\, e^{-\mu t} + \rho'\, e^{-\mu' t}$$

essendo $\rho\ \mu\ \rho'\ \mu'$ quattro quantità indipendenti da t, ma dipendenti dall' intensità della corrente e dalla distanza che passa fra la sezione considerata della sbarra ove trovasi l' elica indotta, e l' elica induttrice.

(1) Pogg. Ann. t. CII. e CV.
(3) C. Rend. t. 77, pag. 1296.
(4) N. Cimento ser. 2.ª, t. XIII.
(6) N. Cimento serie 2.ª t. XII e t. XIII.

La precedente espressione empirica, rappresenta con esattezza sufficiente il fenomeno. Essa presuppone che la smagnetizzazione nel punto considerato cominci nell' atto stesso in cui si apre il circuito dell' elica magnetizzante. Ma mi sembra più probabile, come si vedrà nell' art. 11, che la smagnetizzazione nei punti lontani dell' elica induttrice, cominci effettivamente dopo un certo tempo contato dall' istante in cui cessa la corrente, e che quindi il ritardo osservato, non solo sia dovuto al protrarsi della corrente indotta, ma anche al cominciare questa solo dopo un certo tempo. È chiaro però che si potrebbe trovare una formola empirica da sostituire alla precedente, e che mentre soddisfacesse a questa condizione, fornisse essa pure valori numerici abbastanza prossimi ai risultati sperimentali; ma bisogna notare che si sviluppa corrente indotta nel secondo rocchetto, anche prima che cominci la smagnetizzazione nella parte che avvolge, per azione a distanza della magnetizzazione che sparisce dalle parti della sbarra comprese fra i due rocchetti.

Il caso particolare $t = 0$ che dà la misura dell' intero magnetismo che sparisce o si produce in una sezione qualunque della sbarra all' aprirsi ed al chiudersi della corrente nell' elica, formò pure oggetto di studio agli stessi sperimentatori. Essi giunsero ad un risultato coincidente con quello, trovato quasi nello stesso tempo e con metodo diverso dal Jamin [1]. Il fisico francese trovò diffatti che il magnetismo ad una distanza qualunque x dall' estremo d' una sbarra ove trovasi l' elica induttrice, è dato da

$$i = A\,(k^{-x} - k^{-(l-x)}) \;,$$

essendo l la lunghezza della sbarra; formola identica a quella di Biot. Per $l = \infty$ si riduce ad una sola esponenziale. E tale appunto fu il risultato che ebbero Donati e Poloni, adoperando una lunghissima sbarra di ferro.

Le ricerche del Jamin sulla distribuzione stabile del magnetismo temporario in una sbarra magnetizzata ad una estremità, furono ancora dirette a studiare l' influenza dovuta alla diversa forza coercitiva. Il risultato raggiunto dall' illustre fisico francese, è importantissimo, e può enunciarsi dicendo, che la diminuzione dell' intensità magnetica che si riscontra nelle varie sezioni della sbarra, a partire dall' elica magnetizzante, è tanto più rapida quanto maggiore è la forza coercitiva e segue in ogni caso una legge esponenziale analoga alla precedente. Perciò. in una sbarra di ferro dolce, la magnetizzazione si estende a grandi distanze, ed in una d' acciaio temprato cessa di essere percettibile a distanza relativamente piccola.

Penetrazione del magnetismo.

7. Un altro importante risultato fu raggiunto dal Jamin, nel corso delle sue ricerche sul magnetismo [2]. Egli dimostrò che quando un cilindro di ferro o d'ac-

[1] Comp. Rend. t. 77 e 78.

[2] Un riassunto di questi lavori trovasi nel Journal de Physique n. 50 e 51.

ciaio è posto entro un' elica magnetizzante, la magnetizzazione non si sviluppa egualmente in tutta la massa, ma principalmente negli strati superficiali, decrescendo gradatamente dall' esterno all' interno. Per una stessa sbarra la magnetizzazione penetra tanto più profondamente, quanto maggiore si rende la forza magnetizzante coll' aumentare l' intensità della corrente. Per una stessa forza magnetizzante, la magnetizzazione penetra tanto più profondamente, quanto maggiore è la forza coercitiva. Può darsi quindi che una sbarra di acciaio si magnetizzi in tutta la sua massa, mentre una di ferro dolce d' eguali dimensioni e nelle condizioni medesime, non si magnetizza che nelle parti superficiali.

La trasmissione del magnetismo avviene dunque in modo assai diverso, considerata lungo una sbarra ad un capo della quale agisce la forza magnetizzante, o considerata nella massa del corpo magnetico esposto per intero all' azione d' un' elica. L' influenza della forza coercitiva, è opposta nei due casi.

Il Jamin dimostrò in vari modi il decrescere del magnetismo dall' esterno all'interno (1). Per esempio, magnetizzando un tubo d' acciaio nel cui interno trovasi un cilindro massiccio pure d' acciaio, non si riscontra magnetismo nel cilindro che quando la corrente supera un certo valore; oppure se il cilindro era già magnetizzato in senso opposto, non comincia a scemare questo magnetismo, che quando la corrente abbia una sufficiente intensità. Per saturare varie lamine di acciaio di diverso spessore, occorre una corrente tanto più intensa quanto più sono grosse. Nell' interno d' un tubo di ferro dolce, di sufficiente spessore, l' azione magnetizzante è nulla etc.

Il Jamin ricorre alla diversa penetrazione della calamitazione a seconda dell' intensità della corrente, per spiegare il fatto scoperto da Wiedemann, della smagnetizzazione prodotta da una corrente inversa. Adoperando l' azione d' un acido per togliere ad una sbarra smagnetizzata da una corrente inversa, gli strati superficiali, mostra che realmente negli strati profondi esiste una magnetizzazione inversa che alla superficie. Vedremo tuttavia, che si possono spiegare le proprietà di una sbarra smagnetizzata da una corrente inversa, anche senza ricorrere alla formazione di strati superficiali di polarità opposta a quella degli interni, e che veramente in alcuni casi questi strati non si formano.

Influenza delle dimensioni sul momento magnetico che può acquistare una sbarra.

8. Una legge generale stabilita dal Jamin, riguarda quest' influenza. A parità di sezione il magnetismo permanente cresce colla lunghezza fino ad un certo limite, oltre il quale ogni ulteriore aumento di lunghezza non ha più effetto sensibile. Il Jamin chiama *metripolari* le sbarre che hanno sufficiente lunghezza, per acquistare la massima calamitazione, *megapolari* quelle di lunghezza eccedente, e *brachipolari*

(1) Comp. Rend. t. 80.

quelle la cui lunghezza è troppo piccola onde possano acquistare il massimo magnetismo relativo alla loro sezione. Non seguiremo l'illustre fisico francese nelle idee teoriche, colle quali rende conto di queste differenze, e sulle quali il Wiedemann [1] fece sagaci osservazioni. Vedremo che l'influenza delle dimensioni può anche spiegarsi, coll'azione reciproca degli elementi magnetici della sbarra. Un'esperienza di Bouty [2] mostra in modo evidente l'influenza reciproca delle varie parti d'un sistema magnetizzato. Sovrapposte varie lamine d'acciaio e magnetizzate insieme a saturazione, dopo averle separate trovò che la somma dei loro momenti magnetici era maggiore del momento magnetico del fascio che prima componevano; effetto questo spiegabile coll'influenza reciproca delle lamine unite.

Dalle esperienze del Jamin risultò pure questo fatto notevole, e cioè che delle armature di ferro dolce aggiunte ad una sbarra d'acciaio possono valere a renderla *metripolare*, quando prima fosse *brachipolare*, o in altri termini, che le armature di ferro dolce applicate prima della magnetizzazione a sbarre d'acciaio, possono renderle capaci di divenire assai più potentemente calamitate prima di raggiungere lo stato di saturazione.

CAPITOLO II.

Considerazioni teoriche.

Principi fondamentali.

9. Le cose esposte nei primi articoli del capitolo precedente rendono sommamente probabile l'ipotesi della polarità molecolare. In ciò che segue assumeremo:

a) che le molecole dei corpi magnetici sono dotate di polarità stabile, dissimulata nello stato neutro dall'essere i loro assi indifferentemente rivolti in ogni direzione. La magnetizzazione consiste nello spostamento angolare delle molecole verso una data direzione.

b) che la forza coercitiva proviene da una resistenza, paragonabile ad un attrito, che ogni molecola incontra nel suo movimento. Perchè dunque una molecola qualunque si sposti, deve agire su di essi una coppia di momento non inferiore ad un certo valore limite che potrà considerarsi lo stesso per tutte le molecole.

Vediamo come dal punto di vista di queste due ipotesi, ormai universalmente accettate, si possa render conto dei fatti citati negli art. 6 ed 8.

10. In un corpo magnetico che sia allo stato neutro, la compensazione delle azioni polari delle molecole avviene, non solo per l'intera massa, ma anche per le più piccole parti nelle quali può supporsi divisa. Infatti non si ottengono parti magnetizzate da una massa che non lo sia, e che si suddivide. Non esiste dunque

[1] Pogg. Ann. 1876. — N. Cimento, 2.ª serie, t. XVI.

[2] Ann. de l'Ecole Normale, 2.ª serie, t. IV.

nessuna forza magnetica fra le varie parti d' una sbarra allo stato neutro. Ma se una sbarra è magnetizzata, sia poi in modo temporario o permanente, sviluppansi fra le varie sue parti delle azioni reciproche; esse si compongono colla forza magnetizzante esterna, e sopravvivono in parte al cessare di questa. Se consideriamo in particolare la forza che agisce sopra un punto interno alla sbarra, mentre è esposta all' azione della forza magnetizzante, quella forza sarà la risultante della forza magnetizzante proveniente dall' esterno, e delle azioni di tutte le parti magnetizzate della sbarra. Ora accade che alcune di queste azioni sono opposte ad alcune altre. Infatti, le azioni di quelle porzioni della sbarra che sono da una parte e dall' altra del punto considerato, e nella stessa direzione della forza magnetizzante, sono evidentemente cospiranti a questa stessa forza; mentre invece l' azione delle parti laterali, quelle cioè che s' incontrano partendo dal punto considerato ed andando in direzione perpendicolare alla forza magnetizzante, danno una forza in senso opposto. Se le dimensioni della sbarra sono assai maggiori nella direzione della forza magnetizzante che nelle altre, qual' è il caso d' un' asta lunga e sottile posta entro un' elica magnetizzante, la risultante delle reciproche azioni interne, si aggiungerà alla forza proveniente dall' elica. Invece in una sbarra grossa e breve, potrà in una parte dei suoi punti risultare l' azione interna antagonista della forza magnetizzante esterna.

Dovrà dunque ottenersi una magnetizzazione relativamente maggiore in una sbarra di forma allungata che in una corta e grossa; ed è in tal modo che devesi intendere la spiegazione dei fatti dell' art. 8, come pure l' effetto delle armature di ferro dolce, pel quale si ideò la così detta condensazione magnetica [1].

[1] Per chiarire meglio il nostro concetto consideriamo l' azione d' una molecola AB sopra un punto O, ove si suppone un polo unità.

Siano m e $-m$ le intensità dei poli di AB, $2l$ la loro distanza, e quindi $M = 2ml$ il suo momento magnetico; e supponiamo la molecola col suo asse parallelo ad Ox, e ad una distanza r da O grande in confronto di l (Fig. 3.)

L' azione di A sopra O sarà $\frac{m}{\overline{OA}^2}$ e quella di B, $-\frac{m}{\overline{OB}^2}$, e le componenti della forza totale, secondo Ox parallela ad AB, ed Oy:

$$X = \frac{m}{\overline{OA}^2}\,\frac{OQ}{OA} - \frac{m}{\overline{OB}^2}\,\frac{OR}{OB}, \quad Y = \frac{m}{\overline{OA}^2}\,\frac{MP}{OA} - \frac{m}{\overline{OB}^2}\,\frac{MP}{OB}.$$

Trascurando le potenze superiori alla prima di $\frac{l}{r}$, si trova facilmente

$$X = \frac{M}{r^3}(1 - 3\cos^2\alpha), \quad Y = -\frac{M}{r^3}.\, 3 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

e se φ è l' angolo che fa la risultante con Ox,

$$\cos\varphi = \frac{1 - 3\cos^2\alpha}{\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{-3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1 + 3\cos\alpha}}.$$

11. La propagazione del magnetismo in una lunga sbarra (vedi art. 6) si può concepire nel modo seguente. Siccome la magnetizzazione si forma anche in parti della sbarra assai lontane dall' elica induttrice, ove quindi l' azione diretta di questa sarebbe insufficiente, ne risulta che essa è dovuta ad azioni interne, e cioè al magnetismo formatosi già nelle parti meno lontane. Ciò implica che la magnetizzazione debba farsi successivamente partendo dalla porzione prossima all' elica, e andando alle più lontane.

Ora ciò si spiega facilmente, rammentando il secondo principio *b)* e considerando che l' azione delle molecole di una data sezione della sbarra, su quelle più lontane dall' elica, cresce gradatamente dall' istante in cui le molecole stesse cominciano la loro rotazione, fino al momento in cui si arrestano. Infatti onde cominci la rotazione delle molecole una distanza x dall' elica, è necessario che le molecole che sono a distanza minore di x non solo abbiano cominciata la loro rotazione, ma ne abbiano già compiuta una parte, onde la forza magnetica alla distanza x sia sufficiente a vincere la resistenza opposta al movimento delle molecole che vi si trovano.

Tanto maggiore sarà il valore minimo della forza necessaria a spostare le molecole, cioè tanto maggiore sarà la forza coercitiva, altrettanto maggiore sarà il ritardo col quale si forma la magnetizzazione, come pure tanto più rapido sarà a magnetizzazione compiuta il decrescimento dell' intensità magnetica a partire dall' elica inducente. È noto infatti (art. 6) che l' intensità magnetica decresce rapidamente nei vari punti della sbarra, se è d' acciaio temprato, ma lentamente se è di ferro. Mancano esperienze che mostrino se il ritardo della magnetizzazione nelle parti lontane cresca effettivamente al crescere della forza coercitiva. I mezzi limitatissimi dei quali posso disporre, non mi permettono d' intraprendere questo studio interessante.

Inerzia delle molecole.

12. I risultati sperimentali che più oltre saranno esposti, mostreranno che nei fenomeni della magnetizzazione ha un' influenza spesso preponderante l' inerzia

Se ne deduce che per $\alpha = 0$ si ha $\varphi = 180°$, e la risultante è diretta secondo Ox'; per $\alpha = 54° \, 44' \, 51'',8$, cioè $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha $\varphi = 270°$, cioè la risultante è diretta secondo Oy'; per $\alpha = 90°$ la risultante agisce secondo Ox, cioè in senso opposto a quello corrispondente ad $\alpha = 0$, e così di seguito. Se consideriamo molti elementi magnetici eguali e paralleli ad AB, e se immaginiamo un cono di asse Ox le cui generatrici facciano con Ox un angolo di $54° \, 44' \, 51'',8$, le azioni su O delle molecole comprese entro le due falde del cono daranno una componente secondo Ox', mentre quelle esistenti fuori del cono, avranno una componente diretta secondo Ox, cioè in senso contrario.

Nel caso della sbarra magnetizzata, le molecole non sono tutte orientate parallelamente nè tutte assai lontane dal punto O. Tuttavia si comprende come una parte di esse debba agire sopra un punto O, in un senso, e le altre in senso contrario.

delle molecole, o se vogliamo, la forza viva che acquistano nel compiere lo spostamento angolare dei loro assi; perciò si è condotti ad ammettere un terzo principio, oltre i due *a)* e *b)* dell'art. 9 e cioè:

c) La posizione nella quale una molecola si ferma, dipende dalla velocità da essa acquistata nel suo movimento, in virtù della quale può più o meno superare la resistenza, o attrito, che gli si oppone.

Nel resto di questo Capitolo, esamineremo le conseguenze che si traggono dai tre principi *a)*, *b)* e *c)*, senza l'aiuto di nessun'altra ipotesi ausiliaria.

La posizione in cui si ferma la molecola, sia quando il corpo si magnetizza, sia quando si allontana la causa magnetizzante, in causa di *c)*, non dipende solo dal valore della forza, ma anche dal modo nel quale varia la sua intensità quando comincia o quando cessa d'agire.

Per determinare la velocità di ogni molecola ad un istante qualunque, sarebbe necessario conoscere ad ogni istante le forze che agiscono su di essa. Ma tutto ciò che si sa intorno a queste forze si riduce a ben poco. Solo può ritenersi che allo spostamento di una molecola, si oppone una coppia, il cui momento è tanto maggiore quanto più la molecola stessa si trova già allontanata dalla posizione di equilibrio, la quale coppia che diremo *coppia d'elasticità*, trascina la molecola verso la posizione iniziale, quando la causa che produceva la magnetizzazione è soppressa ([1]). Se questa coppia antagonista non esistesse, ogni molecola volgerebbe il proprio asse nella direzione alla forza magnetizzante, qualunque ne fosse l'intensità, e resterebbe permanentemente deviata; mentre al contrario l'esperienza mostra non solo che in generale cresce la magnetizzazione colla forza magnetizzante, ma che al cessare di questa il momento magnetico del corpo diminuisce d'assai ed anzi si riduce sensibilmente a zero, nel caso del ferro perfettamente dolce.

Deviazione minima, media, e massima d'una molecola.

13. Consideriamo una molecola AB (Fig. 4) d'una sbarra magnetizzata. Sui due poli di questa molecola agirà la forza magnetizzante, in parte dovuta ad azioni esterne alla sbarra (elica percorsa da corrente, oppure poli di calamite), ed in parte all'azione delle altre molecole. Si formerà così una coppia che chiameremo *coppia magnetizzante*. Se la molecola trovasi effettivamente fuori della posizione AB che occupava quando la sbarra non era magnetizzata, per esempio in A_1B_1, agirà su di essa una seconda coppia, cioè la coppia di elasticità. Se il corpo considerato fosse privo di forza coercitiva, la molecola sarebbe in equilibrio nella posizione A_1B_1 qualora per tale posizione le due coppie fossero eguali e contrarie. Ma se invece il corpo ha forza coercitiva, come noi supponiamo, potrà la molecola consi-

([1]) Ammettendo con Weber che la coppia in discorso sia formata da forze parallele alla direzione di equilibrio della molecola, il momento diminuisce quando lo spostamento angolare oltrepassa 90°. Ma l'ipotesi del Weber non è che una semplificazione pel calcolo.

derata fermarsi in altre posizioni diverse dalla A_1B_1, purchè la differenza dei momenti delle due coppie non sia maggiore del momento della coppia minima necessaria a spostare la molecola. Sia mL il momento di questa coppia, essendo m il momento magnetico della molecola.

Sia A_2B_2 quella posizione nella quale il momento della coppia magnetizzante supera quello della coppia contraria, della quantità mL, ed A_3B_3 quella in cui la stessa differenza è di segno contrario. La molecola considerata potrà rimanere immobile in una posizione qualunque dell' intervallo compreso fra quelle due posizioni estreme. Essa si troverà effettivamente piuttosto in un luogo che in un altro, secondo la velocità che avrà acquistato nell' atto della magnetizzazione. Naturalmente le posizioni estreme A_2B_2 ed A_3B_3 dipendono non solo dalla forza magnetizzante esterna, ma anche dalle forze provenienti dalle altre molecole.

Chiameremo *deviazione minima, media,* o *massima* della molecola, quella che essa subisce nel passare dalla posizione iniziale AB, ordinatamente alle posizioni A_2B_2, A_1B_1, A_3B_3.

Ora quanto si è detto per una molecola può ripetersi per le altre. E siccome il momento magnetico acquistato dalla sbarra, non è altro che quello che risulta dal comporre quelli delle singole molecole, ne risulta che il momento magnetico stesso varierà a parità d' altre condizioni, anche col modo nel quale la sbarra viene magnetizzata. Distinguiamo tre casi principali:

1.° Supponiamo che la forza magnetizzante cresca lentamente da zero fino al suo valore. Le molecole si sposteranno per così dire senza velocità, e si arresteranno nelle posizioni simili alla A_2B_2 cioè non appena la coppia risultante che agisce in una qualunque di esse è eguale a quel valore minimo mL necessario a vincere la resistenza passiva opposta al movimento. Il momento magnetico della sbarra avrà un certo valore che chiameremo *momento temporario minimo*, poichè diffatti sarà il più piccolo possibile, per quel dato valore della forza magnetizzante. Si otterrà praticamente questo effetto accostando lentamente alla sbarra il polo d' una calamita, o facendo crescere lentamente l' intensità della corrente in un' elica che la circondi.

2.° Supponiamo che prima di esporre la sbarra alla solita forza magnetizzante, si faccia agire una forza molto maggiore che poco a poco si diminuisce fino al valore voluto; per esempio si manda nell' elica magnetizzante una corrente fortissima, e se ne diminuisce poco a poco l' intensità. Se l' intensità iniziale della corrente può considerarsi come infinita, tutte le molecole della sbarra, che non sono nella direzione della forza, si troveranno in ultimo alla deviazione massima, il momento magnetico della sbarra sarà il più grande possibile, relativamente alla forza magnetizzante, e lo diremo momento magnetico temporario *massimo*.

3.° Supponiamo infine che magnetizzata la sbarra come nel primo caso, essa venga ripetutamente percossa con un corpo duro, o in qualche altro modo se ne scuotano le molecole. Ogni molecola poco a poco si muoverà verso la deviazione

media, ed il momento magnetico della sbarra tenderà ad assumere un valore determinato, che chiameremo momento temporario *medio*, lo stesso che acquisterebbe, se non esistesse forza coercitiva.

Chiudendo nel modo ordinario il circuito dell' elica magnetizzante, le molecole si fermano, almeno prevalentemente, fra la deviazione minima e la media, poichè diffatti è noto che gli urti aumentano il momento magnetico della sbarra. Non si può però asserire a priori che il momento magnetico sia intermedio fra il minimo ed il medio, giacchè, come si vedrà nel capitolo V, chiudendo istantaneamente il circuito, si sviluppano certe correnti indotte che modificano la distribuzione della forza magnetizzante. Però l' esperienza mostra (cap. VI) che il momento temporario ottenuto in tal modo è effettivamente maggiore di quello che ottiensi facendo crescere lentamente l' intensità della corrente.

L' angolo $A_2 O A_3$ entro il quale può collocarsi la molecola, dipende dall' intensità della forza magnetizzante X. Infatti la coppia magnetizzante che agisce sulla molecola, allorchè fa colla direzione di X l' angolo θ è

$$2 \mu l X \text{ sen } \theta = m X \text{ sen } \theta$$

essendo X la forza magnetica sopra un polo unità, μ l' intensità dei poli della molecola, 2 l la loro distanza, ed m il momento magnetico della stessa molecola. Questa coppia è dunque proporzionale ad X, e al variare di θ varierà pure proporzionalmente ad X. Se X sarà piccola deve variare assai l' angolo θ onde la differenza fra la coppia magnetizzante e la coppia d' elasticità, passi dal valore mL al valore $-mL$; per X assai grande invece, basterà una minor variazione dell' angolo θ. L' angolo $A_2 O A_3$ diminuirà dunque al crescere della forza magnetizzante.

Siccome d' altra parte, al diminuire della forza magnetizzante, diminuisce pure la velocità acquistata dalle molecole allorquado compiono la loro rotazione, così la differenza di momento magnetico secondo che la corrente che lo produce si chiude d' un tratto, o si fa crescere lentamente, non sarà discernibile nè per piccole correnti nè per correnti assai forti, ma solo per valori medi.

14. Supponiamo che si faccia agire sopra la sbarra una forza magnetizzante determinata, la cui intensità si fa però crescere lentamente cominciando da zero. Ogni molecola non potendo acquistare velocità, per ogni valore della forza magnetizzante si troverà alla deviazione minima. Se quando la forza magnetizzante esterna ha raggiunto un certo valore, la sua intensità decresce di nuovo lentamente, la molecola non retrocederà subito verso la posizione iniziale, ma comincierà il suo moto regressivo solo quando sarà sufficientemente diminuita la forza magnetizzante. La molecola infatti non abbandonerà la posizione $A_2 B_2$ che quando la coppia magnetizzante da maggiore che era, sarà divenuta minore della coppia di elasticità, della solita quantità mL.

Se dunque si magnetizza una sbarra con un' elica nella quale si fa crescere

lentamente l' intensità della corrente, e poi raggiunto un massimo valore si fa nuovamente diminuire, il momento magnetico per un valore qualunque della corrente sarà maggiore nel periodo di decrescimento della corrente, che nel periodo di accrescimento. Ciò sarà confermato nell' art. 31. Si noti però che la differenza di momento magnetico che si ha fra il periodo di aumento, e quello di diminuzione della corrente, dapprima è dovuto anche ad un' altra causa, e cioè all' azione reciproca delle parti magnetizzate, maggiore assai quando la corrente diminuisce che quando per la prima volta aumenta d' intensità.

15. Vediamo ora ciò che accade se cessa d' agire la forza magnetizzante esterna alla sbarra, per esempio si allontana la calamita, o si apre il circuito d' un' elica percorsa da una corrente, che circondi la sbarra.

Se la sbarra fosse affatto priva di forza coercitiva, ogni molecola si fermerebbe nella posizione iniziale $A\ B$. Ma in causa della resistenza che si oppone al moto delle molecole, può ciascuna di esse arrestarsi in una nuova posizione. Abbenchè dunque cessi d' agire la forza magnetizzante proveniente dall' esterno, sopra una molecola qualunque, oltre che agire la coppia d' elasticità che tende a condurla alla posizione iniziale, ne agisce un' altra dovuta alle altre molecole. In ogni modo la molecola considerata potrà arrestarsi in diverse posizioni, secondo la velocità colla quale si muove, purchè il momento risultante delle coppie che agiscono su di essa in quelle posizioni, sia non maggiore di mL. Se in particolare la corrente dell' elica si fa diminuire lentamente d' intensità, o se adoperandosi una calamita, questa si allontana lentamente dalla sbarra, dovranno le molecole fermarsi più lontane dalla posizione iniziale. Dunque il magnetismo permanente della sbarra deve essere maggiore se la forza magnetizzante anzichè cessare rapidamente d' agire, diminuisce lentamente d' intensità.

La coppia magnetizzante che agisce sopra una molecola, dopo che la forza esterna ha cessato d' agire, la quale è dovuta all' azione delle altre molecole, prosegue in certo modo l' azione di questa, e tanto più quanto più la sbarra è di forma allungata, come si è detto nell' art. 10. Il magnetismo permanente sarà dunque relativamente maggiore in questo caso, che in una sbarra di breve lunghezza. Potrà darsi anzi, che adoperando una sbarra cortissima, molte delle sue molecole per velocità acquistata oltrepassino la posizione iniziale, e si arrestino dalla parte opposta, e che la sbarra presenti un magnetismo permanente inverso dell' ordinario. Vedremo fra poco quali sono le condizioni nelle quali ciò potrà accadere.

16. Abbiamo supposto in ciò che precede, che una molecola qualunque sempre si sposti nell' atto della magnetizzazione, e sempre ritorni verso la posizione iniziale quando si allontana la causa magnetizzante. Ma invece può accadere che nell' un caso o nell' altro una molecola rimanga ove si trova.

Se una molecola fa colla direzione di X un angolo α, il momento della coppia magnetizzante è $m\,X \operatorname{sen} \alpha$. Se α è tale che $m\,X \operatorname{sen} \alpha < mL$, ossia $X < \frac{L}{\operatorname{sen} \alpha}$ per tutto il tempo in cui si forma la magnetizzazione, la mole-

cola stessa resterà immobile. Dunque tutte le molecole che prima della magnetizzazione fanno angoli abbastanza piccoli colla direzione della forza magnetizzante che agisce su ciascuna di esse, non si spostano affatto. Quanto più piccola sarà la forza X, tanto maggiore potrà essere l'angolo α, onde la molecola non si sposti, e per $X < L$ nessuna molecola si sposta e non avviene magnetizzazione. Le piccole forze magnetizzanti, purchè maggiori di L agiranno solo su quelle molecole che nello stato naturale trovansi quasi ad angolo retto colla forza magnetizzante. Crescendo la forza, per esempio aumentando la intensità della corrente nell' elica induttrice, devieranno via via le molecole meno inclinate sulla direzione della forza. Sarà solo con una forza infinita, che tutte le molecole si sposteranno, e durante la magnetizzazione temporaria saranno ridotte tutte nella direzione della rispettiva forza. In tal caso si avrà lo *stato di saturazione temporaria*.

Accadrà similmente che nell' atto in cui la forza magnetizzante cessa d' agire, alcune molecole che poco si sono allontanate dalla posizione che occupavano prima della magnetizzazione, restino nella posizione nuova, e saranno precisamente quelle, fra le molecole deviate, il cui asse era meno inclinato sulla direzione della forza magnetizzante. Anzi per valori abbastanza piccoli di X, potrà accadere che tutte le molecole restino nella posizione che occupano quando cessa d' agire ogni forza proveniente dall' esterno. Il magnetismo permanente sarà in tal caso identico al temporario. Non bisogna credere però che questa conseguenza possa esattamente verificarsi, giacchè praticamente può non essere vero che la quantità L sia la stessa per ogni molecola. Lo stesso dicasi del non prodursi magnetizzazione per $X < L$.

Lo stato di *saturazione permanente* si avrà quando ogni molecola è nella posizione più lontana possibile dalla iniziale, e si otterrà se, fatta agire una forza magnetizzante tanto grande da potersi considerare come infinita, se ne diminuirà poco a poco l' intensità sino a sottrarre la sbarra da ogni azione esterna. Alcune delle molecole resteranno nella direzione della forza magnetizzante, e saranno quelle che prima della magnetizzazione facevano angoli assai acuti colla sua direzione.

Magnetizzazioni successive.

17. Tanto il magnetismo temporario che il permanente, di una sbarra d'acciaio, devono dipendere non solo dall' ultima magnetizzazione, ma anche dalle precedenti. Consideriamo dapprima il caso in cui si manda ripetutamente una stessa corrente in un' elica che avvolge la sbarra. Quando la prima corrente comincia, la forza magnetizzante è dovuta solo alla corrente, ma non appena le molecole cominciano a spostarsi, si aggiunge l' azione reciproca di queste. Quando si manda la corrente per la seconda volta, su ogni molecola agisce già fin dal principio la forza magnetizzante dovuta all' azione delle altre; si otterrà dunque una maggior magnetiz-

zazione, e così di seguito. Dunque il magnetismo permanente cresce ad ogni nuovo invio di corrente, come si vedrà confermato nel capitolo III dalle esperienze preliminari.

In quanto al magnetismo temporario, nulla si può prevedere di certo, giacchè al variare del magnetismo già acquistato dalla sbarra, varierà forse anche la penetrazione delle magnetizzazioni successive, ciò che risulta dalle spiegazioni che saranno date nel capitolo V.

Se su di una stessa sbarra si fanno agire correnti d'intensità decrescente, il magnetismo tanto temporario che permanente, per ogni valore della corrente, saranno in generale maggiori di quel che sarebbero ottenuti direttamente. Se invece le correnti si seguono in ordine crescente d'intensità, le differenze saranno assai piccole, ed in molti casi potranno trascurarsi.

Una corrente assai debole inviata dopo una molto intensa, può produrre nessun effetto. Infatti se una molecola è nella posizione di equilibrio corrispondente allo stato neutro, si richiede per spostarla almeno una coppia di momento mL; ma se è già allontanata, per spostarla ulteriormente è necessario superare ancora la coppia di elasticità che tende a ricondurla alla posizione iniziale.

18. Se una corrente d'intensità costante viene inviata alternativamente nelle due opposte direzioni, tanto il magnetismo temporario che il permanente risultano notevolmente minori, di quelli ottenuti con un solo invio di corrente. Nella prima inversione, le forze interne sono opposte alla forza magnetizzante esterna. Ma oltre a ciò deve considerarsi che la seconda corrente deve essere senza effetto su quelle molecole le quali per la prima magnetizzazione sono rimaste tanto deviate da fare un angolo piccolissimo colla direzione della forza magnetizzante. Queste molecole si sottrarranno alle altre, nel formare il momento magnetico della sbarra. Analogamente, la corrente inviata di nuovo nella prima direzione, lascierà immobili quelle molecole che la corrente inversa ha condotte assai prossime alla direzione della forza. Dopo alcune inversioni di corrente, si avranno dunque nella sbarra delle molecole che restano permanentemente deviate alcune in un verso, altre in verso opposto, e che per ciò elidono a vicenda il loro effetto esterno.

19. Se dopo una corrente forte, viene inviata una corrente inversa più debole, si otterrà sempre diminuzione di magnetismo, per piccola che sia questa corrente. Infatti la seconda corrente tende a ricondurre a posto ogni molecola, ed è aiutata dalla coppia di elasticità, mentre che se la corrente debole agisse nel senso della prima, la stessa coppia si opporrebbe. Ecco perchè una corrente tanto debole da non essere capace di aumentare il magnetismo d'una sbarra, può però diminuirlo sensibilmente.

L'esperienza prova che se la corrente inversa debole, ha intensità conveniente, la sbarra è ridotta allo stato neutro. Ciò viene spiegato dal Jamin dicendo che la seconda corrente penetra a minor profondità, lasciando negli strati più profondi una magnetizzazione nel senso primitivo che elide all'esterno l'effetto della prima.

Ma in alcuni casi non può accadere questa diversa penetrazione, per esempio quando la corrente si fa sempre crescere gradatamente d' intensità nella chiusura (cap. V). Ecco come avviene allora la neutralizzazione del magnetismo. La corrente inversa, essendo più debole della prima corrente, non agisce che su quelle molecole i cui assi fanno colla direzione della forza magnetizzante angoli prossimi a 90°. Quelle molecole deviano nel senso della seconda corrente, mentre le altre, conservando la loro deviazione primitiva, ne elidono l' effetto esterno. Resta così messa in forma concreta l' idea del Marianini, della coesistenza di strati magnetici opposti in una sbarra smagnetizzata con corrente inversa.

Naturalmente tutto ciò deve pure succedere, quando a produrre la smagnetizzazione intervengono anche gli strati diversamente profondi, oppostamente magnetizzati.

20. Siamo ora in grado di comprendere quali saranno le condizioni favorevoli ad ottenere il magnetismo permanente inverso del temporario (art. 15). Oltre che far uso di una sbarra assai corta relativamente alla sua grossezza, si dovrà far crescere lentamente la forza magnetizzante, per poi farla cessare d'un tratto. Se invece si chiuderà istantaneamente il circuito dell' elica, accadrà che molte molecole, per velocità acquistata, si accosteranno tanto alla direzione della forza magnetizzante, da conservare la loro nuova posizione anche all' aprirsi del circuito. Questemolec ole tendono a produrre un momento magnetico nel senso diretto, e perciò possono impedire di manifestarsi l' inversione di polarità. Ma se si manderà la corrente in senso contrario, altre molecole resteranno deviate in senso opposto, compensando l' effetto delle prime, e l' inversione si mostrerà nuovamente.

Il fenomeno della polarità inversa sarà studiato nel capitolo VII, in modo più completo, avendovi influenza anche i fenomeni d' induzione dei quali ci occuperemo nei capitoli IV e V.

CAPITOLO III.

Disposizioni sperimentali relative ai cap. IV, V e VI, ed esperienze preliminari.

Misura del momento magnetico temporario.

21. Per misurare i momenti magnetici, mi attenni ad un metodo simile, ma non identico, a quello che fu adoperato dal Wiedemann e poscia da altri sperimentatori. Sull' ago sospeso d' un galvanometro a riflessione G (fig. 5), potevano agire due rocchetti R ed S, posti a distanze variabili dall' istrumento, a norma della sensibilità occorrente nei vari casi. Gli assi dei due rocchetti erano sopra una perpendicolare al meridiano magnetico passante pel centro dell' ago del galvanometro, ed erano percorsi dalla corrente in modo da agire in senso opposto

sull' ago. Regolate le distanze in guisa che al chiudersi del circuito l' ago sospeso, le cui deviazioni potevano essere misurate con un cannocchiale *C* ed una scala *L*, non si spostasse affatto, si vedeva invece una deviazione quando prima di chiudere il circuito veniva posta entro di *R* una sbarra d' acciaio, e questa deviazione serviva di misura al magnetismo temporario che vi si sviluppava per effetto della corrente. Il rocchetto *S*, che compensava l' effetto di *R* sull' ago, dispensava dal dovere detrarre dalla deviazione letta, la parte dovuta allo stesso rocchetto *R*.

A seconda del bisogno, feci uso di tre rocchetti, che indicherò colle lettere *A*, *B*, *C*, dei quali ecco le dimensioni.

A) Rocchetto formato di 64 giri di filo di rame di 1^{mm} di diametro coperto di gutta-percha, avvolto sopra un tubo grosso 12^{mm} in un solo strato.

B) Rocchetto a molti strati, avente nel vano interno il diametro di 30^{mm}. Nella parte occupata dal filo è lungo 26^{mm}, lo spessore complessivo degli strati è di 13^{mm}, ed il filo di rame, che è coperto di seta, è grosso circa $0^{mm},8$.

C) Rocchetto formato con 46 giri di filo di rame coperto di gutta-percha di 1^{mm}, avvolto in due strati sopra un tubo di 25^{mm} di diametro.

Quando il rocchetto *R* della fig. 5 era l' *A* od il *C*, il rocchetto di compensazione *S* era costituito semplicemente da due o tre giri di filo aventi circa 10^{mm} di diametro. Per compensare il rocchetto *B*, adoperai invece uno dei rocchetti a corto filo del galvanometro.

Per aprire e chiudere, od invertire la corrente nel circuito dei rocchetti *R* ed *S*, disposi a portata di mano una vaschetta di mercurio in cui poteva immergersi un filo amalgamato, come pure un inversore formato con alcuni archi di rame, mobili su altre vaschette di mercurio.

Pure a portata di mano preparai un reostata destinato a variare l' intensità della corrente. Per qualche tempo ne adoperai vari, di forme diverse, ma presentavano alcuni inconvenienti, segnatamente quello di produrre a certi momenti del loro uso delle troppo rapide variazioni d' intensità nella corrente. Quello che trovai migliore, e che adottai definitivamente è costituito da due lamine di rame di forma triangolare (fig. 6) *AB*, *CD* lunghe circa 20 cm. e larghe 4 alla sommità, fissate a piccola distanza ad un regolo di legno *MN*, ed incurvate in modo che le loro punte *D* e *B* si trovano a circa 18 cm. di distanza. Esse possono immergersi più o meno in un ampio vaso cilindrico contenente una soluzione di solfato di rame, e la corrente deve passare dall' una all' altra attraverso il liquido. Quando le punte *B* e *D* sfiorano appena quel sottilissimo velo liquido che si solleva per capillarità all' intorno del vaso se, come supponiamo il circuito non è in alcuna parte interotto, la corrente ha una intensità piccolissima; abbassando molto lentamente dapprima poi un poco più in fretta tutto il sistema *MNBD*, si fa crescere gradatamente l' intensità della corrente, la quale raggiunge il suo massimo valore quando il regolo *MN* appoggiandosi sull' orlo del vaso, le lamine *CD*, *AB* sono quasi completamente immerse nel liquido.

Operando in tal guisa, si ottiene la *chiusura lenta* del circuito. Lasciando invece le lamine del reostata immerse, e chiudendo il circuito col filo amalgamato che si immerge nella vaschetta di mercurio, si avrà la *chiusura rapida o istantanea* del circuito.

Nelle esperienze che più oltre descriverò, occorreva pure di *aprire lentamente* il circuito, ossia di fare decrescere lentamente l' intensità della corrente fino a zero. Ciò era facile ad ottenersi col reostata, sollevando poco a poco le lamine fino ad estrarle dal liquido, avendo cura però di rallentare in ultimo il movimento e di rasentare colla punta delle lamine la parete del vaso, onde in ultimo giungere a staccarle dal liquido nel menisco sollevato di capillarità. Staccandole nel mezzo del liquido, si ha una diminuzione finale troppo rapida nella intensità della corrente. Se poi senza sollevare le lamine del reostata, s' interrompe col mercurio il circuito, si otterrà l' *apertura rapida od istantanea* del circuito stesso.

Facendo in modo che le lamine del reostata non possano immergersi che in parte, si ha modo di operare con correnti di varia intensità, anche senza variare il numero delle coppie della pila adoperata.

Nella maggior parte delle esperienze mi valsi di alcune coppie Bunsen, e qualche volta di sei coppie Grenet aventi piccolissima resistenza interna. Le coppie di Bunsen erano montate con soluzione di solfato di zinco, ed acido azotico sempre nuovo, o adoperato poche volte, e ciò onde avere una corrente assai costante, quantunque debole avendo esse una resistenza interna notevolmente maggiore di quella delle coppie Bunsen ordinarie.

Coll' acido azotico adoperato troppe volte, non potevo riescire a misurare il magnetismo temporario, giacchè la corrente scemava non appena chiuso il circuito, e la scala vedevasi nel cannocchiale spostarsi in modo continuo, indicante diminuzione del momento magnetico. Oltre a ciò l' intensità della corrente al momento della chiusura non era costante, ma dipendeva dal tempo durante il quale il circuito stesso essendo rimasto aperto, la pila avea potuto più o meno depolarizzarsi.

Qualche volta occorreva che ripetessi in più giorni delle misure comparative, e perciò era necessario un mezzo per riconoscere se l' intensità della corrente era o no la stessa per ogni misura, e ridurla, quando non lo fosse, all' eguaglianza. In mancanza di meglio adoperai un cerchio di filo di rame, facente parte del circuito, collocato intorno all' ago del galvanometro, e col suo piano, verticale e passante pel meridiano magnetico. Letta la deviazione, mentre dal rocchetto R era tolta ogni massa magnetica, escludevo il cerchio dal circuito, con che, per la sua piccolissima resistenza, non variava certo sensibilmente l' intensità della corrente.

Infine trovai comodo di spegnere prontamente le oscillazioni dell' ago, maneggiando con arte una calamita tenuta nella mano, e che deponevo assai lungi dal galvanometro nell' atto della lettura della scala. Quando le oscillazioni erano ridotte a non essere che di pochi millimetri, ne leggevo tre consecutive, calcolando poi nel modo ordinario la posizione di fermata.

Misura del magnetismo permanente.

22. Per misurare il magnetismo permanente, in molti casi non occorre nessuna nuova disposizione. Basta infatti leggere la deviazione dopo avere aperto il circuito. Ma se la sbarra adoperata è assai corta e grossa, il magnetismo permanente ch'essa acquista è moltissimo minore del temporario, e può accadere che le deviazioni corrispondenti siano troppo piccole. Non si può in questi casi collocare i rocchetti più vicini al galvanometro, giacchè diventa più difficile ottenere la compensazione fra i due rocchetti, ed anche perchè le deviazioni prodotte dal magnetismo temporario possono divenire troppo grandi e uscire dalla scala.

Non si può far altro che spostare la sbarra, evitando di scuoterla od urtarla, e porla a minore distanza dall' ago sospeso, quando, misurato che si abbia il magnetismo temporario, vuolsi conoscere il permanente. Naturalmente devonsi prendere le massime cure, onde in esperienze di confronto, la sbarra si collochi sempre nelle stesse posizioni. Perciò è bene che essa riposi sopra alcune lastrine di vetro fra loro collegate, e che l' estremo della sbarra rivolto verso il galvanometro appoggi pure contro una lastrina di vetro, che ne determina la distanza dall' istrumento. Prendendo poi una sbarra di egual lunghezza di quella adoperata ma assai più sottile, la quale acquista maggior magnetismo permanente, e collocata successivamente nella posizione che ha la sbarra in esperimento quand' è entro il rocchetto, e sull' altro sostegno più prossimo al galvanometro, sarà facile determinare in qual rapporto si aumentano nel secondo caso le deviazioni, onde ridurre le misure tanto del magnetismo temporario che del permanente, ad una stessa unità.

In molte esperienze occorre solo di misurare il magnetismo permanente. Il rocchetto magnetizzante si tiene allora lontano dall' istrumento di misura, e si porta la sbarra sopra un sostegno prossimo al galvanometro, dopo averla magnetizzata.

Se la sbarra è assai corta ed assai grossa, per esempio lunga 58^{mm} e grossa 30^{mm}, è indispensabile porla a pochi centimetri dall' ago sospeso. In tal caso se l' asse della sbarra non è esattamente all' altezza dell' asse dell' ago sospeso, si ha una causa d'errore nel magnetismo che in essa induce l' azione terrestre. Così pure se la sbarra non è perpendicolare al meridiano magnetico ed equidistante dai poli dell' ago mobile, si hanno deviazioni dovute all' influenza dell' ago sulla sbarra. Si dovrà dunque far in modo che messa a posto una sbarra non magnetizzata, essa risulti senza azione sull' ago. In caso di deviazione si riconosce se è dovuta a magnetismo permanente della sbarra o ad altre cause, col capovolgerla; se la deviazione osservata è solo effetto di calamitazione della sbarra, la deviazione deve cangiar segno senza cangiar valore.

23. Volendo confrontare il momento magnetico che in varie circostanze acquista una sbarra, s' incontra una grave difficoltà nel magnetismo permanente ch' essa conserva, e che altera le successive misure. È dunque necessario esaminare dap-

prima come varia il momento magnetico temporario ed il permanente d' una stessa sbarra, esposta ripetutamente all' azione d' una medesima corrente, onde vedere in quali casi essa potrà adoperarsi più volte.

Posta una sbarra entro il rocchetto *R* e inviata più volte la corrente, si riconosce, che il magnetismo temporario ed il permanente crescono volta per volta, ma che le variazioni ad ogni nuova corrente sono sempre minori. Così per esempio con una sbarretta lunga 120^{mm} e grossa 7^{mm}, di acciaio non temprato posta nel rocchetto *A*, ottenni:

Chiuso il circuito (magnetismo temporario)	175^{mm}
Aperto (magnetismo permanente)	45
Chiuso	177
Aperto	46
Chiuso	178
Aperto	47
Chiuso	178,5
Aperto	48
Dopo molte chiusure ed aperture, circuito chiuso	179
Aperto	49
Invertendo due volte la corrente, circuito chiuso	173
Aperto	41,5

Con sbarre di svariatissime dimensioni, con fasci di fili, lamine etc, ottenni costantemente un risultato analogo; anche se invece di chiudere ed aprire rapidamente il circuito, si facevano lentamente le chiusure ed aperture. Gli ultimi numeri mostrano la diminuzione di magnetismo dovuta all' invertire la corrente (art. 18) di cui devesi sempre tener conto.

Studiando le variazioni del magnetismo permanente dovute a varie cagioni, potrà dunque adoperarsi una stessa sbarra due volte, purchè la seconda esperienza sia quella nella quale essa acquista maggior magnetismo, ciò che si riesce a prevedere se non altro con tentativi. Se effettivamente il magnetismo acquistato nel secondo caso supera quello del primo, assai più che non sia il lieve aumento che abbiamo notato, sarà lecito concludere che anche presa nello stato naturale la sbarra acquisterebbe in quel secondo caso maggior magnetismo. Anche pel magnetismo temporario dovranno farsi le esperienze in modo che il momento magnetico ottenuto sia di volta in volta maggiore. In alcuni casi il magnetismo temporario o permanente che in date circostanze acquista una sbarra è così differente, da potersi ottenere il magnetismo minore dopo il maggiore.

Un altro metodo di sperimentare consiste nel prendere sbarre identiche per quanto è possibile, e cimentarle separatamente. Se per ogni circostanza che si studia, si ripete con più sbarre la misura, e si prende la media, i risultati ottenuti po-

tranno considerarsi come relativi ad una stessa sbarra, purchè non si sieno incontrati in casi simili, risultati numerici troppo discordanti. Questo metodo è assai lungo, e non sempre possibile.

Un ultimo mezzo rimane, ed è quello di adoperare nelle esperienze di confronto sempre la stessa sbarra, arroventandola però ogni volta, onde perda il magnetismo rimastovi. Questo metodo potrà applicarsi quando la sbarra da stud'are sia assai rincotta. Iu questo caso i successivi riscaldamenti non ne alterano che di poco le proprietà, ed in ogni caso, alla fine di una serie di misure, ripetendo alcune delle prime, si potrà vedere se la sbarra siasi veramente conservata senza alterazioni.

L' uno o l' altro di questi metodi, e spesso tutti successivamente, furono adottati nelle esperienze che finalmente passo a narrare. Adoperai quasi sempre l' acciaio rincotto, e ciò dovrà sottintendersi, quando non sia espressamente avvertito il contrario.

Faccio infine notare che i numeri di varie serie di misure, non sono sempre fra loro comparabili, avendo dovuto a norma del bisogno variare la sensibilità, col porre le sbarre a distanze diverse dall' istrumento di misura.

CAPITOLO IV.

Sui fenomeni d' induzione che accompagnano la magnetizzazione.

24. Si crede generalmente che i diaframmi metallici introdotti nelle eliche magnetizzanti non abbiano sensibile influenza sulla magnetizzazione prodotta con correnti voltaiche, mentre è noto, specialmente per le esperienze di Savary, che essi agiscono efficacemente nella magnetizzazione prodotta dalle scariche dei condensatori. Tale almeno è la conclusione cui giunse l' Abria, in un suo lavoro.

Le esperienze che sto per narrare mostrano al contrario che la presenza di diaframmi metallici modifica grandemente la magnetizzazione.

Introdussi nel rocchetto *C* (art. 21) una sbarretta d' acciaio lunga 50^{mm} e grossa 5^{mm}, ora sola, ora circondandola con un tubo d' ottone di 16^{mm} di diametro, lungo 80^{mm} e dello spessore di 1^{mm}. Il magnetismo permanente fu sempre maggiore nel secondo caso che nel primo. Per esempio ottenni in media

senza tubo . . . 160^{mm}
con tubo . . . . 193^{mm}

Adoperando un tubo di maggior grossezza o di maggior diametro, la differenza si esagera ancora. Così magnetizzando la sbarra, ora collocandola da sola nel centro del rocchetto, ora riempiendo l' intervallo con mercurio ottenni

senza mercurio . . 151^{mm}
con mercurio. . . 213^{mm}

Si hanno effetti anche più spiccati adoperando sbarre d' acciaio brevi e grosse. Così per esempio, adoperando una sbarra lunga 50^{mm} e grossa 18^{mm} ebbi

senza mercurio . . 21^{mm}
con mercurio . . . . 48^{mm}.

Il fenomeno riesce con minor intensità, se si fa uso di rocchetti a molti giri. Per esempio col rochetto B, il tubo d' ottone grosso 1^{mm} non dà quasi alcun effetto con una sbarretta lunga 50^{mm} e grossa 5^{mm}, ma bisogna adoperare o tubo più grosso o sbarra più grossa.

Potremo dunque asserire che:

I. Legge. *Il magnetismo permanente d' una sbarra cresce alquanto circondandola di un diaframma metallico; e tanto più, quanto più grosso è il diaframma, quanto più grossa e corta è la sbarra, e quanto minore è il numero dei giri del filo del rocchetto.*

25. La spiegazione di questi fatti è semplicissima. Sia R, Fig. 7, il rocchetto percorso dalla corrente nel senso del freccia, T il tubo metallico. Nel momento in cui si apre il circuito si sviluppa nel tubo una corrente indotta diretta, nel senso cioè della freccia, la quale in certo modo prolunga l' azione della corrente principale. L' azione della corrente sulla sbarra contenuta nel tubo, decresce dunque più lentamente, e le molecole ritornando con minor velocità verso la posizione d' equilibrio, se ne fermeranno più lontane, d' onde una maggiore magnetizzazione permanente.

Se questa spiegazione è esatta, nel momento della chiusura deve accadere un fenomeno opposto, giacchè svolgendosi in T una corrente inversa, deve rendersi più lenta e graduale a prodursi sulla sbarra l' azione della corrente principale, le molecole riceveranno minor velocità, e la sbarra acquisterà un magnetismo minore. Se poi la sbarra si porrà non entro il tubo ma a fianco di esso, alla chiusura e all' apertura del circuito dovranno aversi effetti rispettivamente opposti. Infatti la corrente indotta al momento della chiusura agisce sopra una sbarra posta in A all' inverso della corrente principale, mentre agisce in modo cospirante sopra una sbarra posta in B; in quest' ultima le molecole devieranno con maggior velocità. Così la corrente indotta d' apertura, la quale agisce in A nello stesso senso della principale, agisce su B in senso contrario, ed in questa le molecole torneranno con maggior velocità verso la posizione d' equilibrio.

Per separare gli effetti di chiusura e quelli di apertura, basta fare esperienze ora chiudendo lentamente il circuito, nel qual caso non permettendo alle molecole di acquistare velocità sensibile, resterà manifesta solo l' influenza dell' apertura, ora aprendo lentamente, nel quale caso si mostrerà l'effetto della chiusura. Oltre a ciò si dovranno stabilire i confronti fra esperienze eseguite senza mai togliere il tubo dal suo posto. Infatti, per la presenza del tubo, si prolunga verosimilmente lo stato variabile di chiusura della corrente; ma più ancora, ad ogni

movimento delle molecole della sbarra devonsi svolgere delle correnti indotte nelle masse metalliche circostanti di direzione tale, che per la legge di Lenz risulterà rallentato il movimento delle molecole stesse. Infine, siccome indipendentemente dal tubo, il modo di chiusura e di apertura influisce sul momento acquistato dalla sbarra, come vedremo in un prossimo capitolo, così non dovranno fra loro confrontarsi che i risultati ottenuti chiudendo ed aprendo in una data maniera il circuito, ora colla sbarretta entro il tubo, ora fuori.

Disposi dunque l'esperimento nel modo seguente [Fig. 7.]

Prese due sbarettine lunghe 50^{mm} e grosse 5^{mm}, ben rincotte, ne posi una entro il tubo d'ottone collocato entro il rocchetto C (art. 21). Chiuso ed aperto il circuito in un dato modo, collocava la stessa sbarettina fuori del tubo d'ottone, in B, e ripetevo l'esperienza. Colla seconda sbarra facevo di nuovo le due misure, ma in ordine inverso, onde potere riconoscere, in ogni misura, l'effetto del magnetismo rimasto dopo la precedente. Dopo queste quattro misure riscaldavo le sbarre per smagnetizzarle, e facevo in modo simile altre quattro misure chiudendo od aprendo il circuito in modo diverso, e così di seguito. Fatte 16 misure avevo esauriti tutti i casi possibili, ma ripetei le prime quattro misure onde vedere se le sbarre col ripetuto riscaldamento si erano modificate; ciò che non mi è accaduto mai in modo sensibile adoperando sbarre assai rincotte. Ecco i risultati ottenuti in una delle serie di esperienze da me fatte, le quali furono sempre concordanti.

Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente

	Magnetismo permanente
1. Sbarra dentro il tubo . .	125^{mm}
2. „ fuori del tubo . .	130^{mm}
3. Sbarra fuori del tubo . .	128
4. „ entro il tubo . .	133

Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente

5. Sbarra entro il tubo . .	118
6. „ fuori del tubo . .	101
7. Sbarra fuori dal tubo . .	80
8. „ entro il tubo . .	120

Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente

9. Sbarra entro il tubo . . 228
10. „ fuori del tubo . . 318

---

11. Sbarra fuori del tubo . . 250
12. „ dentro il tubo . . 263

Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente

13. Sbarra entro il tubo . . 208
14. „ fuori dal tubo . . 225

---

15. Sbarra fuori del tubo . . 186
16. „ entro il tubo . . 239

I risultati sperimentali confermano la teoria. Infatti confrontando fra loro le prime otto misure, fra le quali le prime quattro diversificano dalle quattro altre solo pel modo di apertura, si vede che l' aprire rapidamente il circuito fa acquistare alla sbarra maggior magnetismo quando è collocata entro il tubo, che quando è fuori, come si era previsto. Dalle misure 9, 10, 11, 12 confrontate colle 1, 2, 3, 4, si vede che la chiusura rapida del circuito fa sì che acquisti maggior magnetismo la sbarra quando è collocata fuori del tubo, che quando è posta dentro. Se nelle misure 11 e 12 si ha un risultato opposto a quello delle 9 e 10, è in causa del magnetismo conservato dalla sbarra dopo la magnetizzazione 11. Una osservazione simile va fatta in altri casi. Infine le quattro ultime misure mostrano, che l' effetto della chiusura e quello dell' apertura non si compensano, ma quest' ultimo prevale, come già risultava dalle prime esperienze riportate in questo articolo.

Questi risultati possono concisamente enunciarsi così:

In una sbarra d' acciaio circondata da un tubo metallico, lo spostamento delle molecole si compie con maggiore lentezza, che quando la stessa sbarra sia accostata esternamente al tubo. Ed anche, secondo i risultati che troveremo nell' art. 42, *una sbarra circondata da tubo metallico, si comporta, in confronto di una alla quale il tubo è accostato esternamente, come se fosse più fortemente temprata.*

Se invece di misurare il magnetismo permanente, si misura direttamente il temporario, nel modo indicato nel precedente capitolo, si trova confermata l' influenza del diaframma metallico.

In una esperienza ottenni:

	Magnetismo temporario
Sbarra posta entro il tubo, chiudendo rapidamente il circuito . . .	58^{mm}
Aprendo e chiudendo di nuovo	58,5
Messa la sbarra fuori del tubo e chiudendo rapidamente	62

Considerando poi i fatti indipendentemente da ogni teoria, abbiamo questa nuova legge :

II. Legge. *Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito, una sbarra acquista maggior magnetismo quando è circondata da un tubo, che quando vi è accostata esternamente; chiudendo invece rapidamente ed aprendo lentamente si ha un risultato opposto, il quale prevale se la chiusura e l' apertura sono entrambe istantanee.*

Le differenze sono tanto maggiori quanto più è grosso il tubo, quanto minore è il numero di giri dell' elica e quanto maggiore è la grossezza della sbarra in rapporto alla sua lunghezza. Senza riportare tutti i numeri che mi hanno di ciò persuaso, mostrerò solo come varîno alcuni dei risultati, adoperando una sbarra lunga 21^{mm} e grossa 14^{mm}.

Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente

Sbarra posta entro il tubo . . 24^{mm}
„ posta fuori 57

Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente

Sbarra fuori del tubo. . . — 8
„ entro il tubo . . . + 2

Dunque l' induzione nella chiusura del circuito può dare un magnetismo più che doppio alla sbarra, quando è fuori del tubo, che quando è nell' interno. Nel caso dell' apertura, non solo nella sbarra posta fuori è minore il magnetismo, ma può anche divenire inverso, ciò che sarà spiegato nel Capitolo VII.

Caso in cui si abbiano due sbarre
l' una esterna e l' altra interna al tubo metallico.

26. Se mentre si fanno le esperienze descritte or ora, si introducono nel rocchetto in pari tempo due sbarre, l' una entro il tubo e l' altra fuori, i risultati non variano se le due sbarre sono fra loro abbastanza lontane per non reagire l' una sull' altra. Se sono vicine, come nella figura 8, l' azione reciproca di esse,

si aggiunge all' effetto dell' induzione, e le differenze nei valori del momento magnetico divengono anche maggiori. Infatti all' istante della chiusura la sbarra esterna si magnetizza più rapidamente, ed agendo sull' interna in senso opposto dell' elica, ne rende anche minore il momento magnetico. Nell' istante dell' apertura è l' interna che si smagnetizza più adagio, ed accelera vieppiù colla sua azione lo smagnetizzarsi dell' esterna. Le variazioni del momento magnetico delle sbarre sono in tal caso tanto notevoli, che si può il più delle volte adoperare ripetutamente la stessa sbarra per più misure, senza smagnetizzarla.

Trascrivo quì una serie di esperienze eseguite col solito rocchetto C, col solito tubo d' ottone e con due sbarettine lunghe 50^{mm} e grosse 5^{mm}, delle quali l' esterna al tubo indicheremo con E e l' interna con I.

1.	Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente	E	83^{mm}
2.	" " " "	I	79
3.	Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente	E	142
4.	" " " "	I	81
5.	Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente	E	95
6.	" " " "	I	86
7.	Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente	E	151
8.	" " (come in 3 e 4) . .	I	85
9.	Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente	E	76
10.	" " " "	I	85

Dal confronto di questi numeri si vede quanto sia grande l' aumento di magnetismo della sbarra esterna al tubo, rispetto all' interna, nell' istante della chiusura, e l' opposto effetto nell' istante dell' apertura. Anche quì può dirsi che la sbarra interna si comporta rispetto all' esterna, come se fosse più temprata.

Caso di tubi concentrici.

27. I risultati finora esposti faranno forse di già prevedere le conseguenze che se ne possono trarre, relativamente a ciò che accade nella magnetizzazione delle varie parti d' una stessa sbarra d' acciaio. Per giungere a risultati che meglio si prestassero a quello scopo, pensai di ripetere le esperienze dell' articolo precedente, sostituendo alle due sbarrette, due lastre cilindriche aperte con un taglio longitudinale, l' una d' acciaio grossa 1^{mm} e lunga 63^{mm} che si adatta alla superficie interna del tubo d' ottone, l' altra di acciaio o di ferro di egual lunghezza ed applicata alla superficie esterna. Il porre fuori del tubo del ferro dolce in luogo di ac-

ciaio, doveva rendere anche più marcate le variazioni nel momento magnetico dell' acciaio interno, che solo misuravo.

Ecco i risultati ottenuti, mentre il tubo di ferro che si trovava all' esterno del tubo di ottone, aveva circa $^1/_{10}$ di millimetro di spessore, e sempre col rocchetto *C*:

Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente per molte volte di seguito 60^{mm}
Ripetendo la chiusura rapida ed apertura lenta un' altra volta 63
Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente 99
Sostituendo all' ottone un tubo di cartone, e chiudendo ed aprendo ancora lentamente . , ... 101

Le prime due misure mostrano quale può essere al più l' aumento di magnetismo dovuto alla circostanza che quel tubo di acciaio si magnetizza ripetutamente. La terza misura confrontata con quelle due fa vedere come nelle prime l' induzione nel tubo di ottone nell' atto della chiusura diminuisce il magnetismo dell' acciaio interno. Chiudendo lentamente l' effetto dell' induzione è impedito, e si ha nell' acciaio maggior magnetismo. Che l' effetto del tubo di ottone sia tolto, lo prova l' ultimo risultato, in cui un tubo di cartone è sostituito senza sensibile differenza a quello d' ottone. Se invece d' aprire lentamente il circuito, si apre rapidamente, nell' ultimo caso si avrebbe magnetismo inverso (vedi art. 44).

Se invece del tubo di ferro sottile se ne adopera uno più grosso, per esempio di 2^{mm},5 si ha maggior differenza di risultati prodotti dalla presenza del tubo d' ottone, e più ancora se la corrente è meno intensa.

Ottenni per esempio:

	4 coppie Bunsen	8 coppie
Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente più volte	13	40
Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente un' altra volta . . . . :	14	41,5
Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente con tubo di cartone in luogo di quello d' ottone. .	69	81,5

Lasciando il tubo d' ottone e togliendo quello di ferro esterno, si ottiene un magnetismo anche maggiore che nell' ultimo caso. La presenza simultanea del tubo d' ottone e di quello di ferro producono una diminuzione di magnetismo nell' acciaio interno che nè il tubo d' ottone, nè il ferro potrebbero produrre separatamente. La corrente inversa di chiusura che si sviluppa nel diaframma conduttore, accelera lo spostamento delle molecole nel tubo esterno e lo ritarda nell' interno; il magnetismo che si sviluppa rapidamente nel ferro elìde in parte sull' acciaio l' azione dell' elica.

Sostituendo al tubo di ferro uno d' acciaio più o meno temprato, l' acciaio in-

terno al tubo d' ottone si magnetizza di più. Infatti nell' acciaio, e quanto più è temprato, le molecole si spostano meno rapidamente; quindi quelle del tubo interno hanno maggior tempo di spostarsi prima che l' esterno elida l' effetto dell' elica.

Ecco i risultati d' un' esperienza:

Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente con ferro esterno all'ottone	48^{mm}
Con acciaio rincotto di eguali dimensioni, invece del ferro .	102
Con acciaio temprato	156

Volendo adoperare il rocchetto *B*, invece del solito *C*, bisogna far uso pure d' un tubo di ottone più grosso, se no le differenze sono assai meno marcate; e ciò per la ragione più volte indicata. Col rocchetto *B* ottenni fenomeni simili ai precedenti, quantunque meno accentuati, adoperando uno strato annullare di mercurio di 2^{mm},5 di spessore, invece del solito tubo d' ottone.

CAPITOLO V.

Sulla distribuzione interna del magnetismo.

Penetrazione del magnetismo.

28. Le cose esposte nei precedenti articoli, costituiscono una teoria del fatto dimostrato dal Jamin, e cioè che in una sbarra d' acciaio il magnetismo risiede principalmente negli strati superciali e decresce verso l' interno. Infatti quelle stesse correnti d' induzione che sviluppansi nel tubo d' ottone delle esperienze narrate, devono certamente svilupparsi nella massa stessa dell' acciaio. Uno strato superficiale di questo, rispetto ad uno strato più interno, si troverà dunque nelle stesse condizioni della lastra d' acciaio esterna al tubo d' ottone, rispetto all' interna. In altre parole le correnti indotte fanno sì che lo spostamento delle molecole nell'atto della magnetizzazione sia tanto più rapido quanto più si trovano prossime alla superficie della sbarra. Le molecole superficiali deviando prima delle altre, diminuiranno sulle molecole più interne l' azione dell' elica, e così si troverà in ultimo un magnetismo temporario decrescente dalla superficie verso l' interno.

Nel momento dell' apertura, abbenchè le molecole superficiali ritornino più rapidamente delle altre verso la posizione iniziale, pure, specialmente nel caso di sbarre assai lunghe, potranno gli strati superficiali conservare magnetismo maggiore degli altri, come risulta dalle esperienze del Jamin, relative appunto al magnetismo permanente di sbarre non troppo brevi rispetto alle loro sezioni.

Quanto più la sbarra che si considera sarà temprata, tanto più profondamente si farà la magnetizzazione. Infatti ciò risulta dagli ultimi numeri che ho riportati.

Nel ferro dolce invece penetrerà a poca profondità, precisamente come le esperienze hanno dimostrato.

29. Se questa spiegazione della penetrazione è la vera, dovremo trovare una differenza fra l'azione d'un tubo di acciaio o più ancora di ferro, nel preservare una sbarra d'acciaio in esso contenuta dalla magnetizzazione, secondo che il tubo stesso è intero o tagliato longitudinalmente.

Presi due tubi di ferro dolce grossi $2^{mm},5$ lunghi 63^{mm} e del diametro esterno di 22^{mm}, l'uno intero, l'altro con un taglio longitudinale. Messo o l'uno o l'altro nel rocchetto *C*, con entro un tubo d'acciaio (quello stesso che stava entro il tubo d'ottone nelle esperienze dell'art. precedente), e adoperando 8 coppie Bunsen, ottenni chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente il circuito:

Magnetismo dell' acciaio entro il tubo intero . . Traccie incerte
„ „ „ „ tagliato. . 102^{mm}

Col rocchetto *B*, che ha filo assai più lungo, l'acciaio si magnetizza di più anche entro il tubo di ferro intero, evidentemente per il rallentamento nel moto delle molecole dovuto all'induzione di esse sul circuito del rocchetto. Ecco alcuni risultati:

Num. delle coppie	Magnetismo dell'acciaio entro il tubo intero	Magnetismo dell'acciaio entro il tubo tagliato
2	6	25
3	25	55
4	48	85
6	56	93
8	80	130

Oltre della maggior magnetizzazione dell'acciaio entro il tubo tagliato, si vede pure che crescendo l'intensità della corrente, l'effetto del tubo intero si fa relativamente minore, ciò che si accorda col fatto dimostrato dal Jamin, e cioè che la magnetizzazione si fa grado a grado più profonda, al crescere della intensità della corrente.

Ma se si ripetono le ultime esperienze chiudendo sempre lentamente il circuito, ottengonsi risultati sensibilmente eguali tanto col tubo intero che col tagliato. Ciò è ben naturale poichè chiudendo lentamente il circuito, le molecole del tubo di ferro devìano nei due casi con eguale lentezza. Possiamo dunque dire riassumendo che:

III. Legge. *Una sbarra d'acciaio posta entro un tubo di ferro, si magnetizza assai meno quando è intero che quando è tagliato, e la differenza è tanto maggiore quanto meno intensa è la corrente; ma sparisce chiudendo lentamente il circuito.*

Influenza del modo di chiusura e d'apertura del circuito sulla penetrazione del magnetismo.

30. L'ultima osservazione ci conduce a questa singolare conseguenza, e cioè che la penetrazione del magnetismo in una sbarra deve essere diversa secondo il modo in cui si fa la chiusura e l'apertura del circuito, e che in particolare colla chiusura lenta e graduale devesi sviluppare magnetismo in tutta la sua massa. Infatti così facendo le molecole prossime alla superficie non possono acquistare maggior velocità delle altre, e rendere così minore o nulla la magnetizzazione delle parti interne della sbarra. Una così inaspettata conclusione meritava di essere accuratamente verificata, e per ciò fare ho dovuto ricorrere all'unico mezzo possibile, quello stesso adoperato dal Jamin, che consiste nello sciogliere poco a poco la sbarra magnetizzata in un acido, e misurarne di tratto in tratto il momento magnetico. A questo metodo si possono muovere serie obbiezioni quando vogliasi farlo servire ad una determinazione quantitativa del magnetismo esistente nei successivi strati che si tolgono alla sbarra; ma è legittimo se destinato solo ad un confronto fra il diverso modo di penetrazione della magnetizzazione in sbarre eguali.

Nelle mie esperienze mi servii per sciogliere l'acciaio, di un miscuglio di acido cloridrico e azotico, diluito con acqua, onde rendere regolare l'azione chimica, ed impedire che le sbarre esaminate si riscaldassero. Le sbarre d'acciaio venivano prima arroventate onde smagnetizzarle, e pulite alla superficie, erano pesate accuratamente. Allora io le magnetizzava e ne misurava il momento magnetico; e poi, poste nell'acido, abbastanza lontane le une dalle altre e sempre perpendicolari al meridiano magnetico, ad intervalli ne misuràvo ancora e il peso ed il momento. Le esperienze così condotte, diedero dei risultati notevolissimi, e regolari.

Ecco le misure relative a 6 sbarre due a due eguali fra loro. Per le quattro più lunghe fu adoperato il rocchetto *A* e per le due altre il rocchetto *C*. Per tutte poi 8 coppie Bunsen.

	Peso	Momento magnetico chiudendo lentamente il circuito ed aprendolo lentamente		Peso	Momento magnetico chiudendo rapidamente ed aprendo lent.
Sbarra lunga. . 87^{mm} " grossa . 4,9	12^{gr},07	142	Sbarra lunga. . 87^{mm} " grossa . . 5	12^{gr},15	136
	11 36	102		11 52	84
	9 25	80		9 72	50
	8 30	76		8 82	46

	Peso	Momento magnetico chiudendo lentamente il circuito ed aprendolo lentamente		Peso	Momento magnetico chiudendo rapid.mente ed aprendo lent.
Sbarra lunga . 108mm	19gr.12	77	Sbarra lunga . 108mm	17gr.80	101
" grossa . 5,2	17 90	52	" grossa . 5	16 57	55
	17 07	50		15 50	44
	13 87	41		12 54	29
	10 35	38		9 85	22
Sbarra lunga . 26mm	46 11	51	Sbarra lunga . 27mm	47 96	118
" grossa . 18	44 44	34	" grossa . 18	45 35	42
	43 05	28		43 45	28
	42 12	27		40 50	15
	40 03	26		40 02	13

In questa tavola i numeri messi ad eguale altezza, sono relativi a sbarre pressochè eguali in dimensione, e dal loro esame apparisce che colla chiusura rapida del circuito, si ottiene maggior magnetizzazione nelle parti superficiali e minore nelle interne, poichè diffatti, il momento magnetico decresce assai più rapidamente, col togliere alla sbarra gli strati superficiali, in quella che fu magnetizzata con chiusura istantanea, che nell' altra. Anzi, benchè come dimostreremo in seguito, colla chiusura rapida del circuito la sbarra acquisti maggior momento magnetico, tuttavia tanto rapidamente esso decresce collo svestirla degli strati superficiali, che la differenza presto sparisce, od anche si manifesta in senso contrario.

Possiamo dunque con certezza asserire che:

IV. Legge. *Il magnetismo penetra più o meno profondamente in una sbarra d'acciaio, secondo che il circuito viene chiuso più o meno lentamente.*

Ne consegue che con rocchetti a molti giri la magnetizzazione penetrerà a maggior profondità, poichè per l' induzione è maggiormente ritardato il moto delle molecole.

31. Anche il modo d' apertura del circuito deve influire sulla distribuzione del magnetismo permanente. Aprendo ad un tratto il circuito, le molecole superficiali retrocedono con maggior velocità delle altre; perciò deve trovarsi tanto maggior magnetismo nei primi strati, quanto più lentamente si apre il circuito. Ecco come esempio i risultati d' una esperienza:

2 sbarre lunghe 68^{mm} e grosse 3^{mm},8

Peso	Momento della 1.^{a} sbarra chiudendo ed aprendo lent.	Peso	Momento della 2.^{a} sbarra chiudendo lent. ed aprendo rapid.
5^{gr},56	75^{mm}	5^{gr},57	74^{mm}
5 18	55	5 38	65
4 27	40	4 50	49
3 74	38	3 72	45
2 62	35	2 60	44

La legge del Jamin relativa alla distribuzione interna del magnetismo, non può dunque considerarsi come applicabile che al caso speciale di sbarre assai lunghe e sottili, sul magnetismo delle quali meno influiscono le condizioni di chiusura e d'apertura del circuito. Ma nei casi di sbarre brevi, e specialmente chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito, si ha una distribuzione tutt'affatto diversa, ed anzi può arrivarsi ad ottenere maggior magnetismo nelle parti interne che nelle superficiali della sbarra, o più ancora, ad avere in queste una magnetizzazione di segno contrario.

Reco come esempio le misure relative a tre sbarre diverse. Il circuito veniva chiuso lentamente ed aperto istantaneamente.

Sbarra lunga 122^{mm} „ grossa 6^{mm},6		Sbarra lunga 72^{mm} „ grossa 10		Sbarra lunga 64^{mm} „ grossa 18^{mm},6	
Peso	Momento Magnetico	Peso	Momento Magnetico	Peso	Momento Magnetico
31^{gr},86	79	45^{gr},10	104	118^{gr},86	10,5
31 19	74	42 82	144	115 60	68,5
30 18	70	41 59	147	113 87	89
24 25	46	37 05	106	105 64	104
20 05	40	35 40	102	103 95	113
		32 77	58	99 75	130
				96 85	139
				86 50	136
				78 40	128

Diametro della Sbarra alla fine delle esperienze 15^{mm}

Nella prima sbarra, la cui lunghezza è circa diciotto volte il diametro, mano a mano che procede la corrosione operata dall'acido, il magnetismo decresce. Invece nella seconda e nella terza che rispettivamente sono lunghe sette volte e tre volte e mezzo il loro diametro, si ha il singolar risultato che dapprima il magnetismo

aumenta invece che diminuire. Quest' aumento è più marcato e più continuato nell' ultima sbarra. Ciò prova che gli strati superficiali avevano acquistato una polarità inversa, effetto della maggior velocità acquistata dalle molecole nell'atto di tornare alla posizione d' equilibrio, per la quale velocità esse l' oltrepassano e si arrestano dalla parte opposta.

Possiamo dunque enunciare che:

V. Legge. *Coll' apertura rapida del circuito, si diminuisce la magnetizzazione della sbarra specialmente negli strati superficiali. Essa può quindi restare con maggior magnetismo nelle parti più interne che in quelle prossime alla superficie, od anche presentare in queste ultime una polarità in senso opposto.*

32. Se la sbarra è assai corta e grossa, il magnetismo inverso degli strati superficiali può superare quello diretto degli strati interni. Quando ciò accada studieremo in un prossimo capitolo.

Una sbarra assai corta e grossa si presta quindi meglio d' ogni altra per mostrare quanto grande sia l' influenza del modo di chiusura ed apertura del circuito, sulla distribuzione interna del magnetismo. Nelle esperienze seguenti adoperai sbarre la cui lunghezza era di poco superiore al diametro.

Sbarra lunga 23^{mm},9 „ grossa 17^{mm}		Sbarra lunga 24^{mm},2 „ grossa 16^{mm},5		Sbarra lunga 24^{mm} „ grossa 16^{mm},6	
Peso	Momento magnetico chiudendo lentamente ed aprendo rapid.	Peso	Momento magnetico chiudendo lentamente ed aprendo lent.	Peso	Momento magnetico chiudendo rapidamente ed aprendo lent.
42^{gr},24	— 21^{mm},5	40^{gr},10	+ 124^{mm},5	41^{gr},12	+ 161^{mm}
40 90	+ 25,5	39 98	90	40 64	129
39 72	54	38 48	83,5	39 83	80,5
38 55	61,5	37 47	71	37 51	37
38 04	65,5	36 92	69,5	36 67	27
35 97	80	35 17	66,5	32 15	10
33 13	84	32 01	62		

Colla prima sbarra, che magnetizzai chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito, ebbi dapprima magnetismo inverso dell' ordinario (Cap. VII), che però fu ben presto sostituito da magnetismo diretto che crebbe, continuando l' azione dell' acido. Colla seconda, che magnetizzai chiudendo ed aprendo lentamente, trovai una regolare diminuzione di magnetismo. Infine colla terza che fu magnetizzata chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente il circuito, ottenni mano a mano che la sbarra si scioglieva nell' acido, una diminuzione assai più rapida di momento magnetico, ciò che è conforme ai risultati dell' art. 30.

La diversa distribuzione del magnetismo nelle tre sbarre, è messa in evidenza

colla rappresentazione grafica della figura 9, nella quale ho preso per ascisse le diminuzioni di peso di ogni sbarra, e per ordinate i momenti magnetici. La curva A_1B_1 è relativa alla prima sbarra; essa comincia al disotto dell' asse delle ascisse, essendo dapprima inversa la polarità. Le curve A_2B_2 ed A_3B_3 si riferiscono rispettivamente alla seconda e terza sbarra. I punti forniti dai numeri delle tavole, sono indicati con piccoli cerchi, o con una piccola croce.

Il dipendere la distribuzione del magnetismo nell' interno d' una sbarra, in modo tanto evidente, dalle condizioni nelle quali essa viene posta, specialmente dal modo nel quale comincia e cessa d' agire la causa magnetizzante, persuaderà ognuno della convenienza di non accettare il termine di *conducibilità magnetica* per esprimere la maggior o minore penetrazione della magnetizzazione. Questa denominazione infatti trae seco l' idea d' una proprietà del corpo considerato, dipendente solo dalla sua costituzione, di una costante caratteristica della qualità d' acciaio adoperata, che non dipenda da circostanze esterne.

Distribuzione del magnetismo in una sbarra smagnetizzata con corrente inversa.

33. Una sbarra può smagnetizzarsi con una corrente inversa di minore intensità, anche se tanto colla prima che colla seconda corrente, la chiusura si effettua lentamente. In questo caso non possono formarsi strati esterni di polarità inversa di quella degli interni, e la distruzione del magnetismo deve spiegarsi solo nel modo esposto nell' art. 19.

Presi una sbarra d' acciaio grossa 30^{mm} e lunga 60^{mm}, avente un foro cilindrico nel quale potevasi introdurre un cilindro dello stesso acciaio di egual lunghezza e grosso 10^{mm}. Magnetizzato il sistema con una corrente chiusa ed aperta lentamente, lo smagnetizzai con una corrente inversa di minore intensità determinata a tentativi, ed essa pure chiusa ed aperta lentamente. Separato il tubo esterno dal cilindro interno, li trovai entrambi sensibilmente smagnetizzati. Dopo averli arroventati ripetei l' esperienza chiudendo però rapidamente nei due casi il circuito. Dopo la separazione trovai il cilindro interno magnetizzato nel senso primitivo, ed il tubo in senso contrario. Nella seconda esperienza dunque, effettivamente intervengono a produrre l' apparente smagnetizzazione anche le opposte polarità degli strati esterni rispetto agli interni, mentre nella prima la smagnetizzazione avviene solo nel modo spiegato nell' art. citato.

Volli confermare questo risultato anche logorando nell' acido una sbarra smagnetizzata con corrente inversa.

Reco come esempio due serie di misure comparative fatte su sbarrette eguali. La prima fu magnetizzata chiudendo ed aprendo lentamente il circuito; essa acquistò un momento magnetico $+ 104$. Una corrente in senso opposto di minore intensità, ma maggiore un poco di quella necessaria a smagnetizzarla, ne ridusse il magnetismo a $- 28$. Fu messa allora nell' acido. L' altra sbarra fu trattata in modo simile, ma il circuito fu sempre chiuso ed aperto rapidamente.

Sbarre lunghe 129^{mm} e grosse $2^{mm},6$

1.ª Sbarra		2.ª Sbarra	
Peso	Momento magnetico	Peso	Momento magnetico
	+ 104^{mm}		+ 117^{mm}
$4^{gr},92$	— 28	$4^{gr},91$	— 22
4 39	— 13	4 40	— 5
3 89	— 8	3 87	+ 4
3 12	— 6	3 15	+ 8
2 65	— 5	2 77	+ 9
		2 60	+ 10
		1 33	+ 9

Grossezza finale della sbarra $1^{mm},3$

Dunque la sbarra che fu trattata a correnti chiuse ed aperte lentamente, mostrò un magnetismo decrescente; ma l'altra mostrò, come sempre trovò il Jamin, l'esistenza di strati superficiali magnetizzati nel senso della seconda corrente, ed altri più interni magnetizzati nel senso della prima corrente più intensa, giacchè il suo momento magnetico sotto l' azione dell' acido, dapprima scemò rapidamente, e poi cangiò di segno.

34. Sia che si chiuda rapidamente o lentamente il circuito, si trova sempre che una sbarra smagnetizzata da corrente inversa, si magnetizza più o meno con un' altra corrente, secondo la direzione di questa. Descrivo come esempio un' esperienza fatta con una sbarretta lunga 150^{mm} e grossa 5^{mm}.

	Magnetismo permanente
Chiuso lentamente ed aperto lentamente . . . . ; . .	97^{mm}
Inviato corrente inversa minore, essa pure lentamente . . .	2
Corrente inversa debole, sempre lentamente	2
La stessa corrente, ma diretta	19
Corrente un po' più forte inversa	— 13
La stessa „ diretta.	+ 37

Dunque la sbarra ha la solita tendenza a magnetizzarsi di più nel senso primitivo. Diremo dunque che:

VI. Legge. *Le proprietà di una sbarra smagnetizzata con corrente inversa, non sempre sono dovute alla esistenza di strati oppostamente magnetizzati; questi strati non si formano se il circuito si chiude ed apre lentamente.*

Conclusioni relative al modo in cui si forma la magnetizzazione nelle varie parti di una sbarra.

35. I risultati ottenuti colle esperienze esposte in questo capitolo, rischiarano alquanto i fenomeni complessi che accadono nella magnetizzazione, mostrando quanta parte vi abbia lo sviluppo di correnti indotte nella massa stessa del corpo magnetico.

Nell' istante della chiusura del circuito si sviluppano nella massa della sbarra, e specialmente alla superficie, delle correnti indotte inverse per le quali le molecole superficiali sono più rapidamente spostate, mentre le altre lo sono tanto più lentamente quanto più trovansi situate nell' interno della sbarra. Le molecole che devìano alla superficie, producono poco a poco sulle altre un' azione opposta a quella dell' elica, onde queste ultime sono vieppiù rallentate, e più prontamente si arrestano.

Il magnetismo temporario sviluppasi dunque con intensità decrescente dalla superficie verso l' interno. Nell' istante dell' apertura le correnti dirette che per induzione si sviluppano nella sbarra, valgono ancora ad accelerare la rotazione delle molecole superficiali e ritardare quella delle più interne. Le esperienze fatte su sbarre abbastanza lunghe relativamente al loro diametro, mostrano che quantunque più rapidamente tornino le molecole superficiali verso la posizione iniziale, pure si ottiene un magnetismo permanente maggiore alla superficie e decrescente verso l' interno, in causa certamente delle azioni reciproche fra le varie porzioni magnetizzate della sbarra. Ma con sbarre brevi non succede così. Il ritorno delle molecole superficiali è tanto rapido, da lasciare minor magnetismo permanente alla superficie che all' interno, od anche da produrre negli strati superficiali un magnetismo inverso.

Se la chiusura della corrente si fa lentamente, o se, ciò che torna praticamente lo stesso, si introduce lentamente nell' elica la sbarra dopo aver chiuso il circuito, od anche la si accosta, del pari lentamente, al polo d' una calamita o di una elettro-calamita, il magnetismo deve penetrare in ogni parte della sbarra. Se è solo l' apertura del circuito che si fa lentamente, resterà il magnetismo permanente distribuito similmente al temporario, e cioè decrescerà in intensità dalla superficie verso l' interno.

Ognuno vede la necessità che vi sarebbe di tener conto nelle teorie matematiche del magnetismo, di questi fenomeni d' induzione; ma ciascuno si convincerà pure delle difficoltà forse per ora insormontabili alle quali si andrebbe incontro.

CAPITOLO VI.

Influenza del modo di chiusura e d'apertura del circuito sul momento magnetico temporario e sul permanente.

Magnetismo temporario.

36. Già da alcune delle esperienze del capitolo precedente risulta che se nell' atto della chiusura per effetto d'induzione cresce più lentamente l' effetto della corrente sulla sbarra, questa si magnetizza meno. In quelle esperienze si misurava solo il magnetismo permanente. Ma è possibile constatare che il magnetismo temporario di una sbarra a parità d' altre condizioni è più o meno grande, secondo il modo nel quale varia l' azione della corrente nell' atto della chiusura del circuito.

Le esperienze si dispongono come è detto nel cap. III, compensando cioè l'azione dell' elica magnetizzante sull' ago del galvanometro con un secondo rocchetto situato dalla parte opposta, in modo che le deviazioni dell' ago sospeso sieno dovute solo al magnetismo sviluppato nella sbarra introdotta nell' elica. Anche qui si ottengono risultati migliori con rocchetti di pochi giri di filo, come il rocchetto *A*.

Con 8 coppie Bunsen, col reostata descritto, il rocchetto *A* ed una sbarra di acciaio lunga 147^{mm} e grossa 6^{mm}, ottenni i numeri seguenti:

	Momento magnetico temporario
Chiuso il circuito lentamente	197
Aperto il circuito e chiuso di nuovo, ma rapidamente	201,5
Chiuso lentamente	198
„ rapidamente	200
„ lentamente	197,5
„ rapidamente	199,5

Sostituendo alla sbarra un mazzetto di fili d' acciaio grossi 1^{mm} e lunghi 120^{mm}:

	Magnetismo temporario
Chiudendo lentamente	138
„ rapidamente	143
„ lentamente	138
„ rapidamente	144
„ lentamente	139

e si vede appunto che chiudendo lentamente il circuito, e quindi non permet-

tendo alle molecole di acquistare velocità, il momento magnetico della sbarra si fa minore. La differenza fra i momenti magnetici ottenuti nei due casi decresce, ripetendo la misura più volte, ciò che è dovuto al magnetismo maggiore che rimane dopo la chiusura rapida.

Qualunque fosse la sbarra adoperata, ottenni sempre nettamente un risultato simile. Però secondo che la corrente è più o meno intensa, e che la sbarra è più o meno temperata e più o meno grossa, la variazione che il modo di chiusura produce sul magnetismo temporario è differente. Può dirsi in generale che per una stessa sbarra l' influenza della chiusura è minore con correnti assai deboli o troppo energiche, e maggiore per valori intermedi della corrente, ciò che si accorda con la teoria (art. 13). Per una sbarra assai più temperata di un' altra occorre una corrente più forte onde avere i massimi effetti; e lo stesso dicasi per una sbarra più grossa. Ma all'infuori di ciò si verifica sempre che:

VII. Legge. *Il magnetismo temporario di una sbarra è tanto maggiore, a parità d' altre condizioni, quanto più rapidamente è chiuso il circuito.*

Invece di chiudere lentamente il circuito col reostata, si può con egual risultato introdurre la sbarra nel rocchetto poco a poco, dopo aver chiuso il circuito stesso in una maniera qualunque.

Colla chiusura lenta la magnetizzazione penetra più profondamente nella sbarra (art. 28), e perciò non è evidente che il maggior momento magnetico che dà la rapida chiusura si debba solo alla velocità acquistata dalle molecole. Ma però se ciò è diffatti, devonsi ottenere maggiori variazioni di momento magnetico, se prima di ogni chiusura del circuito nel senso ordinario, si manda una corrente diretta in senso inverso; infatti così facendo lo spostamento delle molecole è maggiore, e quindi maggiore anche la velocità che acquistano colla chiusura istantanea. Ciò si verifica completamente. Così ad esempio sperimentando nelle stesse condizioni più sopra riferite ottenni:

	Momento magnetico temporario
Dopo avere inviato nel rocchetto una corrente inversa	
„ chiudendo lentamente la corrente diretta	147^{mm}
„ „ rapidamente „ „	155
„ „ lentamente „ „	149
„ „ rapidamente „ „	156

Dunque:

VIII. Legge. *L' aumento di magnetismo temporario che si ha chiudendo rapidamente piuttosto che lentamente il circuito, diviene maggiore, se alla chiusura si fa sempre precedere l'azione d' una corrente inversa.*

37. Se dopo che il circuito è stato chiuso in un modo qualunque, si diminuisce col reostata lentamente la intensità della corrente, il momento magnetico

della sbarra diminuisce, ma ad un istante qualunque è maggiore di quello che per la stessa intensità di corrente si otterrebbe direttamente.

Ecco alcuni esempi:

8 Bunsen, rocchetto *A*.

	Momenti temporarii			
	Sbarra lun. 110^{mm} e grossa 5.5,	Sbarra di 148^{mm} per 10.	Sbarra di 174^{mm} per 4.	Mazzetti di 40 fili lung. 120^{mm} e gr. 1^{mm}
Chiuso rapidamente il circuito.	130	177	94	97
Diminuita lentamente l' intensità	107	140	83	81
Aperto un istante e chiuso lentamente il circuito	90	116	75	76

Siccome l' azione d' una corrente penetra più o meno nelle parti interne della sbarra secondo la sua intensità, potrebbe supporsi che l' effetto ora descritto fosse semplicemente dovuto alla magnetizzazione prodotta dalla corrente negli strati interni della sbarra allorquando aveva il suo più grande valore, e non all' essere possibili, per ogni molecola della sbarra e per ogni intensità della corrente, varie posizioni di fermata (art. 13). Ma il fenomeno in discorso si verifica ancora, chiudendo sempre lentamente il circuito, nel qual caso, per quanto si è esposto nel precedente capitolo, deve la magnetizzazione invadere sempre tutta la sbarra.

Così facendo si cade nel caso contemplato nell' art. 14, vale a dire che si giunge a mostrare che crescendo lentamente la corrente e poi diminuendola lentamente, il valore del momento magnetico che corrisponde ad una data intensità della corrente è maggiore nel periodo di diminuzione della corrente stessa, che in quello nel quale è in aumento.

Per effettuare l' esperienza disposi il reostata in modo da potere fissare le due lastre di rame divergenti a diverse altezze accuratamente stabilite, onde dare alla corrente successivamente vari valori. Nella posizione delle lamine che dirò 1^a, le punte delle lastre erano appena immerse nel liquido; nelle posizioni 2^a, 3^a e 4^a, erano immerse via via di più, e nella posizione 5^a lo erano completamente, ed in tal caso si aveva la massima intensità della corrente. Riporto quì due serie di misure fatte la prima con una sbarra lunga 147^{mm} e grossa 4^{mm}, l' altra con una lunga 160^{mm} e grossa 6^{mm}, adoperando sempre il rocchetto *A*.

	Magnetismo temporario	
Chiudo lentamente fino alla 5^a posizione.	81,5	106
Sollevo lentamente le lamine del reostata sino alla 4^a posizione .	79	101
" " " 3^a " .	72,5	90,5
" " " 2^a " .	68,5	84
" " " 1^a " .	53,5	56

			Magnetismo	temporario
Apro lentamente e chiudo lentamente fino alla	1ª	„	. 48	53
Abbasso lentamente le lamine sino alla	2ª	„	. 59	75
„ „ „	3ª	„	. 63	82
„ „ „	4ª	„	. 72	94
„ „ „	5ª	„	. 82	108
Sollevo lentamente le lamine fino alla	4ª	„	. 79,5	101,5
„ „ „	3ª	„	. 73,5	92
„ „ „	2ª	„	. 69,5	85
„ „ „	1ª	„	. 53	64

Di quì si vede, per esempio, che nella 2ª posizione del reostata il magnetismo della seconda sbarra era 84 nel periodo di diminuzione della corrente, e 75 in quello di aumento; similmente dicasi per le altre posizioni e per l'altra sbarra.

Se mentre la sbarra è sotto l'azione della corrente, viene percossa con un corpo duro, il suo momento magnetico cresce, se si è nel periodo di aumento della corrente, e diminuisce se si è nel periodo di decrescimento. Nel primo caso le molecole sono nella deviazione minima e nel secondo nella massima; gli urti tendono a condurle alla deviazione media (art. 13).

Risulta quindi dimostrato che:

IX. Legge. *Il momento magnetico temporario che acquista una sbarra d'acciaio per una data intensità della corrente magnetizzante, è maggiore, se anzichè direttamente, si giunge a quel valore dell'intensità partendo da una corrente più forte, e ciò quand'anche le variazioni d'intensità sieno sempre graduali.*

Influenza del modo di chiusura sul magnetismo permanente.

38. Il magnetismo permanente varia nello stesso senso del temporario, cambiando il modo di chiusura del circuito. Abbenchè ciò risulti indirettamente dalle esperienze riportate con altro scopo nel cap. IV, pure è bene dimostrarlo direttamente. Ecco i risultati di alcune misure fatte colla corrente di 8 Bunsen.

	Rocchetto *A*	Rocchetto *B*		Rocchetto *C*
	Sbar. lun. 146mm e grossa 6	56mm 18	26mm 18	28mm 18
Chiudendo lent. ed aprendo lentamente	40mm	60mm	56mm	88,5mm
„ „ „ „	41,5	64	59	91
„ rapidamente „	47	78	77	214,5

In ciascuna di queste serie di misure cominciai col chiudere lentamente il circuito due volte onde vedere qual'era al più l'aumento di magnetismo dovuto

alla circostanza delle successive magnetizzazioni. L' aumento di magnetismo permanente dovuto alla chiusura rapida è evidentissimo, ed anzi più marcato dell' aumento di magnetismo temporario. Si vede che l' influenza del modo di chiusura non è molta per la prima sbarra, che è di forma assai allungata, ma è assai maggiore nelle altre che sono corte e grosse, e diviene grandissima quando, oltre che far uso d' una di tali sbarre, si adopera il rocchetto *C* che ha filo corto, piuttosto che il *B* che è formato con più lungo filo.

Anche quì dunque l' influenza del modo di chiusura si rivela più distintamente coi rocchetti a pochi giri, ciò che principalmente è dovuto alle correnti indotte che vi si sviluppano nell' atto della magnetizzazione, le quali rallentano più o meno il movimento delle molecole della sbarra. Le esperienze comparative seguenti, nelle quali con intensità appropriata della corrente si è fatto in modo che i due rocchetti *B* e *C* producano egual magnetizzazione chiudendo lentamente il circuito, mostrano l' effetto del maggior rallentamento delle molecole della sbarra, quando è collocata nel rocchetto *B*.

	Sbarre lunghe 26mm e grosse 18mm	
	Rocchetto *B* 1 coppia Bunsen	Rocchetto *C* 8 coppie
Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente	85,5mm	86mm
„ „ „ „	91,5	90
„ rapidamente „ „	101	210

Ecco dunque che pel maggior rallentamento delle molecole della sbarra collocata entro il rocchetto *B*, il momento permanente non è giunto alla metà di quello sviluppatosi nel rocchetto *C*, entro il quale, le molecole stesse hanno deviato con velocità maggiore. Dall' insieme delle esperienze fatte posso dunque dire che:

X. Legge. *Il magnetismo permanente d' una sbarra d' acciaio è tanto maggiore, quanto più rapidamente la si espone all' azione della corrente, per esempio chiudendo istantaneamente il circuito, piuttosto che lentamente. La differenza fra i due casi è tanto maggiore, quanto più corta è la sbarra in confronto della sua lunghezza e cresce pure col far uso di rocchetti a filo corto.*

Se invece d' aprire il circuito lentamente, lo si apre d' un tratto, i risultati non variano sostanzialmente, finchè si adoperano sbarre assai lunghe in rapporto alla loro grossezza. Ma se si fa uso di una breve sbarra, si ottiene il *magnetismo inverso* del quale si parlerà più oltre, e cioè la polarità permanente della sbarra risulta opposta alla temporaria; ciò è indicato dal segno negativo nello specchio seguente:

Rocchetto C, acciaio 26^{mm} per 18^{mm}

Chiudendo	lentamente ed	aprendo	rapidamente	—	89^{mm}
„	„	„	„	—	112
„	rapidamente	„	„	—	52,5

Colla chiusura rapida il momento magnetico è numericamente minore, ciò che si accorda coi risultati che si ottengono aprendo lentamente, in questo senso che colla chiusura rapida la sbarra ha maggior tendenza a magnetizzarsi nel senso diretto.

Influenza del modo di apertura del circuito, sul magnetismo permanente.

39. Le esperienze che sto per descrivere, forse meglio ancora delle precedenti, mettono in evidenza l'influenza della diversa velocità acquistata dalle molecole, nei fenomeni del magnetismo.

Ecco i risultati medi di misure fatte con varie sbarre d'acciaio, quelle lunghe erano poste nel rocchetto A, le altre in C.

Dimensioni delle sbarre		Magnetismo permanente		Rapporto
		Aprendo ist. il circuito	Aprendo lentamente	
Lunghezza 148^{mm}	grossezza 4,5^{mm}	98^{mm}	103^{mm}	1,05
„ 148	„ 8	89	105	1,19
„ 124	„ 10	62	78	1,26
„ 103	„ 10	54,5	76	1,4
„ 75	„ 10	34	65	1,9
„ 47	„ 6	23	83,5	3,6
„ 56	„ 18	19	107	5,6

Come si vede il magnetismo permanente ottenuto aprendo lentamente il circuito, o ciò che vale lo stesso allontanando lentamente il cilindro d'acciaio dall'elica magnetizzante, è sempre maggiore di quello che si ottiene aprendo rapidamente il circuito. In quest'ultimo caso le molecole tornando verso la posizione d'equilibrio iniziale acquistano una certa velocità, la quale non è estinta dall'attrito, che quando giungono a poca distanza da essa. Nell'altro caso invece non permettendo alle molecole di acquistare sensibilmente velocità, esse si arrestano non appena la coppia di elasticità che agisce su di esse, abbia raggiunto quel minimo valore necessario a superare l'attrito.

Con sbarre anche più corte rispetto alla grossezza, che non sieno le ultime sopra indicate, l'effetto diviene anche più accentuato. Anzi, come vedremo, coll'apertura rapida ottiensi il magnetismo inverso. In ogni caso dunque:

XI. Legge. *Il magnetismo permanente d'una sbarra d'acciaio è tanto maggiore quanto più lentamente è sottratta alla causa magnetizzante.*

La ragione per la quale il fenomeno accade più spiccatamente colle sbarre corte, fu già indicata (art. 14).

Influenza simultanea della chiusura ed apertura.

40. Con sbarre assai corte, per esempio lunghe 50^{mm} e grosse 18^{mm}, o più, si ottengono con una stessa corrente dei momenti magnetici differentissimi, variando in modo cospirante le circostanze di chiusura e d'apertura. Il minimo valore possibile si ha chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito, ovverosia introducendo la sbarra nell'elica mentre è già percorsa dalla corrente, ed aprendo d'un tratto il circuito senza levarla. Il massimo valore si otterrà nel caso opposto, cioè chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente il circuito, ossia ancora chiudendo il circuito istantaneamente dopo avere introdotta la sbarra nell'elica, e quindi estraendola adagio senza aprire il circuito.

La tavola seguente mostra per varie sbarre, quanto possono essere diversi i momenti magnetici ottenuti nei due casi.

8 coppie Bunsen, Rocchetto *A*

Num. d'ordine	Lunghezza della sbarra	Grossezza		Momento magnetico permanente: chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente	Momento magnetico permanente: chiudendo rapidamente ed aprendo lent.	Rapporti del 1.° al 2.°
1	120^{mm}	1^{mm}		29^{mm}	32^{mm}	0,91
2	147	4	(Temprata fortemente)	123	197	0,62
3	130	2,3		74	126	0,59
4	120	1	(Mazzetto di 20 fili di questa grosseza)	66	127	0,52
5	147	4	(La stessa del Num 2 rincotta)	93	185	0,50

Rocchetto *C*

(i valori seguenti del momento magnetico dovrebbero moltiplicarsi per 0,058 onde renderli comparabili ai precedenti)

Num. d'ordine	Lunghezza della sbarra	Grossezza		chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente	chiudendo rapidamente ed aprendo lent.	Rapporti del 1.° al 2.°
6	50	5	(Temprata fortemente)	139	299	0,46
7	50	5	(Rincotta)	104	332	0,31
8	72	10		38	461	0,08
9	64	10		0 (Traccie incerte)	358	0
10	50	10		— 32	242	— 0,13
11	64	18		— 46	317	— 0,15
12	26	18		— 19	51	— 0,37

Come si vede l'influenza del modo di chiusura e d'apertura si fa tanto meglio sentire, quanto più la sbarra adoperata è grossa, rispetto alla sua lunghezza. Anzi colle sbarre più corte e grosse degli ultimi tre casi, si ha magnetismo inverso chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente. Dal confronto delle esperienze 2 e 5 come pure delle 6 e 7 apparisce poi che coll'acciaio temprato l'effetto è minore che col rincotto. È poi notevole l'esperienza 9 nella quale la sbarra restò priva di magnetismo operando nella prima maniera. Essa servì di passaggio fra le sbarre lunghe che si magnetizzano sempre nel modo ordinario, e le brevi il cui magnetismo permanente può divenire inverso. Naturalmente ciò accadde per quella data intensità di corrente, poichè in generale i rapporti dell'ultima colonna variano insieme alla forma magnetizzante.

Se le misure fossero ripetute con rocchetti a lungo filo, si troverebbero differenze meno notevoli fra i momenti magnetici d'una stessa sbarra, per la ragione più volte ripetuta.

Le sbarre corte e grosse si prestano meglio delle altre a mostrare l'influenza degli urti dati alla sbarra, sul magnetismo permanente. Se dopo aver chiuso lentamente il circuito, la sbarra è percossa alquanto con un corpo duro, il magnetismo permanente che essa presenta a circuito aperto diviene alquanto maggiore, e in certi casi può divenire più che doppio. Gli urti dati alla sbarra dopo aver aperto il circuito, specialmente se l'apertura fu fatta lentamente, diminuiscono moltissimo il suo momento magnetico. È facile ridurlo a meno della metà. Ciò mostra quanto delicatamente debbano maneggiarsi le sbarre, allorquando, tolte dal rocchetto, si portano presso il magnetometro per misurarne il momento.

Magnetizzazione simultanea di due sbarre diversamente temprate.

41. È noto che mettendo in un rocchetto due sbarre identiche d'acciaio, e inviandovi la corrente, esse acquistano eguale magnetizzazione, la quale però è minore di quella che acquisterebbe ciascuna da sola, ciò che si spiega agevolmente (art. 10) per l'azione reciproca delle sbarre. Ma se si prendono due sbarre diverse sia per dimensioni, sia per essere in qualche modo in condizioni differenti, succede che mentre anche in questi casi ciascuna delle sbarre acquista in generale meno magnetismo che se fosse sola, l'influenza reciproca si fa in esse sentire assai differentemente. Questa reciproca influenza produce il suo effetto, sia nell'atto in cui lanciando la corrente si forma la magnetizzazione temporaria, sia nell'atto in cui si apre il circuito e si forma la magnetizzazione permanente. Infatti il modo di apertura e di chiusura anche quì ha una influenza marcatissima.

Consideriamo dapprima il caso di due sbarre identiche in dimensioni, ma diversamente temprate, collocate entro il rocchetto di fianco l'una all'altra. Feci le esperienze con sbarrette lunghe 50^{mm} e grosse 5^{mm}. L'una di esse che dirò T, era stata temprata e quindi fatta rinvenire sino a che acquistasse il colore azzurro

carico; l'altra R, era assai rincotta. Adoperai dapprima il rocchetto C, e chiuso ed aperto rapidamente il circuito portai separatamente le due sbarrette presso il galvanometro onde misurarne il momento magnetico.

	Magnetismo permanente
Sbarra temprata T	27^{mm}
„ rincotta R.	155
Sbarra T magnetizzata da sola	182
„ R „ „	162

Un tale risultato ottiensi con sbarre di qualunque dimensione ed anche con lamine piane; esso può esprimersi così:

XII. Legge. *Magnetizzando in pari tempo due sbarre eguali ma diversamente temprate, la diminuzione di magnetismo dovuta alla loro azione scambievole, è assai più marcata nella sbarra più temprata che nell' altra.*

Nell' atto in cui le due sbarre vengono allontanate lateralmente l' una dall' altra, il loro magnetismo si accresce un poco; diffatti misurando il momento complessivo delle due sbarre lasciandole vicine, si ottiene un risultato minore della somma dei momenti delle sbarre misurati separatamente. Ma questa modificazione dovuta alla separazione delle due sbarre è lungi dall' avere un valore tale da alterare sensibilmente i risultati della esperienza descritta, e delle altre che ci restano a descrivere in questo capitolo.

42. Variando il modo di chiusura e d' apertura, si giunge a trovare la causa e le modalità del fenomeno descritto.

Con cilindretti simili a quelli dell' art. precedente ottenni:

Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente	T	82
	R	70
„ rapidamente „ „	T	83
	R	154

Dunque il fenomeno cessa di prodursi se la chiusura e l' apertura del circuito si fanno lentamente. Ciò induce a pensare che il fenomeno sia dovuto alla diversa rapidità con cui le molecole delle due sbarre si spostano. Infatti se quelle della sbarra temprata si muovono più lentamente, siccome l' azione reciproca delle sbarre è su ciascuna di esse opposta a quella dell' elica, la sbarra non temprata acquisterà prontamente una forte magnetizzazione e compenserà sull' altra ben presto l' azione dell' elica. Chiudendo lentamente, si obbligano le molecole delle due sbarre a muoversi con eguale lentezza.

Nell' apertura del circuito si ha un fenomeno inverso. Infatti smagnetizzati i cilindri e ridotti prossimamente nelle condizioni di prima, ottenni:

Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente	T	84
	R	68
" " " rapidamente	T	85
	R	40

È notevole la diminuzione di magnetismo della sbarra rincotta, quantunque dopo la prima esperienza essa non fu smagnetizzata. Potremo dire quindi:

XIII. Legge. *Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito acquista maggior magnetismo la sbarra più temprata; chiudendolo rapidamente ed aprendolo lentamente, succede l'opposto.*

Per comprendere la diminuzione di magnetismo nella sbarra meno temprata, dovuta alla rapida apertura del circuito, bisogna considerare che non appena l'azione della corrente cessa, ognuna delle sbarre agisce sull'altra tendendo ad invertirne la polarità. Nella sbarra più temprata le molecole retrocedono più lentamente, e per ciò è l' altra che obbedisce maggiormente alla forza inversa. Nel caso in cui tanto la chiusura che l' apertura sono rapide, prevale l' effetto della chiusura.

La discussione di queste esperienze ci autorizza a concludere che:

Lo spostamento delle molecole, a parità d' altre condizioni, avviene con rapidità tanto maggiore quanto meno l' acciaio è temprato.

Se nelle esperienze descritte si adoperassero due cilindri l' uno fortemente temprato, l' altro estremamente dolce, la differenza dei loro momenti magnetici sarebbe molto maggiore, ma più difficilmente si apprezzerebbero le differenze di risultati relativi al vario modo di chiusura o d' apertura del circuito. Ciò non deve sorprendere, se si riflette che per quanto lentamente e con accuratezza si maneggi il reostata, non possono evitarsi variazioni brusche d' intensità della corrente. Lo stesso dicasi se si adoperasse un rocchetto a lungo filo. Ho descritto quì le condizioni nelle quali le esperienze riescono in un modo più rimarchevole e convincente.

Caso di sbarre di diversa grossezza.

43. Invece di sperimentare con sbarre di eguali dimensioni, ma diversamente temperate, si può operare con sbarre di diversa grossezza e di egual tempra. Anche in questo caso la rapidità con cui si forma o si distrugge la polarità è differente assai nelle due sbarre.

Feci esperienze comparative, relativamente alla chiusura del circuito, adoperando delle sbarre d' acciaio rincotto lunghe 50^{mm}, e grosse 2^{mm},3 , 5^{mm} e 10^{mm}, ed accoppiandole due a due. Poste le due sbarre nel rocchetto ed inviata la corrente,

ne misuravo i momenti magnetici; smagnetizzate col calore facevo una seconda misura, variando il modo di chiusura del circuito, poi una terza e così di seguito. In ultimo facevo le medie fra i valori ottenuti nelle stesse condizioni. Nella prima colonna del seguente specchio sono notati i risultati ottenuti con due sbarrette grosse 10^{mm} e 5^{mm}.

Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente

	Valore medio del momento magnetico		
Sbarra sottile .	78	88	47
„ grossa .	112	165	—

Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente

Sbarra sottile .	158	162	107
„ grossa .	146	198	—

Questi risultati mostrano che chiudendo rapidamente si aumenta il magnetismo delle due sbarre (ciò che è conforme ai risultati dell' art. 38), ma relativamente più assai nella sottile che nella grossa, quantunque prese separatamente, sia invece nelle sbarre grosse che più influisce il modo di chiusura. La sbarra grossa si comporta dunque come la sbarra temprata dell' art. precedente, e si dirà quindi che: *la magnetizzazione temporaria si forma più lentamente in una sbarra grossa che in una sottile.*

Qui si parla della rapidità con cui si magnetizza l' intera sbarra, e non della rapidità con cui si spostano le singole molecole, come nell' articolo precedente. Nel caso attuale, in causa dell' induzione sarà nelle due sbarre differentissima la velocità delle molecole, a norma della profondità alla quale si trovano.

I numeri della seconda colonna sono relativi a due sbarre grosse 5^{mm} e $2^{mm},3$.

L' influenza della grossezza sulla rapidità di formazione del momento magnetico d' una sbarra, supera l' influenza della tempera. Una sbarra di ferro dolce si magnetizza più lentamente di una più sottile d' acciaio. Infatti i numeri della terza colonna dell' ultimo specchio danno il magnetismo d' una sbarra d' acciaio grossa 5^{mm} accoppiata ad una di ferro dolce grossa 11^{mm}. Quella d' acciaio si comporta dunque come se fosse in presenza d' un' altra più grossa, che pure fosse d' acciaio anzichè di ferro.

Nel momento dell' apertura del circuito, succede in generale che è la sbarra più grossa quella che perde più prontamente il suo magnetismo temporario.

Così per esempio con due sbarre lunghe 50^{mm} e grosse 5^{mm} e $2^{mm},3$, poste nel rocchetto C' e con altre due lunghe 142^{mm} e grosse $4^{mm},5$ e 3^{mm} poste nel rocchetto A ottenni in media :

Chiudendo lent. ed aprendo lent.

	Prima coppia di sbarre	Seconda coppia
Sbarra sottile .	82	141
„ grossa .	123,5	511,5

Chiudendo lent. ed aprendo rap.

Sbarra sottile .	53,5	138
„ grossa .	51	483

Da questi numeri risulta appunto che coll' aprire rapidamente il circuito la sbarra grossa è quella che più perde di magnetismo.

Con due sbarrette lunghe 50^{mm} e grosse 11^{mm} e 2^{mm}, è facile ottenere che aprendo rapidamente, la più grossa resti magnetizzata inversamente, mentre la sottile conserva una polarità nel senso ordinario. Le azioni nell' apertura e nella chiusura, cospirano dunque a produrre questo risultato, e cioè che:

XIV. Legge. *Magnetizzando insieme due sbarre di diversa grossezza, la sbarra più grossa è quella che più risente l' effetto della reciproca influenza.*

44. Ma se invece di operare con sbarre cilindriche messe di fianco l' una all' altra, si adoperano larghe lastre sovrapposte o meglio lastre cilindriche concentriche e vicinissime, si ottiene un risultato opposto, e cioè è la lastra sottile quella che colla rapida apertura del circuito perde più del proprio magnetismo.

Mi procurai due tubi, l' uno d' acciaio, l' altro di ferro dolce, lunghi circa 63^{mm} grossi $2^{mm},5$ e col diametro esterno di 22^{mm}, entrambi aperti con un taglio longitudinale, onde evitare fino ad un certo punto i fenomeni d' induzione. Mi procurai pure un tubo simile di ferro dolce, grosso però solo $1^{mm},5$, e vari tubi di lastra d' acciaio grossi 1^{mm}, essi pure con un taglio longitudinale, i quali potevano entrare liberamente nei tre tubi precedenti.

Posto uno dei tubi d' acciaio grossi 1^{mm} entro il tubo di ferro grosso $2^{mm},5$, li introdussi nel solito rocchetto C. Chiuso ed aperto il circuito estraeva il tubo d' acciaio e lo portava presso il galvanometro per misurarne il momento magnetico. Rimesso a posto inviava una seconda corrente e facevo una seconda misura. Dopo lo smagnetizzava, e adoperavo lo stesso tubo d' acciaio per altre due misure, e così di seguito. Eseguii in tal modo 16 misure, combinando due a due le varie maniere di apertura e chiusura. Ripetute dopo alcune delle prime misure, trovai risultati abbastanza simili, onde restar persuaso che gli stessi risultati erano riferibili ad un medesimo tubo sempre collo stesso grado di forza coercitiva. D' altronde per più giorni ripetei queste serie di misure sempre con risultati concordanti.

1. Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente — 246
2. „ „ „ lentamente — 215

3. Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente + 26
4. „ „ „ rapidamente — 325

---

5. Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente — 62
6. „ „ „ lentamente + 30

---

7. Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente + 240
8. „ „ „ rapidamente + 20

---

9. Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente + 20
10. „ rapidamente „ „ + 200

---

11. Chiudendo rapidamente ed aprendo lentamente + 250
12. „ lentamente „ „ + 240

---

13. Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente — 241
14. „ rapidamente „ „ — 92

---

15. Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente — 63
16. „ lentamente „ „ — 188

Il segno — indica che il tubo d' acciaio ha acquistato un magnetismo inverso di quello che avrebbe avuto senza il tubo di ferro. Ciò ha avuto luogo in tutte le esperienze nelle quali si è aperto rapidamente il circuito, meno che nella 8.ª ove il segno + deriva evidentemente dal magnetismo permanente conservato dal tubo in seguito all'esperienza 7.ª. Dunque nell' atto dell' apertura rapida del circuito, e mentre le molecole del ferro tornavano verso la posizione iniziale, quelle del tubo d' acciaio, l' hanno non solo raggiunta, ma oltrepassata, in modo da restare il tubo stesso magnetizzato in senso opposto. Ciò suppone che le molecole dell' acciaio tornino verso la posizione iniziale più rapidamente di quelle del ferro, ciò che è dovuto alla maggior grossezza di questo.

Dal confronto dei numeri precedenti risulta pure un' influenza del modo di chiusura. Il momento magnetico inverso è maggiore quando il circuito è chiuso lentamente.

Sostituendo al tubo di ferro adoperato, l' altro pure di ferro grosso solo $1,^{mm}5$, si hanno fenomeni simili, se non chè nelle misure 5 e 15 si hanno valori positivi. Con un tubo di ferro assai più sottile, il tubo d' acciaio acquista in ogni caso la polarità nel senso ordinario. Invece, adoperando il tubo d' acciaio grosso $2,^{mm}5$ in sostituzione di quello di ferro, il fenomeno dell' inversione di magnetismo del tubo interno, avviene in un modo anche più marcato. Ciò che è naturale stando alle date spiegazioni, giacchè nel tubo d'acciaio esterno il ritorno delle molecole nell' atto dell' apertura del circuito deve essere più lento, che in un egual tubo di ferro dolce.

Così per esempio messo un tubo d' acciaio d' 1^{mm} prima entro un tubo di ferro grosso $2,^{mm}5$ poi in uno d' acciaio di eguali dimensioni, ed esso pure tagliato longitudinalmente, acquistò nei due casi il magnetismo inverso seguente:

Chiudendo ed aprendo rapidamente

	Magnetismo permanente
Nel tubo di ferro	— 85^{mm}
In quello d'acciaio	— 278

Se ho riportato prima una serie di misure fatte coll' intervento d' un tubo di ferro dolce, è stato solo per la semplificazione che ne nasce nelle esperienze, non occorrendo smagnetizzarlo, come invece devesi fare adoperandone uno d' acciaio.

Basta rallentare in qualche modo il movimento delle molecole dell' acciaio nell' atto dell' apertura del circuito, onde cessi di prodursi il magnetismo inverso, per esempio interponendo fra il tubo d' acciaio e quello di ferro o di acciaio esterno, un tubo d' ottone. Infatti:

Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente

		Interponendo un tubo d'ottone
Nel tubo di ferro	— 70^{mm}	+ 10^{mm}
„ acciaio	— 280	+ 121

CAPITOLO VII.

Magnetismo inverso.

Influenza delle dimensioni della sbarra e dell' intensità della corrente.

45. Alcune delle esperienze riportate nei capitoli precedenti, hanno per incidenza mostrato che, in appoggio a quanto fu detto negli art. 15 e 20, una sbarra d' acciaio di breve lunghezza può presentare il fenomeno singolare di magnetizzarsi con polarità inversa dell' ordinaria. In questo capitolo studieremo le condi-

zioni necessarie onde quel fenomeno si produca, e ne completeremo la spiegazione.

Dapprima è facile mostrare, adottando la disposizione sperimentale descritta per la misura del magnetismo temporario, che questo si sviluppa sempre nel senso ordinario. È dunque nell' atto dell' apertura del circuito che l' inversione ha luogo.

Le dimensioni della sbarra e l' intensità della corrente, hanno una grande influenza nella produzione del fenomeno. Col rocchetto B e la corrente di 1 a 6 coppie Grenet, ottenni i seguenti risultati, chiudendo ed aprendo il circuito nel modo ordinario:

Numero delle coppie	Sbarra lunga 26^{mm} „ grossa 28	26^{mm} 18	63^{mm} 18	80^{mm} 18
1	— 10^{mm}	— 6^{mm}	— 71^{mm}	
2	— 40	— 16	— 60	+ 30^{mm}
3	— 65	— 9	+ 1	+ 62
4	— 75	+ 4	+ 58	+ 107
5	— 56	+ 26	+ 101	+ 174
6	— 57	+ 42	+ 103	+ 219

Risultati simili si ottengono adoperando sbarre più piccole o più grandi. Sempre in quelle la cui lunghezza supera di poco il diametro, si ottiene con corrente abbastanza debole la calamitazione inversa, quand' anche si varino le dimensioni lineari da pochi millimetri a parecchi centimetri. Confrontando fra loro i numeri scritti sopra una stessa orizzontale, ed andando da destra a sinistra, si deduce che:

XV. Legge. *Magnetizzando sbarre d' una data grossezza e di più in più corte, dapprima il magnetismo permanente decresce, poi si annulla ed infine si ottiene la polarità inversa. L' inversione accade per lunghezze tanto maggiori, quanto meno intensa è la corrente.*

Confrontando i numeri disposti in colonna verticale si trova che:

XVI. Legge. *Al crescere dell' intensità della corrente, il magnetismo inverso cresce dapprima fino ad un massimo, poi diminuisce sino ad annullarsi, ed infine cede il posto alla polarità nel senso ordinario.*

Il differente modo di comportarsi delle sbarre corte e grosse, dalle lunghe e sottili, si può mostrare anche nel modo seguente. Ad uno di quei cilindri d' acciaio che danno il fenomeno della polarità inversa, si applichi con un mezzo qualunque un sottile filo d' acciaio ad una delle basi, in direzione parallela all' asse. Si verrà così a formare una sbarra composta di due parti, una assai grossa e l' altra sottilissima. Colla magnetizzazione la parte grossa si polarizza inversamente e la sottile nel modo ordinario, onde la sbarra composta presenta alle due estremità due poli omonimi. Se in questa esperienza il filo aggiunto non è abbastanza

sottile, agendo sul cilindro lo rende virtualmente più lungo, e la polarità vi si manifesta nel modo ordinario. Però se il filo è assai grosso, ma sul suo prolungamento il cilindro è forato, la polarità inversa si manifesta ancora. Così per esempio adoperando quel tubo d' acciaio descritto nell' art. 28, avente un cilindro pure di acciaio che ne riempie il foro, si ottengono i poli omonimi alle due estremità del sistema, se il cilindro interno si dispone in modo che sporga quasi completamente da una delle estremità del tubo.

Effetto del modo di chiusura e d' apertura.

46. Il prodursi della polarità inversa dipende essenzialmente dal modo nel quale si chiude e si apre il circuito.

Col rocchetto *C*, otto coppie Bunsen e dei cilindri d' acciaio rincotto lunghi 26^{mm} e grossi 18^{mm}, ottenni i seguenti valori medi:

1. Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente + 130
2. „ lentamente „ „ + 55

---

3. Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente — 121
4. „ rapidamente „ „ + 16

---

5. Chiudendo lentamente ed aprendo lentamente + 90
6. „ „ „ rapidamente — 106

---

7. Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente — 119
8. „ „ „ lentamente — 17

---

9. Chiudendo rapidamente ed aprendo rapidamente + 137
10. „ „ „ lentamente + 380

Per ogni cilindro furono fatte le due misure consecutive. Il magnetismo inverso si ottenne nelle 3 e 7 chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente. Nell' 8, il segno negativo dipende evidentemente da magnetismo rimasto dopo la 7.

Col rocchetto *B* a filo lungo, e con una sol coppia Bunsen (nel qual caso esso dà una forza magnetizzante equivalente all' incirca a quella di *C* con otto coppie), il risultato è diverso, giacchè anche chiudendo rapidamente si ha la polarità inversa. Anche quì dunque un rocchetto a lungo filo nel quale la corrente si chiuda

rapidamente, si comporta come uno a filo breve nel quale la corrente si chiuda con una certa lentezza.

Col rocchetto a filo corto *C* e con una sola coppia si ha l' inversione anche chiudendo rapidamente. In tutti i casi però si richiede l' istantanea interruzione del circuito. Diremo dunque che:

XVII. Legge. *L' inversione si ottiene solo interrompendo rapidamente il circuito. Chiudendolo rapidamente cessa l' inversione di prodursi per una intensità di corrente minore, che non chiudendolo lentamente; e questa influenza del modo di chiusura è tanto più manifesta quanto minore è il numero dei giri del filo nel rocchetto.*

In ogni caso dunque sarà bene chiudere lentamente il circuito ed aprirlo rapidamente; o ciò che è lo stesso, introdurre lentamente l' acciaio nel rocchetto dopo che il circuito è chiuso, ed interrompere la corrente d' un tratto prima di toglierlo. Se invece si leva l' acciaio dal rocchetto mentre nel filo di questo passa la corrente, l' acciaio stesso acquisterà la polarità nel senso ordinario, specialmente poi se il circuito venne chiuso dopo aver introdotto la sbarra nel rocchetto. Col rocchetto *B*, un cilindro d' acciaio lungo 58^{mm} e grosso 30^{mm}, ed alcune coppie Grenet o Bunsen, è facilissimo l' ottenere ora la polarità diretta ora l' inversa, operando nell' uno o nell' altro modo. Una piccolissima bussola tenuta a mano può bastare per svelare il senso della polarità. Chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito, la polarità inversa si produce anche colle correnti più intense. Al crescere della intensità cresce in valore assoluto il momento magnetico della sbarra, senza che si arrivi ad un massimo, seguìto poi da cambiamento di segno, come allorquando si chiude rapidamente il circuito. Ciò almeno nei limiti delle mie esperienze.

Così per esempio ottenni i seguenti numeri chiudendo lentamente ed aprendo rapidamente il circuito:

	Magnetismo permanente	
Num. delle coppie Bunsen	Acciaio lungo 26^{mm} grosso 18^{mm}	Acciaio lungo 64^{mm} grosso 18^{mm}
2	— 10	— 8
4	— 42	— 61
6	— 82	— 169
8	— 115	— 232

Effetti d' induzione.

47. L' inversione di polarità è dovuta alla velocità acquistata dalle molecole nel far ritorno alla posizione d' equilibrio, allorquando si apre il circuito, in causa della quale l' oltrepassano, e trattenute dall' attrito s' arrestano dalla parte opposta. È naturale quindi che ogni causa che sottragga alle molecole parte della loro velocità, farà sì che esse oltrepassino meno la posizione d' equilibrio od anche non

la raggiungano affatto; o in altri termini, che il momento magnetico negativo od inverso divenga numericamente minore od anche cangi segno, sostituendosi cioè la polarità ordinaria alla inversa. Ciò risulta in un modo evidentissimo dalle esperienze seguenti, fatte con sbarrette lunghe 26^{mm} e grosse 18^{mm}, col rocchetto C e con 8 coppie Bunsen. Il circuito sempre si chiudeva lentamente e si apriva rapidamente:

Momento magnetico ottenuto senza altra aggiunta . . . . — 192
Circondando la sbarra con un tubo d'ottone grosso 1^{mm} e del diametro di 23^{mm} . . . . — 111
Aggiunto un altro tubo d'ottone grosso 1^{mm} ed un poco più largo — 71
Riempiendo l'intervallo fra l'acciaio ed il vano del rocchetto, con mercurio, il quale formava un tubo dello spessore di 6^{mm} . — 58
Chiudendo con un congegno speciale il circuito del rocchetto nell'istante medesimo in cui lo si separa dalla pila. . . . . + 33
Avvolto sull'acciaio un filo di rame coperto di seta grosso $\frac{1}{2}^{mm}$ per 28 giri, i capi essendo disgiunti . . . . . , ... — 170
Idem, congiungendo i due capi . . . . — 122

Risulta di quì dimostrato quanto importi allontanare ogni diaframma metallico, o circuito chiuso, se si vuole che l'inversione accada. Coi tubi metallici succede che vi si producono correnti indotte, sia perchè cessa la corrente nel rocchetto, ma più ancora per la smagnetizzazione dell'acciaio, le quali rallentano il movimento delle molecole. Nel caso in cui si mantenne chiuso il circuito del rocchetto, escludendone tuttavia la pila, il rallentamento fu tale che le molecole, in media, non poterono neppure raggiungere la posizione d'equilibrio, e si produsse la polarità permanente normale. Potremo dire dunque:

XVIII. Legge. *Se la sbarra, nell'atto in cui si apre il circuito, sviluppa delle correnti indotte in qualche massa metallica, la polarità o resta inversa divenendo però minore in valore assoluto, oppure si forma nel senso ordinario.*

A mio parere questi fatti mostrano colla maggior evidenza la verità delle idee teoriche che servirono di base a queste ricerche.

Stato magnetico delle parti interne della sbarra.

48. Abbiamo dimostrato nell'art. 31, che coll'aprire rapidamente il circuito, gli strati superficiali della sbarra, quando non sia assai lunga e sottile, acquistano una polarità permanente inversa di quella degli strati interni. Questa polarità inversa è generalmente dissimulata dall'opposta azione esterna della polarità diretta, ed è solo sciogliendo poco a poco la sbarra in un acido, che può dimostrarsene l'esistenza. Ma quando la sbarra adoperata è assai corta e grossa, è la polarità

degli strati superficiali che prevale nell' azione esterna, ed è allora appunto che si ottiene il fenomeno del magnetismo inverso. Accade immancabilmente, che sciogliendo in un acido gli strati superficiali d' una sbarra che presenta la polarità inversa, il suo momento diminuisce rapidamente e poi cangia segno. La prima sbarra della tavola riportata nell' art. 32 porge di ciò un esempio.

Con una sbarra fatta di due parti e cioè di una parte anullare o tubo esterno e di un cilindro interno, è pure facile constatare che quest' ultimo è sempre magnetizzato nel senso ordinario, ed anzi con una intensità tale che non si può credere che il suo magnetismo siasi formato per azione di quello del tubo. Il tubo preso allo stato neutro, si magnetizzerebbe appunto in senso inverso, qualora vi si introducesse il nucleo magnetizzato. Il magnetismo che acquisterebbe in tal caso non sarebbe però sufficiente a superare colla sua azione esterna, quella del nucleo.

Si comprende di quì come sino ad un certo punto sia necessario che le parti interne della sbarra risultino alquanto magnetizzate in modo diretto. Col chiudere lentamente il circuito si favorisce appunto il formarsi della magnetizzazione nelle parti interne.

Certamente però questa non è la sola cagione per la quale l' inversione di polarità avviene meglio colla chiusura lenta. Colla chiusura rapida vi sono molecole che all' aprirsi del circuito restano nella posizione nella quale si trovano (vedi art. 20).

Effetto delle correnti successive.

49. In una sbarra non troppo corta, le successive magnetizzazioni ne accrescono il momento magnetico, mentre una corrente in direzione contraria trae seco una diminuzione di magnetismo. Nel caso delle sbarre assai corte, relativamente alla loro grossezza, si hanno diversi risultati secondo il modo di chiusura.

Per chiarire ciò che accade nei vari casi, basta esaminare la tavola seguente. Le misure furono fatte col rocchetto *C*, otto coppie Bunsen, per le due prime colonne, e due sole per la terza.

	Magnetismo permanente		
	Acciaio lungo 26^{mm} „ grosso 18		Acc. lung. 20^{mm} „ gross. 18
	Chiudendo lentamente ed aprendo rapidam.	Chiudendo rapidam. ed aprendo rapidam.	Chiudendo rapidam. ed aprendo rapidam.
Dopo inviata la corrente nella solita direzione	— 46^{mm}	+ 7^{mm}	— 4^{mm}
Dopo una nuova corrente . . .	— 62	+ 30	— 5
„ „ „ . . .	— 77	+ 32	— 7
Dopo molte altre correnti . . .	— 100	+ 40	— 9,5
Corrente in direzione contraria .	— 20	+ 30	— 1
„ „ „ . .	+ 18	+ 27	
„ „ „ . .	+ 39		
Dopo molte correnti „ . .	+ 79	+ 12	+ 5,5
Corrente nel senso primitivo . .	— 16	— 20	
„ „ „ . .	— 63	— 24	
Dopo molte correnti „ . . .	— 98		
Corrente nella seconda direzione .	+ 3	+ 45	
„ „ prima „ .	— 24	— 25	
„ „ seconda „ .	+ 17	+ 47	
„ „ prima „ .	— 51	— 31	— 9
„ „ seconda „ .	+ 28	+ 45	+ 5

Si vede di quì che le successive chiusure nella stessa direzione, danno aumento di momento magnetico in valore assoluto tanto se la polarità è inversa che se è diretta. Invertendo la corrente, dapprima la polarità non s' inverte, ma colle successive chiusure della corrente in senso opposto alla primitiva, si ottiene ancora il cambiamento di segno. Dopo avere invertito più volte la direzione della corrente, si ha in tutti i casi la polarità inversa dell' ordinaria. Anzi nel caso della seconda colonna, in cui il circuito si chiude rapidamente, non si ha la polarità inversa, che dopo avere inviata la corrente nelle due opposte direzioni.

La ragione per la quale le successive chiusure del circuito in una stessa direzione producono aumento di magnetismo, è quì la stessa esposta nell' art. 17; mentre l' effetto delle inversioni fu spiegato negli art. 18 e 20.

Effetto della tempera.

50. Il fenomeno della polarità inversa si produce tanto più facilmente, quanto più l' acciaio è rincotto. E ciò è ben naturale, poichè colla tempera cresce la forza coercitiva, ossia l' attrito che arresta le molecole nel loro movimento. Con una data corrente e con sbarre di data dimensione, diminuendo il grado di tempra, il magnetismo, dapprima nel senso ordinario, diminuirà di valore, ed infine cangierà di segno. Ecco un esempio.

Sbarra 26^{mm} per 18^{mm} temp. fortemente (Corrente chiusa sempre lent. ed aperta rapid.) . . . . + 350
La stessa fatta rinvenire sino al giallo oro . . . . + 108
Fatta rinvenire sino all' azzurro carico . . . . + 33
Riscaldata sino a che stava per divenire rovente e poi raffreddata — 20

Una sbarra più corta, dà colla stessa corrente l' inversione anche quando sia più temperata. Tuttavia non trovai mai delle masse cilindriche d' acciaio temprato fortemente, che presentassero la polarità inversa. Non furono però molto numerosi i miei tentativi.

CAPITOLO VIII.

Sullo spostamento dell' asse magnetico d' un disco calamitato dovuto ad una nuova magnetizzazione.

Disposizione sperimentale.

51. Se un disco d' acciaio privo di calamitazione viene magnetizzato, facendo in modo che uno dei suoi diametri coincida coll' asse dell' elica, esso presenta i suoi poli sullo stesso diametro. Se dopo esso viene girato nel proprio piano d' un certo angolo, e nuovamente magnetizzato, si trova che la nuova polarità non esiste nè nel luogo di prima, nè sul nuovo diametro che si trova nell' asse dell' elica, ma in una direzione intermedia. Mi venne in pensiero che la direzione della polarità ottenuta in questo modo potesse dipendere dal modo in cui si chiude od apre la seconda volta il circuito; diffatti queste circostanze influiscono separatamente sull' orientazione d' ogni singola molecola. A questo scopo furono istituite le esperienze descritte nel presente capitolo.

Ecco dapprima come combinai l' apparecchio che mi era necessario, componendolo, per mancanza di mezzi migliori, con parti tolte provvisoriamente ad apparecchi di collezione.

Un' intelaiatura di legno *PQ* (fig. 10) sostiene due rocchetti *AB*, e *CD* presi da un galvanometro a specchio. Questi rocchetti contengono complessivamente 120 giri del diametro medio di 80^{mm}, formati di filo grosso $0^{mm},8$, e sono messi in circuito in modo da formare come un unico rocchetto. In mezzo ad essi giunge l' asse verticale *EF*, sul quale si fissa il disco d' acciaio che si studia *MN*. L' asse è portato dalla parte mobile *FG* d' una bussola dei seni, dalla quale è stato tolto, il cerchio contenente il filo, l' ago e la scatola nella quale è posto. In *G* c' è il nonnio che si muove insieme ad *EF*, scorrendo sul circolo graduato *HL*, sorretto dall' annesso piede con viti a livello *R*.

Con questa disposizione è facile girare il disco *MN* nel proprio piano, dell' angolo che si desidera. Ma occorre anche di riconoscere la direzione della sua polarità, quando non coincide coll' asse dell' elica. Perciò al disopra del sostegno *PQ* è collocata una scatola *ST* a pareti di vetro, entro la quale è sospeso per un sottilissimo filo di seta *UV*, un ago magnetizzato *WX* collegato ad uno specchietto piano, e vicinissimo ad una lastra di rame *YZ* destinata a spegnere le oscillazioni.

Ecco ora come va messo in posto e adoperato l' apparecchio.

Il sostegno *PQ* si dispone in modo che l' asse dei rocchetti sia approssimativamente nel meridiano magnetico; e quindi, traguardando con un filo a piombo, si fa cadere il filo *UV* sul prolungamento dell' asse *EF*. Inviando una corrente nei rocchetti in direzione tale da aggiungere il suo effetto sull' ago a quello del magnetismo terrestre, l' ago non si muoverà, se l' asse dei rocchetti è nel meridiano, essendo i movimenti dell' ago osservati nella solita maniera con cannocchiale e scala. Ma se ciò non accade sarà facile spostare poco a poco l' intero apparecchio, finchè quella condizione sia soddisfatta. Naturalmente nel fare queste operazioni devesi prima aver tolto di posto il disco *MN*. Sarà necessario poi di tanto in tanto verificare se la posizione dell' apparecchio ha bisogno di essere rettificata.

Quando in *MN* è posto un disco d' acciaio, inviando la corrente, l' ago non si sposta in modo apprezzabile, se il disco fu dapprima perfettamente smagnetizzato. Ma se il disco era già magnetizzato in altra direzione, l' ago si sposta, e all' aprirsi del circuito resta spostato. Se allora si fa girare il disco insieme al nonnio nella direzione dovuta, l' ago si accosterà alla posizione iniziale, e vi si fermerà quando l' asse magnetico del disco sia giunto nella direzione del meridiano magnetico. In questo modo si determina con precisione la direzione della polarità.

Come si vede la scala non serve quì per misure, ma per ricondurre sempre l' ago in una posizione costante; i numeri della scala valgono solo a far conoscere in che senso deve farsi la rotazione del disco. È impossibile commettere un errore di 180° nelle misure degli angoli, giacchè se la polarità del disco fosse bensì nel meridiano magnetico, ma coi poli in senso inverso di quelli dei rocchetti, l' ago sarebbe alla posizione normale, ma al minimo spostamento del disco, invece di deviare nello stesso senso, esso devierebbe in senso opposto.

La precisione delle misure degli angoli è tanto maggiore quanto più fortemente si magnetizza il disco; per cui a parità di diametro è maggiore coi dischi più sottili. Adoperai generalmente dei dischi d' acciaio rincotto del diametro di 52^{mm} e grossi alcuni 1^{mm} altri 5^{mm}. Ad ogni esperienza i dischi erano smagnetizzati col calore, e generalmente una stessa misura era da me fatta con più dischi eguali prendendo poi le medie, eccetto il caso, che raramente si verificò, che i risultati discordassero assai fra loro. Alla fine di una serie di misure avevo cura di ripetere per controprova le prime.

Volendo misurare il momento magnetico del disco, esso veniva tolto dall' apparecchio descritto e collocato sopra un apposito sostegno presso l' ago sospeso di un galvanometro, nel modo indicato nel cap. III per la misura del magnetismo d' una sbarra e cioè collocando l' asse polare del disco in direzione perpendicolare al meridiano magnetico. A ciò non si richiedeva grande precisione, giacchè è facile verificare che la sua azione sull' ago non varia sensibilmente girandolo alcun poco nel proprio piano. Un secondo cannocchiale ed una seconda scala occorrevano dunque per la misura del momento magnetico. In pari tempo essi servivano per la misura dell' intensità della corrente, giacchè a questo scopo, quando occorreva, si inserivano nel circuito alcuni giri di filo di rame che avvolgevano a qualche distanza l' ago del galvanometro.

Spostamento angolare dell' asse magnetico, chiudendo ed aprendo rapidamente il circuito.

52. Vediamo dapprima ciò che accade chiudendo ed aprendo il circuito nel modo ordinario, cioè per mezzo d' un filo amalgamato che si immerge o si estrae da un biccherino contenente mercurio.

Se dopo aver magnetizzato il disco, lo si gira per esempio di 90°, e poi s' invia una nuova corrente, l' asse magnetico si allontana dalla posizione che aveva assunta prima, per accostarsi alla direzione dell' asse dell' elica. L'angolo del quale si sposta la polarità dipende non solo dall' angolo del quale si è spostato il disco dopo la prima corrente, ma anche dall' intensità delle due correnti, se non sono eguali. Così per esempio se le due correnti ebbero la stessa intensità di 200^{mm} (dati dalla scala del galvanometro), ed agirono ad angolo retto, la polarità si trova spostata per effetto della seconda corrente di un angolo di 59° 29′. Nello specchio seguente, che reco come esempio, sono indicati gli spostamenti angolari in vari casi; a fianco di essi è scritto il rapporto fra il momento magnetico finale del disco, ed il suo momento prodotto dalla sola prima corrente. Le esperienze furono fatte con otto coppie Bunsen, e resistenze varie nel circuito, sopra un disco grosso 1^{mm}.

Spostamento angolare dato al disco dopo la 1ª corrente	Prima corr. 200^{mm} Seconda corr. 60,5		Prima corrente 200^{mm} Seconda corr. 133		Prima corrente 200^{mm} Seconda „ 200	
	Spost. angolare della polarità	Rapporto dei momenti magn.	Spost. angolare della polarità	Rapporto dei momenti magn.	Spost. angolare della polarità	Rapporto dei momenti magn.
45°	2° 13′	0,96	14° 49′	0,98	39°	1,74
90°	6° 30′	0,90	36° 30′	0,80	59° 29′	1,04
135°	3° 28′	0,70	56° 31′	0,43	109° 12′	0,78
150°	2° 5′	0,62				

Si vede di quì chiaramente come lo spostamento angolare dell' asse magnetico del disco sia diverso nei vari casi.

Quando, per esempio, si è magnetizzato il disco colla corrente 200^{mm}, e poi si è magnetizzato in direzione perpendicolare colla corrente 133^{mm} la sua polarità si è spostata dalla posizione primitiva di 36° e 30′, mentre il suo momento magnetico si è ridotto ad essere gli 80 centesimi di prima.

Il momento magnetico in generale diminuisce colla seconda magnetizzazione, a meno che la seconda corrente non sia eguale alla prima e che il disco siasi di poco spostato fra l' azione dell' una e quella dell' altra.

Dal confronto dei numeri trovati posso concludere che:

XIX. Legge. *Lo spostamento angolare della polarità d' un disco, cresce coll' intensità della seconda corrente, e quando questa superi un certo limite, cresce pure coll' angolo del quale si è spostato il disco fra una magnetizzazione e l' altra. Se invece la seconda corrente è abbastanza piccola, lo spostamento angolare diminuisce al crescere dell' angolo oltre 90°.*

Non deve recare meraviglia se con correnti deboli lo spostamento angolare divenga minore al crescere dell' angolo del quale si è spostato il disco dopo l' azione della prima corrente. Infatti quando l' angolo in discorso divenga 180° lo spostamento angolare della polarità deve essere zero per effetto della seconda corrente, giacchè il disco resta magnetizzato nel senso di prima. Al contrario con correnti forti lo spostamento diviene invece 180°, perchè la polarità del disco si inverte.

Influenza del modo di chiusura e d' apertura del circuito.

53. Se nella seconda magnetizzazione la corrente si chiude o si apre lentamente, si ottengono degli spostamenti angolari diversi della polarità del disco. Le variazioni sono differenti, secondo la rispettiva intensità delle due correnti, e secondo l' angolo che fanno fra loro i due diametri del disco che trovansi successivamente collocati nell' asse dell' elica.

Per evitare una complicazione non necessaria, mi occupai solo del caso in cui la seconda corrente ha la stessa intensità della prima, e che le due magnetizzazioni del disco si fanno ad angolo retto. In queste condizioni chiudendo ed aprendo il circuito rapidamente, la polarità del disco di 1^{mm} si sposta di 59° 29′ (vedi tabella precedente). Ma adoperai di preferenza i dischi grossi 5^{mm}, nei quali come nelle sbarre grosse, è più marcata l' influenza del vario modo in cui il circuito viene chiuso od interotto. Con otto coppie Bunsen e facendo uso del reostata descritto nel cap. III, ed adoperato nelle altre esperienze finora narrate, trovai i seguenti valori medi dello spostamento della polarità.

	Disco grosso 1^{mm}	Disco grosso 5^{mm}	Disco grosso 7^{mm}
Chiudendo ed aprendo rapidamente il circuito	59°	64° 25′	70° 10′
„ lentamente ed aprendo „ „	48° 40′	28° 31′	13° 28′
„ rapidam. ed aprendo lentamente „	65° 12′	84° 48′	88° 35′

Dunque chiudendo lentamente il circuito le molecole meno si allontanano dalla posizione assunta in virtù della prima magnetizzazione; invece aprendolo lentamente esse restano più deviate verso la direzione della nuova magnetizzazione. Ciò mette in evidenza ancora una volta l' effetto della velocità acquistata dalle molecole, per la quale esse superano più o meno l' attrito sia nell' atto in cui si forma la magnetizzazione temporaria, sia quando tornano verso la posizione iniziale. Come risultato sperimentale possiamo dire che:

XX. Legge. *Lo spostamento angolare della polarità d' un disco magnetizzato, per effetto d' una nuova magnetizzazione ortogonale alla prima, è tanto maggiore quanto più rapidamente si chiude il circuito e quanto più lentamente lo si apre.*

Invece di smagnetizzare i dischi ad ogni misura, si può operare più rapidamente, adoperando più volte lo stesso disco. Dopo ogni misura si conduce la polarità del disco nell' asse del rocchetto, e si manda più volte la corrente, spostando se occorre ogni volta il disco, sinchè al chiudersi ed aprirsi del circuito l' ago sospeso non si sposti. Ciò fatto si gira il disco di 90°, e si fa una nuova misura e così di seguito. I risultati che si ottengono sono ancora gli stessi. Ho prima descritto il primo metodo, come più rigoroso.

Proprietà d' un disco fatto girare entro il rocchetto.

54. Se mentre nei rocchetti passa la corrente, si fa girare il disco su sè stesso, esso resta magnetizzato in una maniera speciale, ma che ha il vantaggio di riuscire sempre la stessa e riprodursi a volontà, anche dopo avere in altri modi, e colla stessa corrente o con altra poco più intensa, magnetizzato il disco. Un disco in tali condizioni si presta assai bene a ripetere le esperienze dell' articolo precedente, eseguendone un gran numero di seguito collo stesso disco; diffatti non si dovrà far altro ad ogni misura, che far girare più volte il disco sotto l'azione della corrente, onde ridurlo costantemente nelle stesse condizioni iniziali.

Se dopo che al disco si sono fatti fare uno o più giri, si apre il circuito, si trova che la sua polarità non è diretta secondo l' asse del rocchetto, ma è spostata di un certo angolo nel senso nel quale il disco fu fatto girare, e che facilmente si può misurare.

Questo fenomeno singolare si può dimostrare anche nel modo seguente. Si pone un disco d'acciaio munito di capelletto, sopra una punta, onde possa muoversi a guisa di ago calamitato. Vi si accosta il polo di una forte calamita oppure lo si circonda di un rocchetto percorso dalla corrente. Facendo girare il disco ed arrestandolo d' un tratto col dito, al momento in cui viene di nuovo abbandonato a sè stesso, si sposta d' un certo angolo in senso opposto a quello nel quale fu fatto girare, quasi come fosse sospeso ad un filo imperfettamente elastico. Un semplice ago magnetico piccolissimo e di perfetta mobilità, basta per mostrare il fenomeno descritto, quando non si voglia misurare l' angolo. L' angolo che fa la polarità del

disco coll' asse del rocchetto nel momento in cui si apre il circuito, dipende dalla grossezza del disco e dalla intensità della corrente.

Così per esempio, mentre con una data corrente l' angolo fu di 38° per un disco di 1^{mm}, divenne 47° per uno di 2^{mm}, 65° per uno di 5^{mm}, 85° per due dischi di 5^{mm} sovrapposti e 132° per un grossissimo disco o meglio cilindro d' acciaio (grosso 26^{mm}). L' angolo cresce dunque colla grossezza. Con un disco grosso 2^{mm}, variando l' intensità della corrente ottenni:

Intensità	Valore dell' angolo
38^{mm}	60° 22′
60	56 3
96	52 29
115	48 10
133	45 12
200	36 29
230	32 42

L' angolo della polarità coll' asse dell' elica, diminuisce dunque al crescere dell' intensità della corrente. In compenso essendo poi maggiore il momento magnetico del disco, è più facile determinarlo colle correnti forti.

Mentre passa la corrente nel rocchetto, la polarità temporaria del disco girante è, per quanto apparisce, nella direzione dell' asse o quasi. È dunque nell' atto di aprire il circuito che le molecole spostate in massima parte nel senso della rotazione del disco, sono abbandonate a sè stesse, e retrocedono più o meno velocemente. Infatti se il circuito del rocchetto si apre lentamente col reostata, l' angolo dell' asse magnetico del disco con quello del rocchetto diviene assai minore. Ecco due serie di misure fatte la prima con un disco di 1^{mm} di grossezza e l' altra con un disco grosso 5^{mm}.

	Disco di 1^{mm}	Disco di 5^{mm}
Aprendo rapidamente . . .	33° 12′	84°
„ lentamente	30 10	29 10′
„ „	30 42	29 42
„ rapidamente . . .	32 49	85 10
„ „	33	28 49
„ lentamente	29 58	29 53
„ rapidamente . . .	33 11	84 50

Come sempre la differenza si ha più sensibile col disco più grosso.

Infine è a sapersi, che un disco magnetizzato nel modo indicato, non ha una distribuzione simmetrica del magnetismo dalle due parti dell' asse di polarità. Infatti, se dopo avere magnetizzato un disco con rotazione, lo si magnetizza nel

modo ordinario secondo una direzione formante con quella della polarità un dato angolo α, la polarità stessa si sposta di una quantità β differente secondo che la direzione della nuova magnetizzazione è situata da una parte o dall' altra della polarità primitiva. Ecco un esempio:

Valore di α preso nel senso della rotazione	Valore corrispondente di β		Valore di α preso in senso contrario alla rotazione	Valore corrispondente di β	
30°	5°	10′	30°	16°	30′
34	7	5	34	18	48
40	13	30			
45	20	48	45	27	
90	66	30	90	64	10
135	115	30	135	112	25

Le proprietà speciali di un disco magnetizzato mentre è in rotazione, meriterebbero di essere studiate più a fondo; e ciò farò forse in seguito. Quì ho voluto darne un breve cenno, perchè un disco magnetizzato in tal modo si presta alle esperienze relative allo spostamento angolare della polarità.

CAPITOLO IX.

Modificazioni alla teoria di Weber.

Ipotesi fondamentali.

55. I fenomeni d' induzione che abbiamo studiato nel cap. IV, e quindi la diversa distribuzione interna della forza magnetizzante (cap. V), secondo il modo nel quale si effettuano la chiusura e l' apertura del circuito, renderebbero assai complicata una teoria esatta della magnetizzazione.

Nella teoria data da Weber si suppone che la forza magnetizzante sia costante in tutta la massa considerata; essa invece deve variare da punto a punto, per la diversa rapidità colla quale le molecole si spostano in causa delle induzioni, e per le loro reciproche azioni, variabili colla forma della sbarra considerata (art. 10). È nelle sbarre di ferro dolce che gli effetti dell' induzione si manifestano al più alto grado, mentre sarebbe appunto nel caso del ferro che la teoria di Weber potrebbe intendersi applicata.

Se vuolsi estendere la teoria anche alla magnetizzazione permanente, non si può a rigore ammettere che al cessare della forza magnetizzante esterna, cessi d' agire qualunque forza sopra ogni molecola, all' infuori di quella che tende a

ricondurla nella posizione iniziale. Al contrario continua ad agire la risultante delle azioni delle altre molecole, la quale varia colla forma della sbarra e colla posizione della molecola considerata, e che in sbarre assai lunghe e sottili, prosegue in parte l' azione della forza magnetizzante esterna. Il supporre che dopo l' apertura del circuito, sopra ogni molecola non operi che la coppia di elasticità, condurrà a risultati tanto meno esatti quanto più la sbarra considerata sarà di forma allungata. Tuttavia il meglio che per ora si possa fare sta appunto nell' adottare le ipotesi semplificative di Weber, aggiungendovi l' altra dell' attrito molecolare per render conto del magnetismo permanente, ed i risultati saranno prossimi al vero nel caso di sbarre corte e grosse. Oltre a ciò, considereremo particolarmente l' acciaio, nel quale gli effetti dell' induzione sono minori, quanto più è temprato. Ma siccome nella maggior parte dei nostri ragionamenti, ammetteremo che la forza magnetizzante vari lentamente, i risultati saranno egualmente validi per l' acciaio rincotto o pel ferro.

Non potendo poi tener conto della velocità maggiore o minore acquistata dalle molecole nei loro movimenti, la quale velocità influisce tanto sulla magnetizzazione, ci limiteremo a considerare casi speciali, in cui non si richiede la conoscenza di questa velocità.

In questo e nei successivi capitoli studieremo dunque come si modifichi la teoria di Weber aggiungendovi l' ipotesi dell' attrito molecolare, senza la pretesa di costruire così una teoria completa. I principi fondamentali saranno quindi gli stessi assunti dal Chwolson (art. 4) con questa differenza, che il fisico russo ammette tacitamente che le molecole non acquistino velocità sensibile nei loro movimenti, che le aiuti a superare la resistenza d' attrito.

Deviazione minima, media e massima d' una molecola.

56. Sia AB (fig. 4) l' asse d' una molecola. Quando essa è deviata in A_1B_1 per effetto della forza magnetizzante che agisce nella direzione Ox, essa trovasi sotto l' impero di due coppie opposte, e cioè quella che tende a spostarla maggiormente (coppia magnetizzante), e quella che tende a ricondurla in AB (coppia di elasticità). Sia μ l' intensità magnetica dei poli della molecola, $2l$ la loro distanza, ed m il suo momento magnetico; sarà $m = 2\mu l$. La forza che agisce sui due poli della molecola sarà $X\mu$, dicendo X la forza magnetizzante per unità di magnetismo; e chiamando θ l' angolo A_1Ox, il momento della coppia magnetizzante sarà $\mu X \, . \, 2l \operatorname{sen} \theta = mX \operatorname{sen} \theta$.

Ammetteremo con Weber che la coppia di elasticità sia costituita da due forze μD applicate in A_1 e B_1, costanti d' intensità e parallele ad AB; il suo momento sarà $mD \operatorname{sen} (\alpha - \theta)$, indicando con α l' angolo AOx.

Ciò premesso, la molecola considerata potrà rimanere immobile, non solo quando le due coppie opposte si fanno equilibrio, ma anche quando differiscono

i loro momenti di quel valore minimo mL necessario a vincere l' attrito. Per cui la molecola potrà fermarsi quando mX sen $\theta - mD$ sen $(\alpha - \theta)$ è compreso fra $- mL$ e $+ mL$, ossia

$$X \operatorname{sen} \theta - D \operatorname{sen} (\alpha - \theta) \begin{smallmatrix} < L \\ > - L \end{smallmatrix} .$$

57. Consideriamo tre casi principali, e cioè che X sen $\theta - D$ sen $(\alpha - \theta)$ sia eguale ad L, a zero, ed a $- L$.

Nel primo caso la coppia magnetizzante supera quella di elasticità della quantità mL, e fra le posizioni nelle quali la molecola può rimanere immobile, essa si trova in quella più vicina alla posizione che occupava prima della magnetizzazione. Sia A_2B_2 quella posizione, e si ponga ang. $A_2Ox = \theta_2$; avremo:

$$X \operatorname{sen} \theta_2 - D \operatorname{sen} (\alpha - \theta_2) = L. \tag{1}$$

La molecola assumerà la posizione A_2B_2, per esempio facendo lentamente crescere la forza magnetizzante. L' angolo di cui essa devìa lo chiameremo angolo di *deviazione minima.*

Se la molecola si sposta dalla posizione AB rapidamente, essa acquisterà una certa velocità, in virtù della quale non potrà fermarsi in A_2B_2, ma oltrepasserà questa posizione di un angolo più o meno grande, secondo che la sua velocità sarà pure maggiore o minore. La posizione più lontana possibile A_3B_3 nella quale potrà fermarsi, sarà quella in cui la coppia d' elasticità supera quella magnetizzante della quantità mL, e sarà determinata dalla condizione

$$X \operatorname{sen} \theta_3 - D \operatorname{sen} (\alpha - \theta_3) = - L, \tag{2}$$

essendo θ_3 l' angolo A_3Ox. In tal caso la molecola sarà alla *deviazione massima*, e ciò potrà accadere per esempio quando si giungerà al valore X della forza magnetizzante, partendo da un valore maggiore.

Se dopo avere come nel primo caso posta in azione la forza X, si danno alla sbarra degli urti, la molecola si accosterà poco a poco alla posizione A_1B_1, che supponiamo essere quella nella quale le due coppie opposte si equilibrano. Distinguiamo con θ_1 l' angolo A_1Ox, che prima avevamo indicato con θ; a determinare θ_1 varrà la condizione

$$X \operatorname{sen} \theta_1 - D \operatorname{sen} (\alpha - \theta_1) = 0. \tag{3}$$

La molecola sarà ora alla *deviazione media.*

58. Che una molecola possa occupare diverse posizioni durante la magnetizzazione temporaria, per un dato valore della forza magnetizzante, l' abbiamo sta-

bilito anche senza particolari ipotesi sulla coppia d' elasticità (art. 13). Ma colle ipotesi quì adottate risulta che la direzione OA_1 divide a mezzo l' angolo A_2OA_3.

Per dimostrarlo torna comodo considerare invece delle due coppie contrarie, due sole forze, il cui momento rispetto al punto O intorno al quale gira la molecola, sia eguale a quello delle coppie stesse. Se sulla direzione dell' asse della molecola presa per esempio alla deviazione media, e ad una distanza da O eguale ad m, (fig. 11) applichiamo una forza X parallela ad Ox, il momento di questa forza rispetto ad O sarà precisamente mX sen θ_1. Similmente potremo alla coppia d' elasticità sostituire la forza D applicata essa pure in a_1 e parallela alla direzione OA della molecola nella posizione iniziale. La risultante R delle due forze D ed X, sarà nella direzione Oa_1, giacchè quando una molecola è alla deviazione media le due coppie opposte si distruggono. Ma se la molecola trovasi in posizione diversa da Oa_1, la risultante R, che come D ed X rimane invariata in grandezza e direzione, tenderà a spostare la molecola verso Oa_1. Se la molecola è alla deviazione minima Oa_2, la risultante R deve avere un momento mL. Ora il momento di R, non è che quello di a_2E, componente di R perpendicolare ad Oa_2; dunque $a_2E = L$, e siccome $a_2E = a_2R$ sen a_2RE, si avrà:

$$L = R \text{ sen } (\theta_2 - \theta_1) \ .$$

Analogamente il momento di R quando la molecola è in Oa_3 alla deviazione massima, deve essere pure mL in valore assoluto; sarà dunque $a_3F = L$ e quindi

$$L = R \text{ sen } (\theta_1 - \theta_3) \,.$$

Dunque $\theta_2 - \theta_1 = \theta_1 - \theta_3$ od anche $\theta_1 = \dfrac{\theta_2 + \theta_3}{2}$ e cioè: *l' angolo di deviazione media è la media aritmetica degli angoli di deviazione minima e massima.*

Angolo d' attrito.

59. Quando la forza X cessa di agire, la molecola torna verso la posizione di equilibrio, ma può darsi che o non la raggiunga, od oltrepassandola si fermi dalla parte opposta. Supporremo d' ora in poi, che impedendo alla molecola di acquistare velocità, essa si fermi non appena il momento della coppia che agisce su di essa è eguale ad mL. Chiamando β l' angolo del quale resta spostata la molecola avremo: $mL = mD$ sen β, ossia

$$\text{sen } \beta = \frac{L}{D} \,. \tag{4}$$

Quest' angolo β che è il massimo spostamento angolare che può conservare permanentemente una molecola, lo chiameremo *angolo d'attrito.*

Costruzione grafica.

60. Una costruzione grafica riesce utilissima per determinare gli angoli θ_1, θ_2, θ_3. Sopra una retta Ox (Fig. 12) che rappresenta la direzione della forza magnetizzante, e fatto centro in O, si descriva una semicirconferenza di raggio D. Sia $AOx = \alpha$, e cioè rappresenti OA la direzione dell' asse d' una molecola nella posizione iniziale. Si prenda $OX = X$, e si conduca AX. Il triangolo OAX sarà identico al triangolo XRa_1, della figura 11, e perciò sarà $AX = R$, e l'angolo AXO sarà θ_1. Conducendo quindi OA_1, parallela ad AX, si sarà determinata la deviazione media della molecola OA.

Si faccia ora una circonferenza di centro X e raggio L, e da A vi si conducano le tangenti AC, AD. Avremo

$$\text{sen}\, CAX = \frac{CX}{AX} = \frac{L}{R} \quad \text{e quindi} \quad CAX = \theta_2 - \theta_1 \ .$$

Dunque conducendo OA_2 parallela ad AC, avremo tracciata la posizione corrispondente alla deviazione minima. Analogamente OA_3 parallela ad AD darà la deviazione massima e sarà l'angolo $A_3Ox = \theta_3$. Evidentemente al crescere di X l'angolo A_2OA_3 si rimpicciolisce (vedi art. 13). Per $X = \infty$, le rette OA_1, OA_2, OA_3 cadono tutte in Ox; cioè tutte le molecole sono orientate nella direzione della forza magnetizzante, e si ha lo stato di saturazione pel magnetismo temporario.

Se infine fatto centro in O si descrive un' altra circonferenza di raggio L, e da A si conduce la tangente AE, e poi si tira OP parallela ad AE, questa retta OP farà con OA l' angolo β, ed indicherà così la posizione della molecola nel magnetismo permanente, supponendo che essa retroceda senza velocità. Infatti si ha

$$\text{sen}\, OAE = \frac{OE}{AO} = \frac{L}{D} \ .$$

La costruzione grafica degli angoli di deviazione minima e massima cade in diffetto, quando il punto A si trovi nell' interno della circonferenza di centro X e raggio L, come nella figura 13. Infatti in tal caso non è possibile condurre da A le due tangenti. Ma è facile riconoscere che in tal caso appunto non esiste nè deviazione massima nè minima. Ed invero, le due posizioni di deviazione minima e massima sono caratterizzate dall' avere la risultante R una componente perpendicolare all' asse della molecola eguale ad L ($a_2\,E$ ed $a_3\,F$ della figura 11); ma la risultante AX (Fig. 13) è ora minore di L, e perciò non può scindersi in

due componenti ortogonali una delle quali sia L. Dunque qualunque sia la posizione in cui la molecola viene portata, essa può rimanervi sotto l'azione della forza magnetizzante.

Il più delle volte però non occorre tener conto di questo caso speciale. Per esempio, se la forza magnetizzante si fa crescere lentamente o rapidamente da zero al suo valore finale, le molecole che sono nelle condizioni di OA sono precisamente fra quelle che la forza stessa non riesce a spostare, come si vedrà nell'articolo che segue.

Valori particolari di α e di X.

61. Il momento della coppia che tende a spostare una molecola che si trovi nella posizione iniziale, è mX sen α. Se sen α è abbastanza piccolo, potrà questo momento non superare mL; se ciò accade la molecola non si sposterà. Ponendo X sen $\alpha = L$, saremo nel caso limite, e cioè pei valori minori di sen α la molecola non si sposta, e pei maggiori sì. Indicando con a_0 il valore minore di 90° che si trae da quella equazione, ponendo cioè

$$a_0 = \text{Ar sen} \frac{L}{X} \qquad (5)$$

potremo dire che: *quelle molecole che fanno con Ox un angolo α compreso fra zero ed a_0 o fra $\pi - a_0$ e π, non sono spostate.*

Il valore di a_0 dipende da X. Se $X = L$ si ha $a_0 = \frac{\pi}{2}$, e quindi nessuna molecola si sposta. Dunque: *una forza magnetizzante minore di L non produce magnetizzazione.* Ciò è vero sia che la forza magnetizzante cresca lentamente o rapidamente. Non più però se mentre essa agisce si danno urti alla sbarra, giacchè in tal caso anche le molecole per le quali α è $< a_0$ oppure $> \pi - a_0$ poco a poco sono deviate; neppure evidentemente nel caso in cui al valore X si giunga partendo da valori più grandi, pei quali a_0 è minore. L'angolo a_0 si costruisce (fig. 14) conducendo da O la tangente COA_0 al circolo XC. L'angolo A_0Ox è appunto a_0. Così $A_0'Ox$ è $\pi - a_0$.

62. Per certi valori di α, la molecola si sposta nell' atto in cui si forma la magnetizzazione temporaria, ma quando la forza X cessa d' agire, essa non abbandona la nuova posizione.

Considereremo tre casi particolari, cominciando da quello del magnetismo temporario minimo, supponendo cioè dapprima che le molecole si allontanano il meno possibile dalla posizione iniziale.

Perchè una molecola resti deviata, occorre che l' angolo $\alpha - \theta_2$ del quale è spostata sia non maggiore di β. Ponendo $\alpha = \theta_2 + \beta$ avremo il valore di α che limita le molecole che restano deviate da quelle che retrocedono. Ma colla (1) si ha

$$X \text{ sen } (\alpha - \beta) - D \text{ sen } \beta = L$$

ossia

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{2L}{X},$$

e chiamando γ il valore di $\alpha - \beta$ minore del quadrante, ponendo cioè

$$\gamma = \operatorname{Ar\,sen} \frac{2L}{X}, \tag{6}$$

avremo:

$$\alpha - \beta = \begin{cases} \gamma \\ \pi - \gamma \end{cases}.$$

Indicando quindi con a_1 ed a_2 i due valori di α,

$$a_1 = \beta + \gamma = \beta + \operatorname{Ar\,sen} \frac{2L}{X} \tag{7}$$

$$a_2 = \pi - \gamma + \beta = \pi + \beta - \operatorname{Ar\,sen} \frac{2L}{X}. \tag{8}$$

Quando α sarà minore di a_2 e maggiore di a_1, la molecola retrocederà verso la posizione iniziale al cessare dell' azione di X; in caso contrario conserverà nel magnetismo permanente la posizione che acquistò nel temporario.

Gli angoli a_1 ed a_2 si possono costruire graficamente. Si conduca perciò la tangente comune interna ABC (fig. 14) ai due circoli di raggio L, e si tiri OA. L' angolo AOx sarà precisamente a_1. Infatti se da O si conducesse una parallela ad AC, e rappresenterebbe in pari tempo e la OP e la OA_2 della fig. 12, per essere ABC in pari tempo la tangente condotta da A alla circonferenza OB, e quella condotta alla XC. Dunque l' angolo AOx (fig. 14) è precisamente quel valore di α pel quale la molecola, passando alla deviazione minima, si sposta dell' angolo β; cioè a_1. L' altra tangente comune interna $B'C'$, taglia in A' la semicirconferenza di raggio D, e l' angolo $A'Ox$ è eguale ad a_2, come è facile dimostrare.

Gli angoli a_1 ed a_2 sono distinti dalla proprietà seguente, e cioè: *magnetizzando lentamente una sbarra, quelle molecole per le quali α ha valori non compresi fra a_1 ed a_2, al cessare della forza magnetizzante restano nella loro nuova posizione.* Si noti che non tutte le molecole il cui angolo α è fra 0 e a_1 o fra a_2 e π si trovano fuori dalla posizione iniziale; sappiamo invece che quelle corrispondenti ad α compreso fra 0 ed a_0 e fra $\pi - a_0$ e π, trovansi sempre al posto occupato prima della magnetizzazione.

Per certi valori di X può accadere che a_2 sia maggiore di $\pi - a_0$. In tal caso è inutile tener conto di a_2. Il valore di X pel quale $a_2 = \pi - a_0$ si può trovare così. Per la (8) e quest' ultima, si ha:

$$\pi - \gamma + \beta = \pi - a_0$$

e quindi:

$$\text{sen } a_0 = \text{sen } (\gamma - \beta)$$

da cui, coll' aiuto delle (4), (5) e (6):

$$X = \sqrt{5 D^2 - 4 D \sqrt{D^2 - L^2}} \qquad (9)$$

Se X sarà maggiore di questo valore, a_2 sarà maggiore di $\pi - a_0$ e non gioverà tenerne conto.

Se X è eguale a $2L$, si ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ed $a_1 = a_2 = \frac{\pi}{2} + \beta$, e se X diminuisce ancora, γ diviene immaginario. Ma la costruzione grafica mostra che l' angolo AOA_2 (fig. 12), in questo caso è sempre minore di β. Dunque: *se* $X < 2L$ *tutte le molecole, dopo spostate, conservano la nuova posizione, al cessare della forza magnetizzante, ed il magnetismo permanente è identico al temporario.* In quanto all' angolo a_1, esso evidentemente non diviene mai minore di a_0.

Possiamo ora completamente definire lo stato delle molecole nel magnetismo temporario d' una sbarra, magnetizzata facendo crescere lentamente la forza X, come pure nel magnetismo permanente che segue, facendo diminuire X ancora lentamente; cioè in uno dei casi considerati nei cap. X e XI.

Se $X < L$, non si ha magnetizzazione. Se $X > L$, si ha magnetizzazione temporaria, nella quale le molecole corrispondenti a valori di α compresi fra 0 ed a_0 e fra $\pi - a_0$ e π non sono spostate, mentre le altre trovansi alle rispettive deviazioni minime.

Pel magnetismo permanente bisogna distinguere tre casi.

1° $X > L$ ma $< 2L$, esso è identico al temporario.

2° $X > 2L$ e $<$ del valore (9); le molecole il cui angolo α è fra 0 ed a_0 o fra $\pi - a_0$ e π sono sempre alla posizione iniziale; fra a_0 ed a_1 e fra a_2 e $\pi - a_0$ sono alla deviazione minima; fra a_1 ed a_2 restano spostate di un angolo β.

3° $X >$ del valore (9); le molecole per le quali α è fra 0 ed a_0 o fra $\pi - a_0$ e π sono alla posizione iniziale; fra a_0 ed a_1 sono alla deviazione minima; fra a_1 e $\pi - a_0$ sono deviate di β.

63. Consideriamo in secondo luogo il caso in cui durante la magnetizzazione la sbarra d' acciaio viene percossa ripetutamente, onde le molecole si portino alla deviazione media. Anche in questo caso vi sono molecole, che al cessare della forza magnetizzante, rimangono ove sono. Per trovare quali siano, determiniamo i valori di α, pei quali $\alpha = \beta + \theta_1$, cioè OP (fig. 12) coincide con OA_1. Colla (3) avremo

$$X \text{ sen } (\alpha - \beta) = D \text{ sen } \beta = L$$

da cui

$$\alpha - \beta = \begin{cases} a_0 \\ \pi - a_0 \end{cases},$$

ed indicando con a_1' ed a_2' i due valori di α

$$a_1' = a_0 + \beta \qquad (10)$$
$$a_2' = \pi - a_0 + \beta \qquad (11)$$

Se α sarà nè maggiore di a_1' nè minore di a_2', la deviazione della molecola sarà minore di β, e perciò al cessare di X non si sposterà. Dunque: *magnetizzando una sbarra in modo che le molecole si trovino alla deviazione media, nell' atto in cui cessa d' agire la forza magnetizzante, quelle per le quali* α *è compreso fra* 0 *ed* a_1' *o fra* a_2' *e* π *conservano la nuova posizione.*

Se $X > D$, a_0 è $< \beta$, a_2' è $>$ di π, ed in tal caso non occorre più occuparsene. Sarà solo per $X < D$ che si dovrà tener conto di a_2', anche se sia maggiore di $\pi - a_0$, giacchè nel caso attuale, per effetto degli urti, anche le molecole il cui α è compreso fra 0 ed a_0 e fra $\pi - a_0$ e π, sono spostate e condotte alla deviazione media. Gli angoli a_1' ed a_2' si costruiscono graficamente come segue (fig. 15).

Da X si conducono le tangenti XM ed XN al cerchio di centro O e raggio L. MOx sarà eguale ad a_1' ed NOx ad a_2'. Ciò risulta dal semplice confronto della figura 15 colle operazioni della fig. 12.

Se $X = L$ le due tangenti coincidono, e d' altronde si ha $a_0 = \frac{\pi}{2}$ ed $a_1' = a_2' = \frac{\pi}{2} + \beta$. Perciò: *se* $X < L$ *tutte le molecole, al cessare di* X *conservano la nuova posizione, ed il magnetismo permanente è identico al temporario.*

Possiamo ora indicare, come siano disposte le molecole nel magnetismo temporario e nel permanente, supponendo che dopo aver fatto crescere lentamente X e dati gli urti alla sbarra, si faccia pure lentamente diminuire la forza magnetizzante.

In quanto alla magnetizzazione temporaria è chiaro che qualunque sia X, ogni molecola si trova alla corrispondente deviazione media. Quanto alla permanente:

1° per $X < L$ magnetizzazione permanente identica alla temporaria che l' ha preceduta;

2° per $X > L$ ma $< D$, le molecole per le quali α è fra 0 ed a_1' o fra a_2' e π sono alla deviazione media, e le altre sono deviate di β;

3° per $X > D$, le molecole per le quali α è fra 0 ed a_1' sono alla deviazione media, e tutte le altre sono spostate dell' angolo β.

Anche per questi casi di magnetizzazione sarà calcolato il momento magnetico nei capitoli seguenti.

64. Consideriamo un terzo ed ultimo caso di magnetizzazione, il quale consiste nell' esporre la sbarra ad una forza magnetizzante infinita, o da potersi considerare come tale, (la quale condurrà tutte le molecole ad essere parallele alla forza magnetizzante), e nel diminuire quindi lentamente la forza stessa sino al valore X.

Poco a poco le molecole si allontaneranno dalla direzione della forza, restando ad ogni istante alla deviazione massima.

Supponiamo dapprima che X sia alquanto grande (Fig. 16). Se si conduce la tangente LMN alle due circonferenze di raggio L e di centri O ed X, e si tirano OM ed ON, queste rette indicano la separazione fra la direzione delle molecole che sono in condizioni diverse. Infatti una molecola rappresentata da OA ha la deviazione massima in OA_3 parallela alla tangente condotta da A alla sinistra del circolo XL. Ma per una molecola OA', posta fuori dell' angolo MON, la deviazione massima è in OA'_3, alla destra di Ox. Ciò indica che la forza X trattiene ancora dirette secondo Ox, le molecole le cui direzioni sono fuori dell' angolo MON; mentre quelle le cui direzioni sono entro l' angolo MON, si sono già allontanate dalla direzione della forza magnetizzante, e trovansi alla rispettiva deviazione massima. Le molecole dirette secondo OM ed ON, saranno le prime a spostarsi, diminuendo ulteriormente X. Tirando MQ perpendicolare ad Ox si ha sen $MOQ = \frac{MQ}{OM} = \frac{L}{D}$, e quindi angolo $MOQ = \beta$.

Diminuendo X, le molecole la cui direzione cade entro l'angolo $NOx = \beta$, restano permanentemente nella direzione della forza magnetizzante. Ma quelle invece che cadono nell' angolo MOQ, ossia il cui valore di α è fra $\pi - \beta$ e π, quando X sia abbastanza piccolo, poco a poco si spostano verso la posizione iniziale. Supponiamo infatti che X abbia un valore tale, che il cerchio XL tagli quello di centro O e raggio D (Fig. 17). Una molecola come OA' sarà nelle condizioni considerate alla fine dell' art. 60, e cioè per essa non esisterà una deviazione massima, e sotto l' azione della forza X potrà restare in qualunque direzione. Essa non avrà dunque ancora abbandonato la direzione Ox. Anche col valore di X della figura 17, le condizioni non sono dunque mutate. Le cose cambiano dal momento in cui la circonferenza OL passa per M. Allora il punto X (Fig. 16) cade in Q e si ha $X = D \cos \beta = \sqrt{D^2 - L^2}$. Se X diviene minore di $\sqrt{D^2 - L^2}$, come nella figura 18, le molecole situate nell' angolo MOB, hanno la loro deviazione massima alla sinistra di Ox come quelle comprese nell' angolo MON, ciò che indica che esse hanno già abbandonato la direzione della forza magnetizzante; quelle invece le cui direzioni sono comprese nell' angolo BOX, saranno ancora dirette secondo Ox. Indichiamo con a_3 l' angolo BOx, che fra poco determineremo. Ciò continua ad aver luogo, al diminuire di X, finchè il circolo LX taglia il circolo MO. Quando $X = D - L$, i due circoli sono tangenti internamente ed $a_3 = \pi$, e se X diminuisce ancora, tutte le molecole le cui direzioni cadono entro l' angolo NOX, trovansi alla rispettiva deviazione massima.

Riassumendo, e cominciando dai piccoli valori di X, potremo dire che:

1.° per $X < D - L$, le molecole per le quali α è compreso fra 0 e β, sono nella direzione della forza magnetizzante, mentre le altre trovansi alla deviazione massima rispettiva;

2.° per $X > D - L$ ma $< \sqrt{D^2 - L^2}$, le molecole per le quali α è fra 0 e β e fra a_3 e π, trovansi nella direzione della forza; le altre alla deviazione massima;

3.° per $X > \sqrt{D^2 - L^2}$ le molecole per le quali α cade fra 0 e β o fra $\pi - \beta$ e π, trovansi nella direzione della forza; tutte le altre si trovano alla deviazione massima.

Questa discussione è un esempio dell' utilità che può avere la costruzione grafica. Ma resta a determinare l' angolo a_3. Ora, tirando BX (Fig. 18) si ha $\overline{BX}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OX}^2 - 2\,OB.\,OX \cos BOX$ ossia $L^2 = D^2 + X^2 + 2\,DX \cos a_3$ da cui

$$a_3 = \text{Arcos}\,\frac{L^2 - D^2 - X^2}{2DX}. \qquad (12)$$

Se la forza X diminuisce fino a zero, sempre lentamente, si raggiungerà lo stato di saturazione pel magnetimo permanente. Esso sarà caratterizzato da ciò che le molecole per le quali α è fra 0 e β trovansi nella direzione della forza magnetizzante, e le altre sono spostate tutte dell' angolo d' attrito.

Alcune delle proprietà dimostrate in questo capitolo, sono vere anche senza fare alcuna ipotesi sulla natura della coppia di elasticità, come si è mostrato nell' art. 16.

CAPITOLO X.

Calcolo del momento magnetico temporario.

Magnetismo temporario minimo.

65. Dall' art. 61 sappiamo, che in una sbarra magnetizzata facendo crescere lentamente da zero la forza magnetizzante, le molecole per le quali α è compreso fra 0 ed a_0 e fra $\pi - a_0$ e π non sono spostate, mentre le altre sono alla deviazione minima, fanno cioè colla direzione della forza un angolo θ_2 dato dalla (1) dell' art. 57. Il momento magnetico della sbarra si otterrà, componendo quelli delle singole molecole, o sommando le componenti dei momenti elementari secondo la direzione della forza, giacchè per simmetria la polarità risultante sarà appunto in questa stessa direzione.

Se n è il numero totale delle molecole, ed m il momento di ciascuna, siccome il numero di quelle che fanno colla forza un angolo compreso fra α ed $\alpha + d\alpha$ è (art. 2)

$$\frac{n}{2} \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha\ ,$$

così la parte di momento magnetico della sbarra dovuta alle molecole il cui angolo α è compreso fra 0 ed a_0 e fra $\pi - a_0$ e π, sarà:

$$\frac{mn}{2}\int_0^{a_0} \text{sen}\,\alpha \cos\alpha\, d\alpha + \frac{mn}{2}\int_{\pi - a_0}^{\pi} \text{sen}\,\alpha \cos\alpha\, d\alpha \;.$$

Questa espressione si trova essere eguale a zero; risultato che era prevedibile per ragione di simmetria. Non resta dunque che tener calcolo delle altre molecole. Esse produrranno un momento magnetico t dato da

$$t = \frac{mn}{2}\int_{a_0}^{\pi - a_0} \text{sen}\,\alpha \cos\theta_2\, d\alpha \;.$$

Colla (1) si dovrà trovare il valore di $\cos\theta_2$, e quindi effettuare l' integrazione. Ora dalla (1) si trova facilmente

$$\cos\theta_2 = \frac{-DL\,\text{sen}\,\alpha + (X + D\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha} \;. \quad (13)$$

Ponendo mente alla costruzione grafica della figura 12, si riconoscerà facilmente che il radicale devesi prendere col segno positivo. Perciò si avrà, ponendo $M = mn$:

$$t = -\frac{MDL}{2}\int_{a_0}^{\pi - a_0} \frac{\text{sen}^2\,\alpha\, d\alpha}{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}$$

$$+ \frac{M}{2}\int_{a_0}^{\pi - a_0} \frac{(X + D\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha \;.$$

Vediamo come si possano effettuare queste due integrazioni, che si presenteranno anche nei casi successivi al presente, solo con diversità nei limiti. Se nella prima funzione da integrare, si avesse $X = D$, essa acquisterebbe la forma $\frac{\text{sen}^2\,\alpha\, d\alpha}{1 + \cos\alpha}$ ossia $(1 - \cos\alpha)\, d\alpha$, e cioè diverebbe immediatamente integrabile. Ma si può aggiungere al numeratore una quantità costante, onde renderlo divisibile pel denominatore, anche senza che sia $D = X$. Si ha infatti

$$(X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha)\,(X^2 + D^2 - 2\,DX\cos\alpha)$$

$$= 4\,D^2 X^2 \left[\frac{(X^2 + D^2)^2}{4\,D^2 X^2} - \cos^2\alpha\right].$$

Aggiungendo quindi e togliendo alla funzione da integrare la quantità $\frac{(X^2+D^2)^2}{4\,D^2\,X^2}$, si ha

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha\, d\alpha}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha} = \int \frac{1-\cos^2\alpha + \frac{(X^2+D^2)^2}{4\,D^2\,X^2} - \frac{(X^2+D^2)^2}{4\,D^2\,X^2}}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha}\, d\alpha$$

$$= -\frac{(D^2-X^2)^2}{4\,D^2\,X^2}\int \frac{d\alpha}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha} + \frac{1}{4\,D^2\,X^2}\int (X^2+D^2-2\,DX\cos\alpha)\, d\alpha$$

$$= \qquad \text{"} \qquad\qquad \text{"} \qquad + \frac{X^2+D^2}{4\,D^2\,X^2}\int d\alpha - \frac{1}{2\,DX}\int \cos\alpha\, d\alpha\ .$$

I tre integrali si eseguiscono immediatamente, poichè anche il primo è abbastanza noto, e lo si ottiene, per esempio prendendo per variabile $\frac{\alpha}{2}$ invece di α. Si ha dunque

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha\, d\alpha}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha} = -\frac{D^2-X^2}{2\,D^2\,X^2}\operatorname{Ar\,tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$+\frac{X^2+D^2}{4\,D^2\,X^2}\,\alpha - \frac{1}{2\,DX}\operatorname{sen}\alpha\ . \tag{14}$$

Il secondo integrale che si trova nel valore di t, si può ottenere come segue. Siccome

$$\frac{X+D\cos\alpha}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha} = \frac{1}{2\,X}\left(1-\frac{D^2-X^2}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha}\right),$$

l' integrale si trasforma nei due seguenti

$$\frac{1}{2\,X}\int \sqrt{X^2+D^2-L^2+2\,DX\cos\alpha}\ .\ \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha$$

$$-\frac{D^2-X^2}{2\,X}\int \frac{\sqrt{X^2+D^2-L^2+2\,DX\cos\alpha}}{X^2+D^2+2\,DX\cos\alpha}\ .\ \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\ .$$

Il primo di questi due integrali si esegue immediatamente; l' altro si può

ottenere moltiplicando i due termini della frazione pel numeratore. Infatti così facendo si ha

$$\int \frac{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX \cos\alpha}{(X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha =$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}$$

$$- L^2 \int \frac{\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{(X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}} .$$

La prima funzione è immediatamente integrabile, e la seconda pure, potendosi mettere sotto la forma

$$-\frac{L}{DX}\int \frac{\frac{1}{L}\cdot\frac{-DX\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}}{1 - \frac{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}{L^2}} d\alpha .$$

Il secondo integrale del valore di t diviene dunque:

$$\int \frac{(X + D\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha} .\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha =$$

$$-\frac{1}{6\,DX^2}\left(\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}\right)^3$$

$$+\frac{D^2 - X^2}{2\,DX^2}\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}$$

$$-\frac{L\,(D^2 - X^2)}{2\,DX^2}\operatorname{Ar\,tg}\frac{\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}{L} . \qquad (15)$$

L' estendere gli integrali fra i limiti non presenta altra difficoltà che un calcolo assai lungo e laborioso. Ma è necessario avvertire che il radicale deve sempre assumere il segno positivo, ed in causa di questo si ottengono espressioni diverse per t, secondo il valore di X. Infatti quando nel radicale mettiamo $\pi - a_0$ invece di α, in virtù della (5) si ha

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos(\pi - a_0)}$$

$$= \sqrt{X^2 + D^2 - L^2 - 2\,D\sqrt{X^2 - L^2}} = \pm\left(\sqrt{X^2 - L^2} - D\right) .$$

Secondo il valore di X, si dovrà prendere o l'uno o l'altro segno. Se X è $< \sqrt{D^2 + L^2}$, si ha pure $\sqrt{X^2 - L^2} < D$ e deve prendersi $D - \sqrt{X^2 - L^2}$ come valore del radicale; se invece $X > \sqrt{D^2 + L^2}$ si dovrà prendere $\sqrt{X^2 - L^2} - D$. Quando invece nel radicale si pone a_0 in luogo di α, si ha per ogni valore di X, $D + \sqrt{X^2 - L^2}$. Conviene dunque distinguere due casi.

66. 1° caso, $X < \sqrt{D^2 + L^2}$.

Il valore di t, che indicheremo ora con t_1 diviene

$$t_1 = \frac{ML(D^2-X^2)}{4\,DX^2}\left[\text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\text{tg}\,\frac{\pi-a_0}{2}\right) - \text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\text{tg}\,\frac{a_0}{2}\right)\right]$$

$$- \frac{ML(X^2+D^2)}{8\,DX^2}(\pi - 2a_0)$$

$$- \frac{M}{12\,DX^2}\left[\left(D-\sqrt{X^2-L^2}\right)^3 - \left(D+\sqrt{X^2-L^2}\right)^3\right]$$

$$+ \frac{M(D^2-X^2)}{4\,DX^2}\left[\left(D-\sqrt{X^2-L^2}\right) - \left(D+\sqrt{X^2-L^2}\right)\right]$$

$$- \frac{ML(D^2-X^2)}{4\,DX^2}\left[\text{Ar tg}\,\frac{D-\sqrt{X^2-L^2}}{L} - \text{Ar tg}\,\frac{D+\sqrt{X^2-L^2}}{L}\right].$$

Questa formola è suscettibile di grandi semplificazioni. Prima di tutto, in luogo di a_0 devesi porre il suo valore fornito dalla (5). Fatto questo si osserva che i quattro Ar. tg. hanno lo stesso coefficiente, che è $\frac{ML}{4\,DX^2}(D^2 - X^2)$, e perciò si può applicare la nota formola

$$\text{Ar tg}\,p \pm \text{Ar tg}\,q = \text{Ar tg}\,\frac{p \pm q}{1 \mp pq}, \tag{16}$$

prima ai due primi, poi ai due ultimi, ed infine ai due risultati così ottenuti. I quattro Ar. tg. si riducono così ad un solo che è Ar. tg $\frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{L}$, ed esprimendolo con Ar. cos, si ha

$$\text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\cdot\frac{\sqrt{X+\sqrt{X^2-L^2}}}{\sqrt{X-\sqrt{X^2-L^2}}}\right) - \text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\cdot\frac{\sqrt{X-\sqrt{X^2-L^2}}}{\sqrt{X+\sqrt{X^2-L^2}}}\right)$$

$$- \text{Ar tg}\,\frac{D-\sqrt{X^2-L^2}}{L} + \text{Ar tg}\,\frac{D+\sqrt{X^2-L^2}}{L} = \text{Ar cos}\,\frac{L}{X}. \tag{17}$$

In questa formola, che ci servirà anche in seguito, i quattro Ar. tg. sono scritti nello stesso ordine come nel valore di t_1; nei primi due però si è sostituito ad a_0 colla (5) il suo valore in funzione di L ed X.

Colla semplificazione degli Ar. tg., e con altre che si presentano in modo visibilissimo, il valore di t_1 si riduce al seguente:

$$t_1 = M \left\{ \left(\frac{2}{3} \frac{X}{D} - \frac{L^2}{6\,DX} \right) \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} - \frac{L}{2D} \operatorname{Ar\,cos} \frac{L}{X} \right\} \qquad (18)$$

Se in questa formola si fa $X = L$, si ottiene $t_1 = 0$, come già sapevamo. Ponendo invece $L = 0$ si ottiene $t_1 = \frac{2}{3} \frac{MX}{D}$, che è appunto la formola di Weber pel caso di $X < D$.

L'equazione (18) non differisce che nell'aspetto da quella trovata da Chwolson, pel magnetismo permanente relativamente al caso $X < 2L$ (art. 4). Ma sappiamo appunto che per $X < 2L$ il magnetismo permanente è identico al temporario (art. 62), supponendo, ben inteso, che la forza magnetizzante si faccia crescere e diminuire lentamente. Se la forza magnetizzante non cresce lentamente, quando comincia ad agire, si ha un maggior magnetismo permanente. La formola di Chwolson non è dunque valida che se si trascura la velocità acquistata dalle molecole.

67. 2° caso, $X > \sqrt{D^2 + L^2}$.

Nel valore di t devesi, nel caso attuale prendere eguale a $\sqrt{X^2 - L^2} - D$ il radicale, quando per α vi si pone $\pi - a_0$; indicheremo ora con t_2 il valore di t. Vi si trovano pure quattro Ar. tg., e sono anzi gli stessi della (17), salvo che il terzo ha segno contrario. Essi si ridurranno quindi ad

$$\operatorname{Ar\,cos} \frac{L}{X} - 2 \operatorname{Ar\,tg} \frac{\sqrt{X^2 - L^2} - D}{L}.$$

Con questa semplificazione, e con altre riduzioni, facili se non brevi, si giunge alla formola seguente

$$t_2 = M \left\{ 1 - \frac{L}{2D} \operatorname{Ar\,cos} \frac{L}{X} - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} - \frac{L^2}{2X^2} + \frac{L}{2D} \left(1 - \frac{D^2}{X^2} \right) \operatorname{Ar\,tg} \frac{\sqrt{X^2 - L^2} - D}{L} \right\}. \quad (19)$$

Se in questa formola si suppone $X = \infty$, si ha $t_2 = M$; è dunque con una forza magnetizzante infinita che ottiensi lo stato di saturazione temporaria. Facendo invece $L = 0$, si ha la formola di Weber pel caso $X > D$ e cioè

$$t_2 = M \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right).$$

Il magnetismo temporario minimo, ottenuto cioè facendo crescere lentamente a partire da zero la forza magnetizzante, varia con X secondo le formole (18) e (19), che si seguono con continuità. Facendo infatti $X = \sqrt{D^2 + L^2}$ in quelle due formole, esse danno egual risultato. Ed invero così facendo $\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}$ diviene $\frac{D}{X}$, e perciò si ha

$$t_1 = M \left\{ \frac{2}{3} - \frac{L^2}{6 (D^2 + L^2)} - \frac{L}{2D} \operatorname{Ar} \cos \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}} \right\} ;$$

e siccome l' Ar. tag che si trova nella (19) si annulla, si ha pure

$$t_2 = M \left\{ 1 - \frac{L}{2D} \operatorname{Ar} \cos \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}} - \frac{D^2}{3 (D^2 + L^2)} - \frac{L^2}{2 (D^2 + L^2)} \right\} .$$

Basta ridurre ad uno stesso denominatore i termini algebrici, per riconoscere che $t_1 = t_2$.

Magnetismo temporario medio.

68. Se dopo aver fatto crescere lentamente la forza magnetizzante, si danno degli urti alla sbarra, le molecole poco a poco si spostano, e tendono a portarsi alla deviazione media, nella quale la coppia magnetizzante fa equilibrio a quella di elasticità. Anche le molecole che prima dell' azione della forza magnetizzante formavano angoli α compresi fra 0 ed a_0 e fra $\pi - a_0$ e π, le quali non si erano spostate, per effetto degli urti si porteranno esse pure alla deviazione media. Dunque il magnetismo medio risulterà identico a quello che si formerebbe, se non esistesse forza coercitiva, e sarà espresso colle due formole di Weber. Indicando con w_1 e w_2 il suo valore, per X minore o maggiore di D, avremo

$$w_1 = M . \frac{2}{3} \frac{X}{D} \qquad (20) , \quad w_2 = M \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right) \qquad (21)$$

Magnetismo temporario massimo.

69. Per calcolare il magnetismo temporario che si ottiene facendo decrescere lentamente la forza magnetizzante dall' infinito al valore X, distingueremo tre casi, secondo che il valore di X è o minore, o maggiore di $D - L$ e di $\sqrt{D^2 - L^2}$, oppure è compreso fra queste due quantità (art. 64).

1° caso $X < D - L$

In questo caso quelle molecole per le quali α è compreso fra 0 e β, trovansi nella direzione della forza, mentre le altre trovansi alla deviazione massima, formando cioè con quella direzione un angolo θ_3 dato dalla (2) dell' art. 56.

Il magnetismo temporario massimo sarà dunque

$$T_1 = \frac{M}{2}\int_0^\beta \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha + \frac{M}{2}\int_\beta^\pi \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_3\, d\alpha \ ,$$

nella quale in luogo di $\cos\theta_3$ dovrà porsi il valore dato dalla (2) che non diversifica da quello di $\cos\theta_2$ della (13) che per essere positivo il primo termine. Si ha quindi:

$$T_1 = \frac{M}{2}\int_0^\beta \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha + \frac{MDL}{2}\int_\beta^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha}{X^2 + D^2 + 2\, DX\cos\alpha}$$

$$+ \frac{M}{2}\int_\beta^\pi \frac{(X + D\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\, DX\cos\alpha}}{X^2 + D^2 + 2\, DX\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \ .$$

Di queste tre integrazioni, la prima si eseguisce immediatamente, e le altre due non sono che le (14) e (15). Nell' estendere poi ai limiti l' integrale generale (15), devesi notare che il radicale abbia il segno positivo; perciò dovrà assumersi

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\, DX\cos\pi} = \sqrt{(D - X)^2 - L^2} \ ,$$

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\, DX\cos\beta} = \sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\, X\sqrt{D^2 - L^2}}$$
$$= \sqrt{D^2 - L^2} + X .$$

Si noti pure che quando nell' integrale (14) si pone π invece di α, l' Ar. tg. che vi si trova diviene

$$\text{Ar tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right) = \text{Ar tg}\,\infty = \frac{\pi}{2}$$

e perciò non restano nel valore di T_1 che tre Ar. tg., che non possono ridursi a più semplice espressione applicando in qualsiasi modo la (16).

A riduzioni fatte si trova per T_1 il valore seguente, nel quale, volendo, si potrebbe al secondo Art. tg. sostituire Ar cos $\frac{L}{D-X}$.

$$T_1 = M \left\{ \frac{1}{2} + \frac{X}{3D} + \frac{L}{4D}\pi - \frac{L}{8D}\left(1 + \frac{D^2}{X^2}\right) \text{Ar sen} \frac{L}{D} \right.$$

$$+ \frac{L}{4D}\left(\frac{D^2}{X^2} - 1\right)\left[\text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X} \cdot \frac{D - \sqrt{D^2 - L^2}}{L}\right)\right.$$

$$\left. - \text{Ar tg} \frac{\sqrt{(D-X)^2 - L^2}}{L} + \text{Ar tg} \frac{\sqrt{D^2 - L^2} + X}{L}\right]$$

$$- \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}\left(\frac{D^2}{6X^2} + \frac{L^2}{12X^2}\right)}$$

$$\left. + \sqrt{\left(1 - \frac{X}{D}\right)^2 - \frac{L^2}{D^2}\left(\frac{D^2}{6X^2} + \frac{L^2}{12X^2} + \frac{D}{6X} - \frac{1}{3}\right)} \right\}. \qquad (22)$$

Anche in questa formola, facendo $L = 0$, si ha $T_1 = M \frac{2}{3} \frac{X}{D}$, cioè il valore (20); e ciò deve essere mancando il corpo, in tale ipotesi, di forza coercitiva.

70. Se nella (22) si suppone $X = 0$, molti termini alcuni dei quali positivi, altri negativi, divengono infiniti; T_1 diviene dunque indeterminato, e conviene applicare le note regole di calcolo per scoprire il valore limite di T_1. Ma questo caso di $X = 0$, può più brevemente trattarsi direttamente, considerando che mentre le molecole per le quali α è compreso fra 0 e β, continuano a trovarsi nella direzione della forza magnetizzante, tutte le altre trovansi spostate dell' angolo β (63). Si avrà dunque per T_1 il seguente valore, che diremo P_∞:

$$P_\infty = \frac{M}{2}\int_0^\beta \text{sen}\,\alpha\, d\alpha + \frac{M}{2}\int_\beta^\pi \text{sen}\,\alpha \cos(\alpha - \beta)\, d\alpha$$

ossia

$$P_\infty = \frac{M}{2}\int_0^\beta \text{sen}\,\alpha\, d\alpha + \frac{M}{4}\cos\beta \int_\beta^\pi \text{sen}\,(2\,\alpha)\, d\alpha + \frac{M}{2}\,\text{sen}\,\beta \int_\beta^\pi \text{sen}^2\,\alpha\, d\alpha \;;$$

ed eseguite le integrazioni, si trova, senza alcuna difficoltà

$$P_\infty = M\left\{\frac{L}{4D}\pi - \frac{L}{4D}\,\text{Ar sen}\,\frac{L}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right\}. \qquad (23)$$

Questa quantità P_∞, non è altro che il massimo magnetismo permanente che si ha facendo decrescere lentamente fino a zero, una forza magnetizzante infinita; in tali condizioni si ha lo stato di saturazione pel magnetismo permanente.

71. 2° caso $X > D-L$ e $< \sqrt{D^2 - L^2}$.

Dall' art. 64 sappiamo, che in questo caso quelle molecole per le quali α è compreso fra 0 e β come pure fra a_3 e π, trovansi nella direzione della forza, mentre le altre sono alla deviazione massima. L' angolo a_3 è dato dalla (12). Chiamando T_2 il magnetismo temporario massimo in questo caso si avrà:

$$T_2 = \frac{M}{2}\int_0^\beta \text{sen}\,\alpha\,d\alpha + \frac{M}{2}\int_{a_3}^\pi \text{sen}\,\alpha\,d\alpha + \frac{M}{2}\int_\beta^{a_3} \text{sen}\,\alpha\cos\theta_3\,d\alpha\,.$$

L' integrazione si eseguisce come nell' art. 69, e colle stesse avvertenze. Si trova a riduzioni fatte

$$\begin{aligned} T_2 = M\Bigg\{ & 1 - \frac{D}{4\,X} + \frac{X}{12\,D} + \frac{L^2}{4\,DX} - \frac{L}{4\,X}\,\text{sen}\,a_3 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\left(\frac{D^2}{6\,X^2} + \frac{L^2}{12\,X^2}\right) \\ & + \frac{L}{8\,D}\left(1 + \frac{D^2}{X^2}\right)a_3 - \frac{L}{8\,D}\left(1 + \frac{D^2}{X^2}\right)\text{Ar sen}\,\frac{L}{D} \\ & + \frac{L}{4\,D}\left(1 - \frac{D^2}{X^2}\right)\Bigg[\text{Ar tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\,\text{tg}\,\frac{a_3}{2}\right) \\ & \qquad - \text{Ar tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\cdot\frac{D - \sqrt{D^2 - L^2}}{L}\right) \\ & \qquad - \text{Ar tg}\,\frac{\sqrt{D^2 - L^2} + X}{L}\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \qquad (24)$$

In questa formola resterebbe a sostituire ad a_3 il suo valore dato dalla (12). Se in questa formola si pone $X = D - L$, e lo stesso si fa nella (22), devono aversi eguali risultati. Ciò si verifica diffatti rammentando che per $X = D - L$ si

ha $a_3 = \pi$, osservando che il secondo dei due radicali della (22), come pure il secondo degli Ar. tg, si annullano, ed infine effettuando le riduzioni.

Se nella (24) si pone $L = 0$, non si trova nè il valore (20) nè il (21). Ma bisogna considerare che la formola (24) è valida fra $X = D - L$, ed $X = \sqrt{D^2 - L^2}$ ossia solo per $X = D$, quando L sia zero. Se in pari tempo si pone $X = D$ ed $L = 0$, la formola diviene $T_2 = \frac{2}{3} M$, che è appunto ciò che si ottiene tanto dalla (20) che dalla (21) col porre $X = D$.

72. 3° caso. $X > \sqrt{D^2 - L^2}$

Dall' art. 64 risulta che in questo caso tutte le molecole per le quali α è compreso fra 0 e β oppure fra $\pi - \beta$ e π, trovansi nella direzione della forza magnetizzante, mentre le altre sono alla deviazione massima. Chiamando T_3 il momento magnetico temporario che si ottiene in tal caso, avremo:

$$T_3 = \frac{M}{2} \int_0^\beta \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha + \frac{M}{2} \int_{\pi - \beta}^{\pi} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha + \frac{M}{2} \int_\beta^{\pi - \beta} \operatorname{sen} \alpha \cos \theta_3 \, d\alpha ,$$

e mettendo per $\cos \theta_3$ il suo valore, che non è altro che il (13) al quale si cangi il segno nel primo termine:

$$T_3 = \frac{M}{2} \int_0^\beta \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha + \frac{M}{2} \int_{\pi - \beta}^{\pi} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha + \frac{MDL}{2} \int_\beta^{\pi - \beta} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{X^2 + D^2 + 2\, DX \cos \alpha} \, d\alpha$$

$$+ \frac{M}{2} \int_\beta^{\pi - \beta} \frac{(X + D \cos \alpha) \sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\, DX \cos \alpha}}{X^2 + D^2 + 2\, DX \cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha .$$

Le integrazioni da eseguire, sono ancora quelle del 1° caso, e nell' estendere ai limiti l' ultimo integrale, devesi aver riguardo al segno del radicale, che deve essere positivo. Essendo ora $X > \sqrt{D^2 - L^2}$, si dovrà prendere

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2 DX \cos(\pi - \beta)} = \sqrt{X^4 + D^2 - L^2 - 2X \sqrt{D^2 - L^2}} = X - \sqrt{D^2 - L^2}$$

mentre, come nel primo caso, si ha

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\, DX \cos \beta} = X + \sqrt{D^2 - L^2}.$$

Nel valore di T_3 così calcolato, trovansi quattro Ar. tg. che hanno lo stesso coefficiente di quelli che si trovarono nel valore di t_1 (art. 66). Scrivendoli nell' ordine col quale si presentano, essi sono:

$$- \text{Art tg} \left(\frac{D-X}{D+X} \cdot \frac{\sqrt{D+\sqrt{D^2-L^2}}}{\sqrt{D-\sqrt{D^2-L^2}}} \right) + \text{Ar tg} \left(\frac{D-X}{D+X} \cdot \frac{\sqrt{D-\sqrt{D^2-L^2}}}{\sqrt{D+\sqrt{D^2-L^2}}} \right)$$

$$- \text{Ar tg} \frac{X-\sqrt{D^2-L^2}}{L} + \text{Ar tg} \frac{X+\sqrt{D^2-L^2}}{L} .$$

Confrontandoli con quelli della identità (17) dell' art. 66, si riconosce che si possono in quelli trasformare, cangiando D in X ed X in D. Perciò, in virtù della (17) la precedente espressione si riduce ad Ar cos $\frac{L}{D}$. Con questa notevole semplificazione, ed effettuando alcune altre riduzioni, si trova infine:

$$T_3 = M \left\{ 1 - \frac{D^2}{X^2} \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{L^2}{2D^2} \right) \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{L}{2D} \text{Ar cos} \frac{L}{D} \right] \right\} . \quad (25)$$

Se si fa $L = 0$, si trova $T_3 = M \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right)$ che, come dovea succedere, coincide colla formola di Weber relativa al caso $X > D$. Facendo invece $X = \infty$ si ha $T_3 = M$, la sbarra cioè si trova allo stato di saturazione temporaria. Infine, per $X = \sqrt{D^2 - L^2}$ le due formole (24) e (25) danno lo stesso valore. Infatti in tal caso si ha $a_3 = \pi - \beta$, e perciò il 4° e 5° termine della (24) si distruggono. Oltre a ciò i tre Ar. tg. si riducono in tal caso, colla formola (16), a $\beta - \frac{\pi}{2}$, ed insieme al 7° od 8° termine della (24) danno lo stesso risultato del 2° e 3° termine della (25). Infine i termini algebrici rimanenti nelle due formole, divengono identici. Tutto ciò potrà ognuno agevolmente verificare.

Magnetismo temporario nei casi ordinari.

73. Nell' atto in cui si forma il magnetismo temporario, per tutti i casi finora trattati, non hanno alcuna influenza i fenomeni d' induzione, giacchè si è sempre supposto che la forza magnetizzante vari lentamente. Ma quando si chiude istantaneamente il circuito di un' elica entro la quale si trovi la sbarra, l' induzione produce il suo effetto accelerando o ritardando i movimenti delle molecole. Il supporre anche in tal caso costante per tutti i punti della sbarra la forza magnetizzante, condurrà a risultati più prossimi al vero per l' acciaio temprato, poichè

infatti si fanno in esso con maggior lentezza gli spostamenti molecolari, e quindi meno risentono l' influenza del modo nel quale ha variato la forza magnetizzante quando ha cominciato ad agire.

La posizione in cui si ferma ogni molecola, dipenderà tuttavia dalla velocità da essa acquistata ; ma compierà una deviazione sempre compresa fra la deviazione minima e la massima, per cui il magnetismo temporario minimo già calcolato, sarà un limite inferiore del magnetismo sviluppato. Il magnetismo massimo calcolato negli ultimi articoli, sarà un limite superiore ; ma è possibile trovare un limite superiore più approssimato, considerando che quelle molecole per le quali α è compreso fra 0 ad a_0, o fra $\pi - a_0$ e π, non devono spostarsi, ed ammettendo che le altre si portino alla massima deviazione. Bisogna però notare che quando X è $> D$, si ha $\beta > a_0$, e che in tal caso quelle molecole che nella fig. 16 sono fuori dell' angolo MON, (essendo $NOx = MOX = \beta$), pel massimo magnetismo devono supporsi nella direzione della forza; ma per $X < D$, le molecole il cui angolo α è fra a_0 e $\pi - a_0$ hanno tutte una deviazione massima alla sinistra di Ox, come si riconosce colla costruzione grafica. Per calcolare il limite superiore del magnetismo temporario, si dovranno dunque distinguere due casi, secondo che X è $<$ o $>$ di D.

In entrambi i casi, le molecole per le quali α è compreso fra 0 ed a_0 e $\pi - a_0$ e π saranno al loro posto, e per ragione di simmetria elideranno i loro effetti; nel primo caso tutte le altre si supporranno alla deviazione massima, e nel secondo quelle per le quali α è compreso fra a_0 e β, o fra $\pi - \beta$ e $\pi - a_0$ si supporranno nella direzione della forza.

74. 1° caso. $X < D$

Indicando con S_1 il limite superiore cercato, avremo

$$S_1 = \frac{M}{2}\int_{a_0}^{\pi - a_0} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_3 \, d\alpha = \frac{MDL}{2}\int_{a_0}^{\pi - a_0} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}\, d\alpha$$

$$+ \frac{M}{2}\int_{a_0}^{\pi - a_0} \frac{(X + D\cos\alpha)\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2\,DX\cos\alpha}}{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\,.$$

Anche quì, nell' estendere ai limiti gli integrali, devesi por mente che i radicali risultino positivi. Si dovrà quindi prendere :

$$\sqrt{X^2+D^2-L^2+2DX\cos(\pi-a_0)} = \sqrt{X^2+D^2-L^2-2D\sqrt{X^2-L^2}} = D - \sqrt{X^2-L^2}$$

I quattro Ar. tg. che si formano nel valore di S_1 diversificano da quelli della (17) pel segno di due di essi consecutivi. Essi perciò possono ridursi a

$$- \text{Ar cos} \frac{L}{X} - 2 \text{ Ar tg} \frac{D - \sqrt{X^2 - L^2}}{L} + 2 \text{ Ar tg} \frac{D + \sqrt{X^2 - L^2}}{L} .$$

Con questa ed altre facili riduzioni, si trova:

$$S_1 = M \left\{ \left(\frac{2X}{3D} - \frac{L^2}{6DX}\right) \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} + \frac{L}{2D} \text{ Ar cos} \frac{L}{X} \right.$$

$$\left. + \frac{L}{2D}\left(\frac{D^2}{X^2} - 1\right) \left(\text{Ar tg} \frac{D + \sqrt{X^2 - L^2}}{L} - \text{Ar tg} \frac{D - \sqrt{X^2 - L^2}}{L}\right) \right\} \quad (26)$$

Come era da prevedersi, facendo $L = 0$ si ha $S_1 = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}$

75. 2° caso $X > D$

Indichiamo con S_2 il limite superiore del magnetismo temporario in questo caso. Avremo :

$$S_2 = \frac{M}{2} \int_{a_0}^{\beta} \text{sen } \alpha \, d\alpha + \frac{M}{2} \int_{\pi - \beta}^{\pi - a_0} \text{sen } \alpha \, d\alpha + \frac{M}{2} \int_{\beta}^{\pi - \beta} \text{sen } \alpha \cos \theta_3 \, d\alpha .$$

Nell' estendere ai limiti l' ultimo integrale, devesi quì pure non dimenticare di prendere positivamente il radicale della (15) ; si dovrà fare cioè

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2 \, DX \cos (\pi - \beta)} = X - \sqrt{D^2 - L^2} .$$

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2 \, DX \cos \beta} = X + \sqrt{D^2 - L^2} .$$

Oltre a ciò i quattro Ar. tg. che si trovano nel valore di S_2, sono gli stessi che s' incontrano nel valore di T_3 (art. 70) ma col segno contrario, onde si riducono a $- \text{Ar cos} \frac{L}{D}$. Si trova quindi :

$$S_2 = M \left\{ \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} - \frac{D^2}{X^2} \left[\frac{1}{3}\left(1 + \frac{L^2}{2 D^2}\right) \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{L}{2D} \text{Ar cos} \frac{L}{D} \right] \right\} \quad (27)$$

Facendo $L = 0$ si trova $S_2 = M\left(1 - \frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right)$ come dovevasi; facendo $X = \infty$ si ha $S_2 = M$. Finalmente per $X = D$ le due formole (26) e (27) danno lo stesso risultato.

Come si vede S_2 non diversifica da T_3 (25) che nel primo termine, ed al crescere di X la differenza tende a sparire.

CAPITOLO XI.

Calcolo del momento magnetico permanente

Magnetismo permanente che si ottiene facendo variare lentamente la forza magnetizzante.

76. Nell'art. 61 abbiamo dimostrato che quelle molecole il cui angolo α è compreso fra 0 ed a_0 o fra $\pi - a_0$ e π, non abbandonano la loro posizione, se la magnetizzazione si compie nel modo che ora supponiamo. Quindi, come nell'art. 65, nel computare il momento magnetico della sbarra, si può fare astrazione da quelle molecole, e non tener conto che delle altre. Per quanto poi si è esposto nell'art. 62, a seconda del valore della forza magnetizzante X, devesi distinguere il caso in cui è minore di $2L$, quello in cui è compreso fra $2L$ e la quantità (9), e quello in cui supera quest'ultimo valore. Ma quando X è compreso fra $2L$ ed il valore (9), in causa dei radicali che entrano nell'integrale (15), si è costretti a separare ancora il caso in cui X è minore di $\sqrt{D^2 + L^2}$ da quello in cui è maggiore di questa stessa quantità, precisamente come nell'art. 65.

Che $\sqrt{D^2 + L^2}$ sia minore del valore (9), si prova facilmente; si ha infatti $\sqrt{D^2 - L^2} < 3\,D$, e quindi

$$\frac{L^2}{D + \sqrt{D^2 - L^2}} > \frac{L^2}{4\,D},$$

ossia

$$\frac{(D + \sqrt{D^2 - L^2})\,(D - \sqrt{D^2 - L^2})}{D + \sqrt{D^2 - L^2}} > \frac{L^2}{4\,D},\quad 4\,D^2 - 4\,D\sqrt{D^2 - L^2} > L^2$$

ed infine

$$5\,D^2 - 4\,D\sqrt{D^2 - L^2} > D^2 + L^2\,.$$

Abbiamo dunque in tutto quattro casi distinti 1° $X \leq 2L$, 2° X compreso fra $2L$ e $\sqrt{D^2+L^2}$, 3° X compreso fra quest' ultimo valore ed il (9), 4° X non minore del valore (9). Indicheremo con p_1, p_2, p_3 e p_4 il momento magnetico permanente in questi quattro casi.

Nel 1° caso in cui X è non $> 2L$, già sappiamo dall' art. 62, che il magnetismo permanente è identico al temporario che lo precede; si ha cioè

$$p_1 = t_1 \tag{28}$$

essendo t_1 determinato dalla (18).

77. 2° caso, X compreso fra $2L$ e $\sqrt{D^2+L^2}$. In questo caso le molecole per le quali α è compreso fra a_0 ed a_1 oppure fra a_2 e $\pi - a_0$, trovansi alla deviazione minima, mentre quelle il cui α è fra a_1 ed a_2 sono spostate dell' angolo β. Avremo quindi:

$$p_2 = \frac{M}{2}\int_{a_0}^{a_1} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_2\, d\alpha + \frac{M}{2}\int_{a_2}^{\pi - a_0} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_2\, d\alpha + \frac{M}{2}\int_{a_1}^{a_2} \operatorname{sen}\alpha \cos(\alpha - \beta)\, d\alpha$$

Ciascuno dei due primi integrali si scinde, in causa del valore (13) di $\cos\theta_2$, nei due integrali (14) e (15); l'ultimo poi si ottiene immediatamente come nell'art. 70. Essendo poi $X < \sqrt{D^2+L^2}$, sarà pure $D > \sqrt{X^2-L^2}$; perciò estenendo ai limiti il radicale della (15) si dovrà assumere:

$$\sqrt{X^2+D^2-L^2+2DX\cos(\pi-a_0)} = \sqrt{X^2+D^2-L^2-2D\sqrt{X^2-L^2}} = D - \sqrt{X^2-L^2}.$$

$$\sqrt{X^2+D^2-L^2+2DX\cos a_0} = D + \sqrt{X^2-L^2} .$$

Similmente, quando nel radicale della (15) si metterà a_1 od a_2 invece di α, siccome per le (7) e (8) si ha

$$\cos a_1 = \cos(\beta+\gamma) = \sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1-\frac{4L^2}{X^2}} - \frac{2L^2}{DX} = \frac{\sqrt{D^2-L^2}\sqrt{X^2-4L^2}-2L^2}{DX}$$

$$\cos a_2 = \cos(\pi+\beta-\gamma) = -\cos(\beta-\gamma) = -\frac{\sqrt{D^2-L^2}\sqrt{X^2-4L^2}+2L^2}{DX},$$

si avrà:

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2DX\cos a_1} = \pm(\sqrt{D^2 - L^2} + \sqrt{X^2 - 4L^2}),$$

$$\sqrt{X^2 + D^2 - L^2 + 2DX\cos a_2} = \pm(\sqrt{D^2 - L^2} - \sqrt{X^2 - 4L^2}).$$

Pel primo di questi radicali devesi prendere il segno $+$ onde sia positivo. Quanto al secondo, siccome evidentemente $X^2 < D^2 + 3L^2$, e quindi $\sqrt{X^2 - 4L^2} < \sqrt{D^2 - L^2}$ dovrà pure prendersi il segno superiore, onde sia positivo.

Avendo queste avvertenze, il calcolo di p_2, quantunque assai lungo, non presenta difficoltà notevoli.

Nel valore di p_2 si trovano otto Ar. tg. quattro dei quali sono identici a quelli della (17), ed hanno lo stesso coefficiente. Essi quindi si riducono ad Ar. cos $\frac{L}{X}$. Gli altri quattro non possono riunirsi nello stesso modo. Fatte le altre riduzioni si trova

$$\begin{aligned} p_2 = M \Bigg\{ & \left(\frac{2X}{3D} - \frac{L^2}{6DX}\right)\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} - \frac{2}{3}\left(\frac{X}{D} - \frac{L^2}{DX}\right)\sqrt{1 - \frac{4L^2}{X^2}} \\ & - \frac{L}{2D}\,\text{Ar}\cos\frac{L}{X} + \frac{3L}{4D}\left(1 + \frac{D^2}{3X^2}\right)\text{Ar}\cos\frac{2L}{X} \\ & - \frac{L}{4D}\left(\frac{D^2}{X^2} - 1\right)\Bigg[\text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\,\text{tg}\,\frac{a_2}{2}\right) - \text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\,\text{tg}\,\frac{a_1}{2}\right) \\ & \qquad + \text{Ar tg}\,\frac{\sqrt{D^2 - L^2} + \sqrt{X^2 - 4L^2}}{L} \\ & \qquad - \text{Ar tg}\,\frac{\sqrt{D^2 - L^2} - \sqrt{X^2 - 4L^2}}{L}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Per non complicare maggiormente questa formola, abbiamo ommesso di esprimere a_1 ed a_2 in funzione di L, D ed X colle (7) ed (8).

Facendo in questa formola $L = 0$ si trova $p_2 = 0$, come doveasi, giacchè senza forza coercitiva non si ha magnetismo permanente. Facendovi invece $X = 2L$, essa dà lo stesso valore della (28) ossia della (18) quando ivi pure si faccia $X = 2L$. Infatti in questo caso $a_1 = a_2 = \frac{\pi}{2} + \beta$ come pure $\sqrt{X^2 - 4L^2} = 0$ ed Arcos $\frac{2L}{X} = 0$. Perciò il secondo e quarto termine della (29) si annullano, e così pure gli Ar. tg. Il primo e terzo termine, i soli che restano, costituiscono appunto il valore di p_1 ossia di t_1 nella (18).

78. 3° caso, X compreso fra $\sqrt{D^2 + L^2}$ ed il valore (9).

Il calcolo in questo caso, non diversifica da quello del caso precedente che per prendere eguale a $\sqrt{X^2 - L^2} - D$ il radicale della (15), quando per α vi si pone $\pi - a_0$, e ciò onde risulti positivo. In quanto al valore che acquista lo stesso radicale, quando per α vi si pone a_2, e che nel caso precedente era $\sqrt{D^2 - L^2} - \sqrt{X^2 - 4L^2}$, devesi prendere eguale anche nel caso presente. Infatti se si pone $\sqrt{D^2 - L^2} = \sqrt{X^2 - 4L^2}$, se ne trae $X = \sqrt{D^2 + 3L^2}$; sarebbe quando X giungesse a questo valore, e poi l'oltrepassasse, che la differenza dei due radicali precedenti cambierebbe segno. Ora è facile vedere che $\sqrt{D^2 + 3L^2}$ è maggiore del valore (9), almeno se non si vuol ammettere che l'angolo d'attrito β sia maggiore di Arcos $\frac{1}{3}$, ossia 70° 32′ circa, supposizione affatto inverosimile, come si vedrà nel prossimo capitolo. Se dunque $\cos\beta > \frac{1}{3}$, si ha la seguente serie di ineguaglianze:

$$1 + \cos\beta > \frac{4}{3}, \ \frac{3}{4}(1 + \cos\beta) > 1 \ , \frac{3}{4}(1 - \cos^2\beta) > 1 - \cos\beta \ ,$$

$$\frac{3}{4}\frac{L^2}{D^2} > 1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} \ , \ 3L^2 > 4D^2 - 4D\sqrt{D^2 - L^2}$$

e finalmente

$$D^2 + 3L^2 > 5D^2 - 4D\sqrt{D^2 - L^2} \ .$$

Nel valore di p_3 entrano naturalmente otto Ar. tg. Quattro di essi sono gli stessi rimasti nel valore finale di p_2; gli altri quattro sarebbero identici a quelli della (17), se il terzo non avesse il segno contrario. Essi si ridurranno perciò ad Ar cos $\frac{L}{X}$ $- 2$ Ar tg $\frac{\sqrt{X^2 - L^2} - D}{L}$. Con queste avvertenze, e dopo lunghe riduzioni, si arriva alla formola seguente

$$\begin{aligned}
p_3 = M \Bigg\{ & 1 - \frac{D^2}{3X^2} - \frac{L^2}{2X^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{X}{D} - \frac{L^2}{DX}\right)\sqrt{1 - \frac{4L^2}{X^2}} \\
& - \frac{L}{2D}\,\text{Ar cos}\,\frac{L}{X} + \frac{3L}{4D}\left(1 + \frac{D^2}{3X^2}\right)\text{Ar cos}\,\frac{2L}{X} \\
& + \frac{L}{4D}\left(1 - \frac{D^2}{X^2}\right)\Bigg[\text{Ar tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\,\text{tg}\,\frac{a_2}{2}\right) - \text{Ar tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\,\text{tg}\,\frac{a_1}{2}\right) \\
& \qquad + \text{Ar tg}\,\frac{\sqrt{D^2 - L^2} + \sqrt{X^2 - 4L^2}}{L} \\
& \qquad - \text{Ar tg}\,\frac{\sqrt{D^2 - L^2} - \sqrt{X^2 - 4L^2}}{L} \\
& \qquad + 2\,\text{Ar tg}\,\frac{\sqrt{X^2 - L^2} - D}{L}\Bigg]\Bigg\} . \qquad (30)
\end{aligned}$$

In questa formola resterebbe ad esprimere a_1 ed a_2 in funzione di L, D ed X colle (7) e (8). Facendovi $L = 0$ non si ha $p_3 = 0$, come sembrerebbe dovesse aversi. Ma bisogna considerare che essa è valida fra due valori limiti di X, che si riducono entrambi a D quando $L = 0$. Per $L = 0$ essa dunque è valida solo per $X = D$; e facendo in pari tempo $X = D$ ed $L = 0$ essa dà veramente $p_3 = 0$.

Le formole (29) e (30) divengono identiche per $X = \sqrt{D^2 + L^2}$. Infatti l' ultimo Ar. tg. della (30) si annulla per questo valore di X, ed i primi termini delle (29) e (30), divengono eguali. Gli altri termini intermedi, sono già gli stessi nelle due formole.

79. 4° caso, X non minore del valore (9).

In questo caso tutte le molecole per le quali α è compreso fra a_1 e $\pi - a_0$, sono deviate dell' angolo β, giacchè a_2 è maggiore di $\pi - a_0$. Si ha quindi

$$p_4 = \frac{M}{2}\int_{a_0}^{a_1} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_2 \, d\alpha + \frac{M}{2}\int_{a_1}^{\pi - a_0} \operatorname{sen}\alpha \cos(\alpha - \beta)\, d\alpha \ .$$

Operando in modo simile a quello dei casi precedenti, si giunge alla seguente formola :

$$\begin{aligned} p_4 = M \Bigg\{ & \frac{1}{2} + \frac{L}{4D}\pi - \frac{D^2}{6X^2} - \frac{L^2}{2X^2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{D^2}{6X^2} - \frac{5L^2}{6X^2}\right)\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} \\ & + \left(\frac{X}{3D} + \frac{L^2}{6DX}\right)\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{X}{D} - \frac{L^2}{DX}\right)\sqrt{1 - \frac{4L^2}{X^2}} \\ & - \frac{1}{8}\left(\frac{L}{D} - \frac{DL}{X^2}\right)\operatorname{Ar\,sen}\frac{L}{X} - \frac{1}{8}\left(\frac{3L}{D} + \frac{DL}{X^2}\right)\left(\operatorname{Ar\,sen}\frac{L}{D} + \operatorname{Ar\,sen}\frac{2L}{X}\right) \\ & + \frac{L}{4D}\left(1 - \frac{D^2}{X^2}\right)\Bigg[\operatorname{Ar\,tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\operatorname{tg}\frac{a_0}{2}\right) - \operatorname{Ar\,tg}\left(\frac{D - X}{D + X}\operatorname{tg}\frac{a_1}{2}\right) \\ & - \operatorname{Ar\,tg}\frac{\sqrt{D^2 - L^2} + \sqrt{X^2 - 4L^2}}{L} \\ & - \operatorname{Ar\,tg}\frac{D + \sqrt{X^2 - L^2}}{L}\Bigg] \ . \end{aligned} \qquad (31)$$

Resterebbe a porre in luogo di a_0 ed a_1 i valori dati dalle (5) e (7). Facendo $L = 0$ si ha $p_4 = 0$. Quando X ha il valore (9), le (30) e (31) danno un egual

risultato. Infine facendo nella (31) $X = \infty$ si ha precisamente il valore P_∞ dato dalla (23), che esprime il magnetismo permanente massimo possibile, ossia lo stato di saturazione.

Magnetismo permanente, che segue al temporario medio.

80. Calcoleremo ancora il momento magnetico permanente, supponendo che dopo avere magnetizzato la sbarra facendo crescere lentamente la forza X, e poi averla assoggettata ad urti ripetuti, come nell' art. 68, si fa quindi lentamente diminuire fino a zero la forza magnetizzante. Per quanto si disse nell' art. 63, secondo il valore che ha X devonsi distinguere tre casi, e cioè 1° X compreso fra zero ed L, 2° X compreso tra L e D, 3° X maggiore di D. Indicheremo con P_1, P_2, P_3 il momento magnetico permanente in questi tre casi. Nel 1° caso in cui X è non $>$ di L, come nell' art. 63 abbiamo dimostrato, il magnetismo permanente è identico al temporario, cioè

$$P_1 = w_1 \tag{32}$$

ove w_1 è dato dalla (20).

81. 2° caso, X compreso fra L e D.

Dall' art. 63 sappiamo che in questo caso le molecole per le quali α è compreso fra 0 ed a_1' oppure fra a_2' e π, trovansi alla deviazione media, mentre tutte le altre sono spostate dell' angolo d' attrito. Si avrà dunque:

$$P_2 = \frac{M}{2}\int_0^{a_1'} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_1 \, d\alpha + \frac{M}{2}\int_{a_2'}^{\pi} \operatorname{sen}\alpha \cos\theta_1 \, d\alpha + \frac{M}{2}\int_{a_1'}^{a_2'} \operatorname{sen}\alpha \cos(\alpha - \beta)\, d\alpha \,.$$

Le quantità a_1', a_2' e $\cos\theta_1$ che trovansi in questa equazione, sono determinate rispettivamente dalle formole (10), (11) e (3); anzi da quest' ultima si ricava

$$\cos\theta_1 = \frac{X + D\cos\alpha}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos\alpha}}\,,$$

per cui il valore di P_2 diviene

$$P_2 = \frac{M}{2}\int_{0,\,a_2'}^{a_1',\,\pi} \frac{(X + D\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2DX\cos\alpha}}$$

$$+ \frac{M}{4}\cos\beta \int_{a_1'}^{a_2'} \operatorname{sen}(2\alpha) d\alpha + \frac{M}{2}\operatorname{sen}\beta \int_{a_1'}^{a_2'} \operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha \,.$$

I due ultimi integrali si eseguiscono immediatamente, come altravolta si è detto. La prima integrazione si può effettuare deducendola dalla (15), col porvi $L = 0$. Perciò si avrà

$$P_2 = \frac{M}{2}\left[-\frac{1}{6DX^2}\left(\sqrt{X^2+D^2+2DX\cos\alpha}\right)^3 + \frac{D^2-X^2}{2DX^2}\sqrt{X^2+D^2+2DX\cos\alpha}\right]_{0,\,a_2'}^{a_2',\,\pi}$$
$$-\frac{M}{8}\cos\beta\,(\cos 2\alpha)_{a_1'}^{a_2'} + \frac{M}{4}\operatorname{sen}\beta\,(\alpha)_{a_1'}^{a_2'} - \frac{M}{8}\operatorname{sen}\beta\,(\operatorname{sen} 2\alpha)_{a_1'}^{a_2'}\ .$$

Nel valore di $\cos\theta_1$ il radicale deve prendersi col segno $+$; perciò essendo ora $X < D$, dovrà assumersi

$$\sqrt{X^2+D^2+2DX\cos\pi} = D - X,\quad \sqrt{X^2+D^2+2DX\cos 0} = D + X;$$

e siccome dalle (10) e (11) si ha

$$\cos a_1' = \cos(a_0+\beta) = \cos a_0\cos\beta - \operatorname{sen} a_0 \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}}\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}} - \frac{L^2}{DX}$$

$$\cos a_2' = \cos(\pi - a_0 + \beta) = -\cos(\beta - a_0) = -\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}}\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}} - \frac{L^2}{DX},$$

si assumerà pure

$$\sqrt{X^2+D^2+2DX\cos a_1'} = \sqrt{X^2+D^2-2L^2+2\sqrt{X^2-L^2}\sqrt{D^2-L^2}}$$
$$= \sqrt{X^2-L^2} + \sqrt{D^2-L^2}\ ,$$

$$\sqrt{X^2+D^2+2DX\cos a_2'} = \sqrt{X^2+D^2-2L^2-2\sqrt{X^2-L^2}\sqrt{D^2-L^2}}$$
$$= \sqrt{D^2-L^2} - \sqrt{X^2-L^2}\ .$$

Estesi gli integrali generali ai limiti, con queste avvertenze, e fatte alcune riduzioni facilissime, si trova

$$P_2 = M\left\{\frac{2X}{3D} - \left(\frac{2X}{3D} - \frac{L^2}{6DX}\right)\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}} + \frac{L}{2D}\operatorname{Ar\,cos}\frac{L}{X}\right\} \qquad (33)$$

Facendo in questa equazione e nella (32), $X = L$, si ottiene evidentemente lo stesso risultato.

Per un corpo privo di forza coercitiva, P_2 deve essere nullo; ed infatti per $L = 0$ si ha $P_2 = 0$.

Ma dal confronto della (33) colla (18) e (20) risulta, che il valore di P_2 può scriversi

$$P_2 = w_1 - t_1 \tag{34}$$

Veramente P_2 e w_1 sono validi pei valori di X compresi fra zero e D, mentre t_1 vale da L a $\sqrt{D^2 + L^2}$; ma per $X < L$, il magnetismo temporario minimo è zero, e la (34) si trasforma nella (32). Le formole (32) e (34) esprimono dunque una stessa proprietà, che può enunciarsi come segue. *Per X non maggiore di D, il magnetismo permanente ottenuto, facendo variare lentamente la forza magnetizzante, e mentre essa agisce, assoggettando la sbarra ad urti prolungati, è eguale all' aumento di magnetismo temporario che gli stessi urti producono.*

Vedremo nel capitolo seguente che per $X > D$ esistono simili proprietà, ma solo in modo approssimativo.

82. 3° caso X non minore di D.

In questo caso, come si è dimostrato nell'art. 63, le molecole per le quali a è compreso fra 0 ed a_1' sono alla deviazione media, mentre tutte le altre sono spostate dell' angolo d' attrito. Per cui si avrà, mettendo subito per $\cos\theta_1$ il suo valore:

$$P_3 = \frac{M}{2}\int_0^{a_1'} \frac{(X + D\cos a)\,\text{sen}\,a\,da}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2\,DX\cos a}} + \frac{M}{2}\int_{a_1'}^{\pi} \text{sen}\,a\cos(a - \beta)\,da\ .$$

L'integrazione si compie quì come nel caso precedente; e fatte alcune riduzioni, si giunge all' espressione seguente:

$$P_3 = M\left\{\frac{1}{2} + \frac{L}{4\,D}\pi + \frac{X}{3\,D} - \frac{D^2}{6\,X^2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{D^2}{6\,X^2} - \frac{L^2}{12\,X^2}\right)\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{X}{3\,D} - \frac{L^2}{12\,DX}\right)\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}} - \frac{L}{4\,D}\left(\text{Ar sen}\,\frac{L}{X} + \text{Ar sen}\,\frac{L}{D}\right)\right\} \tag{35}$$

Per $X = D$, le formole (33) e (35) danno lo stesso risultato. Per $L = 0$ si ha $P_3 = 0$. Infine facendo $X = \infty$ devesi avere per P_3 il valore P_∞ della (23), che corrisponde allo stato di saturazione permanente. Ma P_3 assume forma indeterminata, giacchè due termini di segno contrario divengono infiniti, e sono

$$+\frac{X}{3\,D} \quad \text{e} \quad -\frac{X}{3\,D}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\,,$$

i quali possono scriversi ancora come segue:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}}{\frac{3D}{X}}.$$

Per $X = \infty$ si trova $\frac{0}{0}$. Ma applicando le regole note, sostituendo cioè ai due termini della frazione le rispettive derivate, si trova che il limite per $X = \infty$ è zero. Gli altri termini di P_3, si trasformano precisamente in quelli di P_∞.

CAPITOLO XII.

Semplificazione delle formole precedenti, e conclusioni relative agli ultimi quattro capitoli

Grandezza dell' angolo d' attrito.

83. Nello stabilire le formole dei capitoli precedenti, non si è fatta nessuna considerazione sulla grandezza presumibile dell'angolo β e quindi anche di $L = D$ sen β; ma possiamo far vedere come dal confronto dei risultati analitici coll' esperienza, risulti doversi considerare l' angolo d' attrito come assai piccolo. Perciò introduciamo β invece di L nella formola (23); si avrà:

$$\frac{P_\infty}{M} = \frac{\pi - \beta}{4} \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \beta \;, \tag{36}$$

e quindi misurando il rapporto fra il momento permanente ed il temporario ottenuti con una forza magnetizzante grandissima che si fà lentamente diminuire fino a zero, si potrà avere dalla (36) il valore di β. Ma interessa non tanto di conoscere il preciso valore di β, come il sapere approssimativamente di quale grandezza sia; perciò si può misurare con apposite esperienze il rapporto del magnetismo permanente al temporario, anche senza adoperare una forza magnetizzante grandissima, giacchè il detto rapporto diminuisce in modo continuo al crescere di X. Le formole che danno il valore di t_1 o t_2, e di p_1, p_2, p_3 o p_4, sono troppo complicate, onde si possa con esse mostrare come varia il rapporto del magnetismo permanente al temporario al crescere di X. Bisogna quindi contentarsi di calcolare numericamente quelle formole, adottando valori arbitrari per L. Così facendo si riconosce che effettivamente il detto rapporto diminuisce al crescere di X. Ecco, come esempio i risultati del calcolo nell' ipotesi di $L = 0,1\ D$ che corrisponde a supporre $\beta = 5° \ 44' \ 21''$ circa:

Valori dati ad $\frac{X}{D}$	Valori calcolati di $\frac{t}{M}$, colle formole (18) o (19)	Valori calcolati di $\frac{p}{M}$, colle formole (28), (29) o (31)	Rapporto $\frac{p}{t}$
0, 15	0, 024203	0, 024203	1
0, 20	0, 055894	0, 055894	1
0, 30	0, 121768	0, 073314	0, 602079
0, 40	0, 188255	0, 076506	0, 406396
0, 50	0, 254869	0, 077541	0, 304239
1	0, 588136	0, 078398	0, 133299
1, 50	0, 812542	0, 078498	0, 096608
2	0, 894535	0, 078520	0, 087777
5	0, 983125	0, 078541	0, 079890
∞	1	0, 078542	0, 078542

Dall' ultima colonna apparisce in modo evidente, che il rapporto fra il magnetismo permanente ed il temporario, ottenuti variando lentamente la forza magnetizzante, diminuisce da 1 fino al valore corrispondente ad $X = \infty$. Lo stesso risultato si trova scegliendo altri valori per L. Se dunque coll' esperienza si misura quel rapporto, per un valore qualunque della forza magnetizzante, si può esser certi di avere un risultato non minore di quello che si sarebbe ottenuto con una forza infinita.

Ora, eseguite le misure del momento magnetico temporario e permanente di varie sbarre facendo crescere lentamente e poi diminuire del pari lentamente la forza magnetizzante, il rapporto dei due momenti variò intorno al valore medio 0, 015, essendo a parità di corrente alquanto minore di questa quantità per le sbarre d' acciaio rincotto, e maggiore invece per quelle temprate. Naturalmente per queste misure adoperai delle sbarre di lunghezza all' incirca eguale al diametro, onde accostarmi, per quanto è possibile alle condizioni teoriche. L' esperienza dunque mostra che il rapporto $\frac{p}{t}$, mentre cresce col grado di tempra, è tuttavia sempre piccolo.

Calcolando colla (36) il valore dello stesso rapporto, per vari valori di β si trova

Valore dato a β	Valore calc. di $\frac{P_\infty}{M}$, colla formola (36)
1°	0, 012
1° 30′	0, 020
2°	0, 026
3°	0, 041
4°	0, 054
5°	0, 068
10°	0, 134
30°	0, 394

Onde il rapporto stesso risulti della grandezza trovata coll' esperienza, bisogna dunque supporre che β sia assai piccolo, per esempio 1° circa. Dietro ciò potremo semplificare le formole stabilite nei due capitoli precedenti, trascurando i termini che contengono come fattore β elevato a potenze superiori alla seconda.

Formole semplificate, pel magnetismo temporario minimo.

84. Il magnetismo temporario minimo t_1 è dato dalle formole (18) o (19), secondo che X è minore o maggiore di $\sqrt{D^2 + L^2}$. Se nella (18), invece di L mettiamo D sen β, essa diviene

$$t_1 = M\left\{\left(\frac{2X}{3D} - \frac{D}{6X}\operatorname{sen}^2\beta\right)\sqrt{1 - \frac{D^2}{X^2}\operatorname{sen}^2\beta} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{2}\operatorname{Ar\,cos}\left(\frac{D}{X}\operatorname{sen}\beta\right)\right\},$$

Supponendo β piccolo, potremo porre β in luogo di sen β. Poi, potremo all' Ar. cos. sostituire $\frac{\pi}{2}$ — Ar sen $\frac{D}{X}\beta$, e se X è abbastanza più grande di L, ossia di $D\beta$, all' arco si potrà sostituire il seno e prendere Ar cos $\frac{L}{X} = \frac{\pi}{2} - \beta\frac{D}{X}$. Al radicale si sostituirà $1 - \frac{\beta^2}{2}\frac{D^2}{X}$, e riducendo si vedrà che i termini in β^2 spariscono, restando:

$${}_1 = M\left(\frac{2X}{3D} - \frac{\beta\pi}{4}\right)$$

ossia per la (20)

$$t_1 = w_1 - M\frac{\beta\pi}{4}. \tag{36}$$

Questa formola sarà sufficientemente approssimata, purchè X sia abbastanza maggiore di L.

Analogamente si semplifica la (19), col trascurare le potenze di β superiori alla seconda. In questo caso X è certo assai maggiore di L, ma conviene supporre X abbastanza $> \sqrt{D^2 + L^2}$. Infatti l' Art. tg. della (19) può scriversi $\frac{\pi}{2} - \text{Ar tg} \frac{L}{\sqrt{X^2 - L^2} - D}$, e se $\sqrt{X^2 - L^2}$ è alquanto $> D$, ossia $X >$ di $\sqrt{D^2 + L^2}$, si potrà all'arco sostituire la tangente, scrivendo $\frac{\pi}{2} - \frac{D\,\beta}{X - D}$. A riduzioni fatte si ha

$$t_2 = M\left(1 - \frac{D^2}{3X^2} - \frac{\beta\pi}{4}\frac{D^2}{X^2} - \beta^2\frac{D^2}{X^2}\right), \quad \text{ossia} \quad t_2 = w_2 - \frac{D^2}{X^2}\left(M\frac{\beta\pi}{4} + M\beta^2\right), \quad (37)$$

valore abbastanza approssimato, purchè X superi alquanto $\sqrt{D^2 + L^2}$.

Onde si possa giudicare del grado di esattezza che si ottiene sostituendo le formole semplificate (36) e (37) alle (18) e (19), ho calcolati nella seguente tavola, i valori di $\frac{t_1}{M}$ e $\frac{t_2}{M}$ prima colle formole (18) e (19) poi colle (36) e (37), per vari valori d' $\frac{X}{D}$, e supponendo $L = 0,1\,D$ ossia $\beta = 5° \, 44' \, 21''$. Quantunque questo valore di β sia certamente troppo grande, tuttavia l' accordo fra i valori dati dalle formole esatte e dalle semplificate, è più che sufficiente.

Valori di $\frac{X}{L}$	Valori di $\frac{t}{M}$ calcolati colle formole (18) o (19)	Valori di $\frac{t}{M}$ calcolati colle formole (36) o (37)
0, 15	0, 024203	0, 021460
0, 20	0, 055894	0, 054804
0, 30	0, 121768	0, 121460
0, 40	0, 188255	0, 188127
0, 50	0, 254869	0, 254794
1	0, 588136	0, 588127
1, 50	0, 812542	0, 812501
2	0, 894535	0, 894532
5	0, 983125	0, 983125
∞	1	1

In conclusione, il magnetismo temporario minimo, che è nullo finchè $X < L$, non appena X oltrepassa questo valore, varia secondo la (18); ma quando X ha superato il valore L abbastanza, alla formola (18) può sostituirsi la (36), secondo la quale il magnetismo stesso differisce da quello dato da Weber, per una costante, della quale apprenderemo fra poco il significato. Quando X oltrepassa il valore $\sqrt{D^2 + L^2}$, vale la formola (19); ma anche quì, quando X è abbastanza maggiore di questa quantità, il momento magnetico varia sensibilmente secondo la (37), la quale differisce dalla corrispondente formola di Weber, per la solita costante moltiplicata per $\frac{D^2}{X^2}$, e per un' altra quantità, che si potrebbe in molti casi trascurare, essendo assai piccola.

Formole pel magnetismo temporario massimo.

85. Le formole (22), (24) e (25) danno il magnetismo temporario per vari valori di X, ai quali si giunga partendo da $X = \infty$. La (24) in particolare vale quando X è compreso fra $D - L$ e $\sqrt{D^2 - L^2}$, ossia fra $D(1 - \beta)$ e $D\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$. Questi due valori sono tanto vicini, che basterà, per conoscere l'andamento del magnetismo massimo, semplificare le (22) e (25). Nella (22) i tre Ar. tg. hanno, come fattore nel coefficiente, β; basta quindi nei loro valori tenere la prima potenza di β, o ciò che equivale, si può considerare come eguali gli archi e le tangenti di angoli che siano dello stesso ordine di grandezza di β. Perciò il primo Ar. tg. che non è altro che $\text{Ar tg}\left(\frac{D - X}{D + X} tg \frac{\beta}{2}\right)$, si prenderà eguale a $\frac{\beta}{2} \cdot \frac{D - X}{D + X}$; il terzo si potrà scrivere $\frac{\pi}{2} - \frac{D\beta}{D + X}$. In quanto al secondo, se X si accosta al valore $D - L$, può acquistare qualunque grandezza; ma supponendo X abbastanza $< D - L$, esso può scriversi

$$\frac{\pi}{2} - \text{Ar tg} \frac{D\beta}{\sqrt{(D - X)^2 - D^2\beta^2}} \quad \text{ossia} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{D\beta}{D - X}.$$

A riduzioni fatte si trova

$$T_1 = M \left\{ \frac{2X}{3D} + \frac{\beta\pi}{4} \right\}, \quad \text{ossia} \quad T_1 = w_1 + M\frac{\beta\pi}{4}; \tag{38}$$

e questa formola varrà pei valori di X, da zero sino verso $D - L$.

La formola (25) dà immediatamente

$$T_3 = M \left\{ 1 - \frac{D^2}{3X^2} + \frac{\beta\pi}{4}\frac{D^2}{X^2} - \frac{\beta^2}{2}\frac{D^2}{X^2} \right\}, \text{ ossia } T_2 = w_2 + \frac{D^2}{X^2}\left(M\frac{\beta\pi}{4} - M\frac{\beta^2}{2}\right), \quad (39)$$

la quale varrà quando X varia da $\sqrt{D^2 - L^2}$ sino all' infinito.

Calcolando numericamente queste formole, e le (22) e (25), si trovano risultati non meno concordanti di quelli della precedente tabella.

Il magnetismo temporario massimo, varia dunque con X, dapprima secondo la formola (38), poi avvicinandosi al valore $D - L$, la formola stessa diviene meno approssimata, e conviene ricorrere alla (22), poi alla (24). Dal valore $\sqrt{D^2 - L^2}$ in poi, vale la formola (39). Come si vede, le (38) e (39) diversificano dai valori dati da Weber, specialmente per la solita costante $M\dfrac{\beta\pi}{4}$.

Formole relative ai limiti fra i quali è compreso il magnetismo temporario ordinario.

86. Trattando in modo analogo le formole (26) e (27), si trova facilmente

$$S_1 = M \left\{ \frac{2X}{3D} + \frac{\beta\pi}{4} \right\} = w_1 + M\frac{\beta\pi}{4} \quad (40)$$

$$S_2 = M \left\{ 1 - \frac{D^2}{3X^2} + \frac{\beta\pi}{4}\frac{D^2}{X^2} - \beta^2\frac{D^2}{X^2} \right\} = w_2 + \frac{D^2}{X^2}\left(M\frac{\beta\pi}{4} - M\beta^2\right), \quad (41)$$

la prima delle quali, in causa dell' Ar. cos. e del secondo Ar. tg. della (26), è sufficientemente approssimata purchè X non si accosti troppo nè ad L nè a $\sqrt{D^2 + L^2}$; la seconda poi è valida da questo valore di X, all' infinito.

Dunque il magnetismo temporario che si ottiene facendo agire una forza magnetizzante X minore di D, è compreso fra il valore (36) ed il (40), e si accosterà più al secondo od al primo, secondo la maggiore o minore velocità acquistata dalle molecole nel deviare. Per X maggiore di D, lo stesso magnetismo temporario è compreso fra i valori (37) e (41), i quali evidentemente differiscono fra loro meno dei precedenti.

Formole pel magnetismo permanente.

87. Quando $X < 2L$, il magnetismo permanente ottenuto facendo variare lentamente la forza magnetizzante, è identico al magnetismo temporario che lo precede, ed è rappresentato dalla (28) ossia dalla (18); per X maggiore di $2L$, val-

gono invece le formole (29), (30) e (31), e si deve passare dall' una all' altra quando X arriva ai valori $\sqrt{D^2 + L^2}$, $\sqrt{5D^2 - 4D\sqrt{D^2 - L^2}}$. Se in queste tre formole, trascuriamo pure i termini contenenti potenze di β superiori alla seconda, si giunge ad un risultato della maggiore semplicità. Cominciamo dalla (29), supponendo che X sia abbastanza maggiore di $2L$; in tal caso agli Ar. cos. del terzo e quarto termine, sarà lecito sostituire rispettivamente $\frac{\pi}{2} - \frac{D}{X}\beta$ e $\frac{\pi}{2} - \frac{2D}{X}\beta$, giacchè essendo in ciascuno dei due termini β come fattore, basta tenere nei valori degli stessi Ar. cos., β alla prima potenza. La stessa avvertenza deve usarsi per gli Ar. tg., e cioè anche nei loro valori basterà conservare la prima potenza di β, e quindi considerare come eguali gli archi e le tangenti, quando si tratti di quantità moltiplicate per β. Così per esempio il primo Ar. tg. potrà scriversi :

$$\text{Ar tg}\left[\frac{D-X}{D+X}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right] = \text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\,\frac{1}{\text{tg}\,\frac{\gamma-\beta}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{Ar tg}\left[\frac{D+X}{D-X}\,\text{tg}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\right]$$

e finalmente

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{D+X}{D-X}\left(\frac{D}{X}\beta - \frac{\beta}{2}\right);$$

ed il secondo :

$$\text{Ar tg}\left(\frac{D-X}{D+X}\,\text{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{D-X}{D+X}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{D}{X}\beta\right).$$

Il terzo ed il quarto si trasformeranno prima nell' arco complementare, come si è fatto del primo.

Riducendo i termini simili si trova, non solo che spariscono i termini in β^2, ma anche quelli che contengono X, e tutto si riduce, all' unico termine seguente :

$$p_2 = M\frac{\beta\pi}{4}.$$

Operando in modo simile sulle (30) e (31), come pure sulla (23) che corrisponde allo stato di saturazione, si arriva sempre allo stesso risultato, e cioè :

$$p_2 = p_3 = p_4 = P_\infty = M\frac{\beta\pi}{4}. \tag{42}$$

L' approssimazione di queste eguaglianze è vincolata, per rapporto a p_2, alla condizione che X sia abbastanza maggiore di $2L$.

Le formole (33) e (35), che danno i valori di P_2 e P_3, ossia del magnetismo permanente che si ottiene facendo diminuire lentamente X, dopo che si è prodotto il magnetismo temporario medio, trattate in modo simile alle altre, danno pure:

$$P_2 = P_3 = M \frac{\beta\pi}{4}, \tag{43}$$

colla condizione, per ciò che riguarda P_2, che X sia abbastanza maggiore di L.

Conclusioni.

88. Le ultime formole conducono ad alcune conseguenze importanti. Quando la forza magnetizzante X è abbastanza maggiore di $2L$, onde si possa prendere Ar cos $\frac{2L}{X} = \frac{\pi}{2}$ — Ar sen $\frac{2L}{X}$ come eguale a $\frac{\pi}{2} - \frac{2L}{X}$, cioè onde si possano considerare come eguali l' arco $\frac{2L}{X}$ ed il suo seno, il magnetismo permanente che si ottiene facendo variare lentamente la forza magnetizzante, acquista sensibilmente il suo massimo valore $M\frac{\beta\pi}{4}$, ossia si ha lo stato di saturazione. Ed affinchè questo stato di saturazione sia raggiunto pel magnetismo permanente che segue al magnetismo temporario medio, basta che X superi non $2L$, ma L, abbastanza, onde si possa ritenere sen $\frac{L}{X} = \frac{L}{X}$; perciò anche con valori più piccoli della forza magnetizzante, si avrà in questo caso lo stato di saturazione. Se per esempio $L = 0{,}1\ D$, valore certamente troppo grande, quando $X = 0{,}5\ D$, si ha $\frac{2L}{X} = 0{,}4$, sen $\frac{2L}{X} = 0{,}4116$; e si può considerare la saturazione come raggiunta. Infatti nella tabella dell' art. 83, il magnetismo permanente, calcolato colla formola esatta è in tal caso 0,077541, invece di 0,078542 che si ha per $X = \infty$, e cioè minore di appena $\frac{1}{80}$. Il magnetismo temporario minimo, per lo stesso valore di X, non è che un quarto circa di quello cui si arriva per $X = \infty$.

Nei casi ordinari, in cui il circuito si chiude ed apre rapidamente, l' aumento della magnetizzazione permanente che ha luogo al crescere della corrente magnetizzante, è dunque principalmente dovuto alla maggior penetrazione del magnetismo; ciò che si accorda coi risultati sperimentali del Jamin. In altre parole,

mentre cresce l' intensità della corrente, in causa delle correnti indotte che si sviluppano nella sbarra la forza magnetizzante raggiunge, nelle parti di più in più profonde di essa, un valore sufficiente a produrre la saturazione. Se invece la corrente si fa crescere lentamente, e la magnetizzazione si produce così fino nelle parti più interne, l' aumento di magnetismo permanente ha luogo, nel modo che esprimono o la tabella citata, o le formole esatte, ammesso sempre che la forza magnetizzante si faccia diminuire lentamente. Se poi il circuito si apre d' un tratto, le molecole tornando verso la posizione iniziale, per velocità acquistata si fermano da essa a distanza angolare minore dell' angolo d' attrito, oppure l' oltrepassano fermandosi dalla parte opposta; il momento magnetico permanente risulta allora minore, e anche per questa circostanza non si raggiunge ordinariamente la saturazione.

Tutto ciò riguarda delle sbarre di lunghezza assai piccola in confronto alla sezione trasversale. Nelle sbarre lunghe e sottili, le azioni interne fra le molecole, valgono a trattenerle maggiormente deviate, e perciò tali sbarre divengono suscettibili di acquistare una magnetizzazione permanente maggiore.

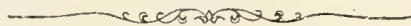
Il rapporto $\frac{p}{t}$, che si è trovato essere poco più o poco meno di 0,015 per sbarre corte e grosse, diviene invece assai maggiore per sbarre lunghe e sottili, e si accosta all' unità, per lunghi e sottili fili d' acciaio assai temprati. Le azioni interne fra le molecole, sono adunque nelle sbarre di forma allungata, e dotate di forza coercitiva, la causa principale della magnetizzazione permanente.

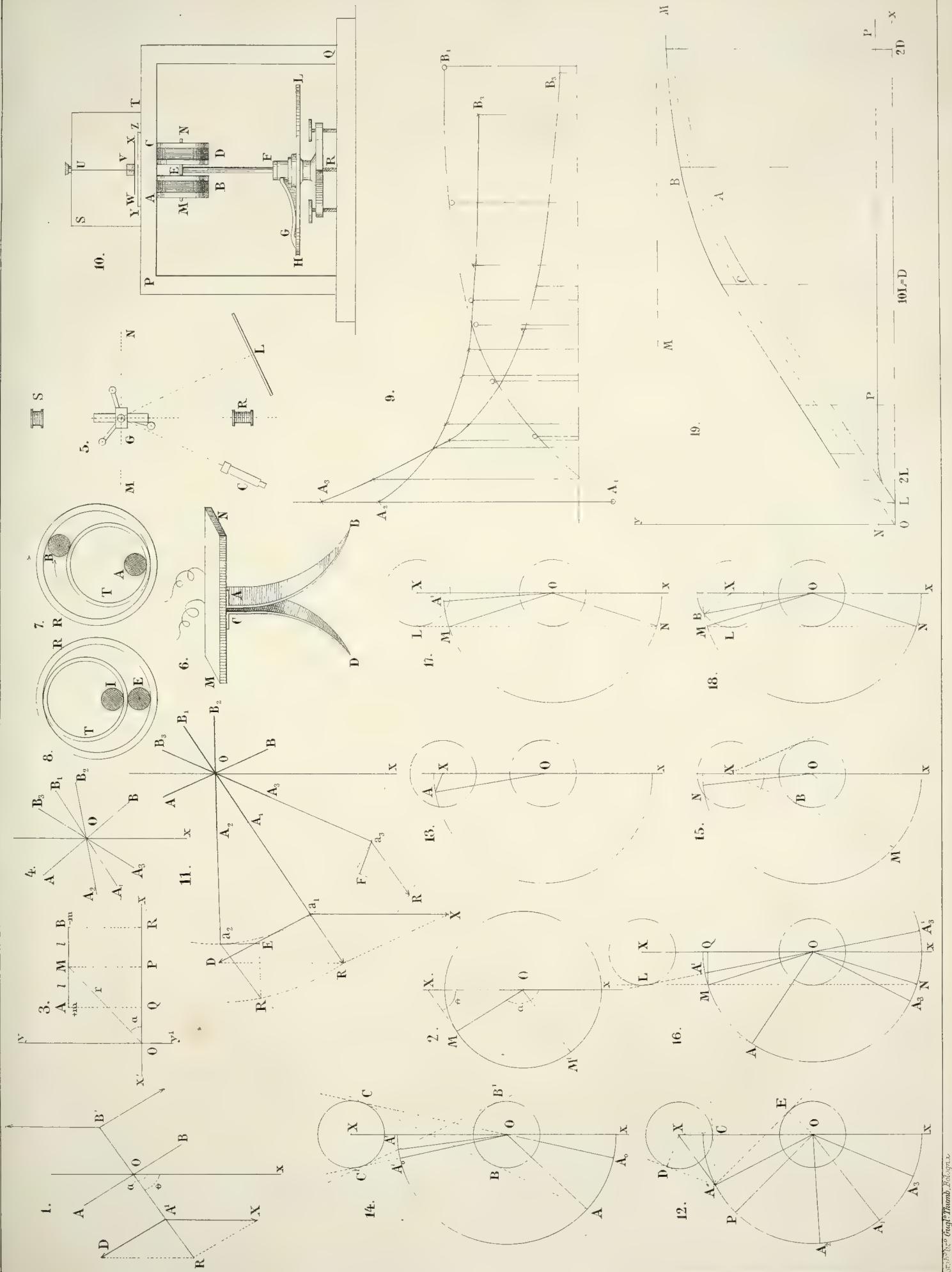
89. Confrontando fra loro le formole (36) e (38), si riconosce che per valori della forza magnetizzante sufficienti a dare la saturazione permanente, ma tuttavia minori di D, il momento temporario minimo ed il massimo sono, il primo minore ed il secondo maggiore di quello trovato da Weber, precisamente del momento permanente di saturazione $M\frac{\beta\pi}{4}$. Per valori superiori di X risulta dalle (37) e (39), che le differenze del magnetismo minimo o massimo dal medio consistono nel magnetismo permanente massimo (trascurando β^2) moltiplicato per $\frac{D^2}{X^2}$; le differenze stesse tendono quindi a sparire. La presenza del termine in β^2, fa sì che il magnetismo temporario massimo differisca qualche poco meno da quello dato da Weber, che non il minimo. La proprietà precedente, risguardante il magnetismo temporario minimo quando $X < D$, era già stata dedotta dalle formole esatte nella (34).

90. Per acquistare una più chiara idea del modo in cui variano i momenti magnetici d' una sbarra, al variare della forza magnetizzante, ho tracciate le curve della figura 19, prendendo per ascisse i valori di X, e per ordinate i momenti magnetici, adoperando per calcolarli le formole esatte dei due precedenti capitoli,

ed assumendo $L = 0, 1\ D$. La linea LA, le prime porzioni della quale costituiscono press' a poco una linea retta, rappresenta il magnetismo temporario minimo. Essa parte dal punto L, ad una distanza dall' origine eguale ad L, giacchè appunto sappiamo che per $X < L$ non si ha magnetizzazione. La curva si accosta assintoticamente alla retta MM, la cui ordinata corrisponde alla saturazione temporaria. La curva CC, che parte dall' origine, rappresenta il magnetismo temporario medio, dato dalle formole di Weber, e la curva LB, il limite superiore del magnetismo temporario dato dalle formole (26) e (27). Anche queste due curve hanno MM per assintoto. Il magnetismo permanente delle formole (28), (29), (30) e (31), è rappresentato dalla curva LPP, la quale si confonde colla LA sino ad $X = 2\ L$, e quindi rapidamente tende a divenire una retta orizzontale. Basta guardare la figura 19 per riconoscere come prontamente è raggiunto lo stato di saturazione permanente, anche per valori di X ai quali corrisponde un magnetismo temporario assai minore di quello che costituisce la saturazione temporaria. Si vede pure che le distanze verticali fra le tre curve LA, LB, LC, ossia le differenze fra i momenti temporari minimo e medio, e medio e massimo, finchè $X < D$, sono sensibilmente eguali al massimo magnetismo permanente, mentre che per i valori maggiori di X, le stesse distanze verticali diminuiscono e tendono a sparire al crescere di X.

Il magnetismo temporario massimo, dato dalle formole (22), (24) e (25) non è stato rappresentato, onde non complicare la figura. La linea che lo rappresenterebbe, partirebbe da N, essendo $ON = P_\infty$, e ben tosto si confonderebbe quasi colla LB. Il magnetismo permanente che segue il temporario medio, dato dalle (32), (33) e (35), sarebbe rappresentato da una linea che partirebbe da O confondendosi dapprima colla OC, e ben tosto riducendosi nella PP.

Se invece di supporre $L = 0, 1\ D$, si prendesse un valore anche minore di $\frac{L}{D}$, e quindi più prossimo al vero, anche più rapido riuscirebbe il confondersi della LPP con una retta orizzontale, come pure anche più prossime alla forma rettilinea sarebbero le prime porzioni delle curve LA, LB.

Nota. — Il Capitolo VII di questa memoria era già stampato, quando da un breve sunto fatto dal prof. Gustavo Wiedemann nei *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie*, d' una mia comunicazione relativa al magnetismo inverso, presentata all' Accademia di Parigi dal prof. Jamin, ho appreso, che il prof. Waltenhofen di Innsbruck, aveva già osservato prima di me il fenomeno della polarità permanente inversa dell' ordinaria, senza tuttavia darne la teoria. Non sono dunque stato il primo ad osservare questo curioso fenomeno, come avevo fin qui creduto.

Lith. Gugl. Thumb, Bologna

INDICE DELLE MATERIE

Introduzione . . . . Pag. 433

Cap. I. — *Rivista di lavori anteriori.*

Art. 1 Sulla preesistenza della polarità molecolare . . . . „ 435
„ 2 Teoria di Weber . . . . „ 436
„ 3 Teoria di Maxwell . . . . „ 439
„ 4 Teoria di Chwolson . . . . „ 439
„ 5 Fenomeni che accadono invertendo la polarità magnetica „ 440
„ 6 Propagazione dello stato magnetico . . . . „ 441
„ 7 Penetrazione del magnetismo . . . . „ 442
„ 8 Influenza delle dimensioni sul momento magnetico che può acquistare una sbarra . . . . „ 443

Cap. II. — *Considerazioni teoriche.*

Art. 9 — 11 Principi fondamentali . . . . „ 444
„ 12 Inerzia delle molecole . . . . „ 446
„ 13 — 16 Deviazione minima, media e massima d' una molecola . „ 447
„ 17 — 20 Magnetizzazioni successive . . . . „ 451

Cap. III. — *Disposizioni sperimentali relative ai capitoli IV, V e VI, ed esperienze preliminari.*

Art. 21 Misura del momento magnetico temporario . . . . „ 453
„ 22 — 23 Misura del magnetismo permanente. . . . . „ 456

Cap. IV. — *Sui fenomeni d' induzione che accompagnano la magnetizzazione.*

Art. 24 — 25 Caso d' una sola sbarra. . . . . „ 458
„ 26 — 27 Caso in cui si abbiano due sbarre, l' una esterna e l' altra interna al tubo metallico . . . . . . „ 462

Cap. V. — *Sulla distribuzione interna del magnetismo.*

Art. 28 — 29 Penetrazione del magnetismo . . . . „ 465
„ 30 — 32 Influenza del modo di chiusura e d' apertura del circuito sulla penetrazione del magnetismo . . . . „ 467
„ 33 — 34 Distribuzione del magnetismo in una sbarra smagnetizzata con corrente inversa . . . . „ 471
„ 35 Conclusioni relative al modo in cui si forma la magnetizzazione nelle varie parti di una sbarra. . . . „ 473

Cap. VI. — *Influenza del modo di chiusura e d'apertura del circuito sul momento magnetico temporario e sul permanente.*

Art. 36 — 37 Magnetismo temporario . . . . „ 474
„ 38 Influenza del modo di chiusura sul magnetismo permanente. . . . . „ 477
„ 39 Influenza del modo di apertura del circuito, sul magnetismo permanente . . . . „ 479
„ 40 Influenza simultanea della chiusura ed apertura . . „ 480

Art. 41 — 42 Magnetizzazione simultanea di due sbarre diversamente temprate . . . . Pag. 481
„ 43 — 44 Caso di sbarre di diversa grossezza. . . . . . . „ 483

Cap. VII. — *Magnetismo inverso.*

Art. 45 Influenza delle dimensioni della sbarra e dell' intensità della corrente. . . . . „ 487
„ 46 Effetto del modo di chiusura e d' apertura . . . . „ 489
„ 47 Effetti d' induzione . . . . „ 490
„ 48 Stato magnetico delle parti interne della sbarra. . . „ 491
„ 49 Effetto delle correnti successive . . . . „ 492
„ 50 Effetto della tempra . . . . „ 493

Cap. VIII. — *Sullo spostamento dell' asse magnetico d' un disco calamitato, dovuto ad una nuova magnetizzazione.*

Art. 51 Disposizione sperimentale . . . . „ 494
„ 52 Spostamento angolare dell' asse magnetico, chiudendo ed aprendo rapidamente il circuito . . . . „ 496
„ 53 Influenza del modo di chiusura e d' apertura del circuito „ 497
„ 54 Proprietà d' un disco fatto girare entro il rocchetto . „ 498

Cap. IX. — *Modificazioni alla teoria di Weber.*

Art. 55 Ipotesi fondamentali. . . . . „ 500
„ 56 — 58 Deviazione minima, media e massima d' una molecola . „ 501
„ 59 Angolo d' attrito . . . . „ 503
„ 60 Costruzione grafica . . . . „ 504
„ 61 — 64 Valori particolari di α e di X . . . . „ 505

Cap. X. — *Calcolo del momento magnetico temporario.*

Art. 65 — 67 Magnetismo temporario minimo . . . . „ 510
„ 68 Magnetismo temporario medio. . . . . „ 516
„ 69 — 72 Magnetismo temporario massimo . . . . „ 516
„ 73 — 75 Magnetismo temporario nei casi ordinari . . . . . „ 521

Cap. XI. — *Calcolo del momento magnetico permanente.*

Art. 76 — 79 Magnetismo permanente che si ottiene facendo variare lentamente la forza magnetizzante . . . . . . „ 524
„ 80 — 82 Magnetismo permanente che segue al temporario medio „ 529

Cap. XII. — *Semplificazione delle formole precedenti, e conclusioni relative ai quattro ultimi capitoli.*

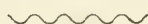
Art. 83 Grandezza dell' angolo d' attrito . . . . „ 532
„ 84 Formole semplificate pel magnetismo temporario minimo . . . . „ 534
„ 85 Formole pel magnetismo temporario massimo . . . „ 536
„ 86 Formole relative ai limiti fra i quali è compreso il magnetismo temporario ordinario . . . . „ 537
„ 87 Formole pel magnetismo permanente . . . . . . „ 537
„ 88 — 90 Conclusioni. . . . . „ 539
Nota . . . . „ 541

DELL'OSTREA COCHLEAR (POLI)

E DI ALCUNE SUE VARIETÀ

MEMORIA

DEL DOTT. LODOVICO FORESTI

(Letta all'Accademia il 20 Maggio 1880)

L' accrescersi ogni giorno il numero di quelle forme intermedie che legano fra loro un tipo ad un altro, mostra come un progresso, una continua evoluzione si sia operata e si operi negli esseri organici a traverso la lunga serie dei secoli; e le scoperte fatte specialmente in America in questi ultimi anni, mentre da una parte distruggono la famosa legge del Cuvier sulla correlazione degli organi, dall'altra arricchiscono di nuovi veri le teorie del Lamarck e del Darwin.

La paleontologia questa indefessa indagatrice di forme organiche perdute, di quando in quando toglie dalle profondità della crosta terrestre, ed espone alla vista degli scienziati alcuni resti di quegli esseri che partecipando di due ordini diversi, vengono chiamati tipi sintetici; tipi che si potrebbero credere parti di fantasie esaltate, se non vi fossero le prove di fatto, se non vi fossero gli esemplari che nella grande catena delle forme organiche rappresentano quegli anelli che ne attestano la sua indiscuttibile continuità.

Occupandomi particolarmente di conchiologìa si è cogli elementi che mi fornisce questa scienza che cerco di venire in appoggio alla teoria del trasformismo, della evoluzione e di portare mano a mano che mi si presenta l' occasione una piccola pietra al monumento scientifico che scevro di pregiudizi s' alza ogni giorno in onore della verità.

Non potendo per ora con un vero tipo sintetico mostrare come da una sola origine si diramino diversi generi, mi limito a far palese come una sola specie trasformandosi in vari modi possa dar luogo a credute specie diverse; e concludere poi, come tutte le specie di molluschi viventi altro non rappresentino che le ultime evoluzioni di generi e specie, che più semplici e sotto altre forme vivevano nelle lontane epoche geologiche.

Avendo preso a studiare il tanto svariato e proteiforme genere *Ostrica,* hanno attirato viemaggiormente la mia attenzione alcune forme speciali appartenenti però a un solo tipo, che apparendo in diverse epoche geologiche e portandosi fino all' attualità, hanno subito alcune modificazioni e nella struttura della conchiglia e e nelle dimensioni da dar luogo a diversi autori a descrivere parecchie nuove specie.

L' *Ostrea cochlear* del Poli e l' *O. navicularis* del Brocchi da molti autori sono state considerate come due specie assolutamente diverse, mentre altri invece hanno intravveduto una certa relazione fra loro, portandosi alcuni a credere non essere l' una che una varietà dell' altra.

Avendo avuto sott' occhio moltissimi esemplari fossili di queste due forme sì del bacino di Vienna, del Belgio, di Francia, come del Bolognese, della Toscana del Piacentino e di moltissime altre località italiane, mi è stato facile, mercè graduati passaggi potere assicurarmi, come l' *O. navicularis* altro non sia che una semplice modificazione dell' *O. cochlear;* e confrontando poi i diversi esemplari di queste due forme principali, raccolti in diversi piani di epoche geologiche diverse, con molti esemplari viventi nei nostri mari, ho avuto campo di seguire le diverse modificazioni subìte, e così posso ora esporre le osservazioni fatte e dedurne alcune conclusioni in appoggio alla tesi sopraccennata.

Fino dal 1791 il Poli studiando i molluschi che vivono lungo le coste di Napoli e di Sicilia per primo descrisse ed illustrò l' *O. cochlear.* (1)

Come fossile fu descritta nel 1813 dallo Schlotheim chiamandola *Gryphites rugosus* (2) e nel 1814 il Brocchi la descriveva col nome di *O. navicularis.* (3)

Per essere la forma del Brocchi alquanto ricurva, coll' umbone ripiegato e perciò appartenente al sottogenere *Gryphaea* fu poi dal Leonh, dal Bronn, dal Goldfuss e da altri citata col nome di *Gryphaea navicularis.* (4)

Così fino a tutt' oggi la forma vivente fu sempre conosciuta e citata col nome del Poli, (*) mentre il rappresentante fossile ebbe dai moltissimi autori che ne parlarono a seconda della sua forma o tondeggiante o allungata, ora il nome di *O. cochlear* ora quello di *O. navicularis.*

Venendo ora ad alcuni autori più recenti dirò come il Prof. Nyst di Bruxelles nel 1868 avendo osservato nel Diestiano e particolarmente nelle sabbie nere o d' Edeghem una forma particolare di Ostrica molto concava, con gli umboni molto ripiegati, una vera Gryphaea, la credette una specie nuova e l' appellò col nome

(1) Poli — Test. utriusq. Sicil, Vol. II, pag. 179. Tav. 28, fig. 28.
(2) Schlotheim — Leonhard's Taschen buch für. Mem. VI, pag. 93.
(3) Brocchi — Conchiol. foss, subap. Vol. II, pag. 383. — Milano 1843.
(4) Leonh et Bronn — Iahrb f. Min. pag. 543.
Bronn — Itali. Tertiärgebilde, pag. 123.
Goldfuss — Petref. Germ. II, pag. 31. N. 8, Tav. 86, fig. 7-8.

(*) — Il Deshayes, secondo il Reuss, diede il nome di *O. Italica* a questa forma, tanto allo stato fossile quanto allo stato vivente.

di *O. Hennei* (1), dubitando però che potesse essere anche una varietà molto esagerata dell' *O. navicularis*. Nell' ultimo suo viaggio in Italia, avendo potuto osservare a Milano l'originale della collezione del Brocchi, mi disse come l' Ostrica del Belgio si dovesse riferire all' Ostrica di questo autore; e così pure credette si dovessero a questa riportare alcune delle diverse forme che osservò nel nostro Museo, e che io invece avevo riportate senza distinzione all' *O. cochlear*, considerando fin d' allora l' *O. navicularis* come una semplice modificazione dell' Ostrica del Poli. (2)

Nel 1770 il Reuss proseguendo il lavoro dell' Hörnes sui molluschi fossili del bacino di Vienna, illustrava fra le diverse Ostriche alcune forme che egli riportava all' *O. cochlear* Poli *var.* = fossile *O. navicularis* Brocchi (3). Alcuni degli esemplari illustrati, come p. es. le fig. 1 e 2, benissimo stanno a rappresentare l' Ostrica del Brocchi, mentre la fig. 3 specialmente, a parte la grossezza del guscio, riproduce, per la forma, esattamente alcuni esemplari viventi dell' *O. cochlear* pescati nel Mediterraneo. Attribuendo il Reuss ambidue queste forme alla specie del Brocchi, mostra di intravvedere gl' intimi rapporti fra questa e quella del Poli, stabilendo come la forma fossile altro non sia che il rappresentante della forma vivente.

Nel 1874 il Prof. Capellini in una sua memoria sulla formazione gessosa di Castellina marittima (4) enumerando i vari fossili che in essa si trovano, cita una forma di Ostrica che considera come l' *O. cochlear var. navicularis;* e per tal modo per primo fa conoscere come la *Gryphaea Columba* Lk, citata dal Pilla, chiamata poi *O. Pillae* dal Meneghini, ignorata e negletta dai geologi e paleontologi che non si occuparono in modo particolare della Toscana, altro non sia che la forma descritta dal Brocchi.

Nel 1876 il Prof. Mayer nel giornale di Conchiologia descrive ed illustra una forma nuova di Ostrica che chiama *O. Brocchii* (5). Sebbene il Mayer dica che non ha nulla di comune colla *O. cochlear var. navicularis*, io credo invece che altro non sia che una varietà gigantesca della Ostrica del Poli, la quale differendo per dimensioni e mostrando alla sua superficie esterna alcune striscie colorate, presenta una forma intermedia fra l' Ostrica tipo e la varietà del Brocchi.

Per viemmeglio apprezzare le osservazioni che io stesso ho potuto fare sopra i moltissimi esemplari che ho preso a studiare, onde giungere alla conclusione che l' *O. navicularis*, l' *O. Pillae* e l' *O. Brocchii* altro non sono che modificazioni del-

(1) Nyst — Fossil. du syst. Diesten et du syst. Scaldisien (Prodrome d' une descrpt. géolog. de la Belgique par G. Dewalque). — Bruxelles 1868.

(2) Foresti — Catal. dei Moll. foss. plioc. delle collin. bolognesi. Parte II, pag. 47, (Mem. dell' Acc. delle Scienze dell' Ist. di Bologna. Ser. III, Tom. IV). — Bologna 1874.

(3) Reuss — Die foss. Moll. des Tert. Beckens von Wiens. Band II, pag. 435, taf. 68, fig. 1-3. — Wien 1870.

(4) Capellini — La formaz. gess. di Castellina maritt. e i suoi foss., pag, 35. — Bologna 1874.

(5) Mayer. — Descript. de Coquill. foss des terr. tert. sup. (Journal de Conchyliologie 3ª Ser., Tom. XVI, pag. 168, Tav. 6-7, fig. 1). — Paris 1876.

l' *O. cochlear,* e che gli esemplari viventi di questa specie a primo aspetto e per forma e per dimensioni così diversi dagli esemplari fossili altro non rappresentano che una derivazione di quelli, ho creduto necessario il dare alcuni disegni delle forme principali che si osservano negli esemplari raccolti in località diverse per derivazione e per epoca geologica.

Anzi tutto mi piace stabilire come non solo si trovi fossile quella forma che rappresenta l' *O. navicularis* del Brocchi, ma bensì ancora la forma tipica della vera *O. cochlear*, e ciò è facile il poter constatare a chiunque abbia sott' occhio buon numero di esemplari di questa specie.

Tre sono le forme principali che si possono osservare e ben distinguere negli esemplari fossili dell' *O. cochlear.* La prima starebbe a rappresentare il tipo e cioè quella forma in generale che meglio somiglia agli esemplari viventi ed ai disegni del Poli, facendo sempre astrazione, nella maggior parte dei casi, alla grossezza ed alle dimensioni della conchiglia. Questi esemplari presentano la valva inferiore osservata esternamente convessa, più o meno tondeggiante, coll' umbone poco o nulla ripiegato, senza traccia di espansione laterale e con apparenza maggiore o minore della impronta di attacco, cioè di quello spazio piano che indica come la conchiglia fosse affissa a un corpo solido, con superficie liscia, o con poche e rade ed appena apparenti lamine concentriche: internamente è più o meno concava, con l' impronta muscolare a sinistra e posta verso l'umbone; la valva superiore è più piccola, con aspetto fogliettato per le molte ed appariscenti lamine concentriche che l' addornano. (Tav. I-II, fig. 1).

Una seconda forma sarebbe quella che in generale presenta la valva inferiore un poco più allungata, con una convessità più o meno sentita e nella quale l'umbone sembra maggiormente portato a sinistra per lo sviluppo più o meno grande di una espansione della sostanza calcare del guscio, di una specie di aletta che si forma a destra; fra questa forma (Tav. I-II, fig. 2, 3) e la tipica v' hanno una quantità di graduati passaggi. — Questa forma particolare che si riscontra ancora fra gli esemplari viventi, per meglio distinguerla dalla forma tipica credo doverla chiamare *var. alata.* Di questa varietà si trovano esemplari più o meno allungati, con una convessità maggiore o minore della valva inferiore; più o meno concava ed espansa la valva superiore e così pure maggiore o minore il ripiegamento la curvatura dell' umbone; per cui mentre da un lato si hanno individui che si avvicinano alla forma tipica, dall' altro altri se ne hanno che più si accostano all' Ostrica del Brocchi.

Stando alla frase ed alla descrizione data dal Prof. Meneghini per la sua *O. Pillae* credo che questa piuttosto alla *var. alata* che alla *var. navicularis* debbasi riferire, giacchè il carattere della espansione laterale è bene espresso dal distinto geologo di Pisa (1); e di più gli esemplari di questa specie che ho avuto

(1) Savi e Meneghini — Osserv. stratigraf. e paleont. concern. la Geol. della Toscana ecc., pagina. 177. — Firenze 1851.

occasione di osservare, tutti più o meno m' hanno fatto palese questo carattere particolare, e cioè di una specie di aletta laterale.

Finalmente una terza forma sarebbe quella che presenta la valva inferiore molto più allungata della forma tipica e della varietà *alata;* oltremodo convessa, coll' umbone molto sporgente e ripiegato, senza traccia di aletta laterale, con rare lamine concentriche e che corrisponde perfettamente coll' *O. navicularis* del Brocchi: fra questa forma e le suindicate si hanno pure dei graduati passaggi, che da un primo grado di questa forma grifeata (Tav. I-II, fig. 4, 5) si giunge fino all' esagerazione come in alcuni esemplari del Belgio (*O. Hennei Nyst*). Tav. I-II, fig. 6.

L' impronta muscolare della valva inferiore in tutte quante le sovraccennate forme trovasi sempre molto presso l' umbone ed alla parte sinistra, e proporzionatamente sempre nella stessa posizione e colla stessa forma; per cui anche questo dato viene a maggior conferma della unità del tipo.

Quanto alla valva superiore, come ho già accennato per alcune di queste forme tranne dell' essere più o meno tondeggiante, più o meno allungata, è sempre molto più piccola della valva inferiore, sempre più o meno concava e colle linee d' accrescimento spesse e bene apparenti, come si può osservare nei diversi esemplari che ho fatto disegnare (Tav. I, fig. 1, 3, 4, 6, 7).

Volendo poi tener calcolo anche delle dimensioni, si ha a notare come ho detto più sopra che fra i diversi passaggi della forma tipica alla *var. navicularis* specialmente, si hanno alcuni esemplari veramente giganteschi, i quali secondo il mio modo di vedere corrispondono all' *O. Brocchi* del Mayer, e formerebbero perciò una terza varietà che potrebbesi chiamare *var. gigantea.* In questa forma speciale, quasi identica alla fig. 4 della Tav. 1, che il Mayer ha creduto di potere erigere a specie io non vedo caratteri tali da confermare l' opinione del distinto geologo e paleontologo Svizzero. E primieramente per la forma dirò, che paragonando fra loro una numerosa serie di diversi esemplari sì della forma tipica come della *var. navicularis* è facile il vedere come per giungere gradatamente dall' una forma all' altra si debba necessariamente passare per una forma intermedia rappresentata dall' Ostrica del Mayer. Quanto alle dimensioni faccio osservare come si abbiano in tutte le forme sopraccitate oltre le dimensioni ordinarie, degli esemplari piccoli e così pure degli esemplari più grandi; e così, p. es. tengo alcuni individui del bolognese rappresentanti la *var. navicularis* che solo di due o tre millimetri differenziano dall' *O. Brocchii* di Baccdasco; mentre poi in Toscana il Prof. Capellini ha raccolto alla Casa Bianca nel Volterrano esemplari di questa varietà gigantesca, che sebbene incompleti permettono di poter assicurare che di parecchi millimetri sì in lunghezza che in larghezza superano le dimensioni dell' Ostrica del Mayer. Egli è perciò che in quanto alla apprezziazione specifica riguardo le dimensioni, specialmente in un genere così polimorfo come il genere Ostrica bisogna andare molto cauti, giacchè se si fa attenzione ai molti esemplari delle diverse forme in discorso e raccolte in località differenti, bene apparisce come in alcune stazioni

gli esemplari si mostrano piccoli, in altre di dimensioni maggiori. Ma ciò punto non sorprende ogni qualvolta s' abbia presente che lo stesso avviene anche nell' attualità; e bene a ragione così si esprime il Monterosato parlando di alcune conchiglie provenienti dalle coste d' Algeria: „ Beaucoup d' especès, rares dans „ une localité, se retrouvent, dans une autre, plus abondantes mais diminuées de „ volume et plus finement sculptées, tandis que, sur d' autres points, elles sont plus „ grandes et présentent un système de sculpture moins nettement accusé, comme „ si elles perdaient, sous le rapport de l' ornement, ce qu'elles acquièrent sous le „ rapport de la taille. „ (1)

Finalmente rispetto ai colori credo che questi nella specie in discorso, non stiano a rappresentare un carattere differenziale, ma invece una prova maggiore dell' unità sua. Non solo nell' *O. Brocchi* del Mayer i raggi rossicci più o meno larghi ed ondulati sono bene apparenti, ma questi si manifestano ancora in alcuni esemplari delle altre forme, e sono poi bene visibili anche in molti esemplari viventi. — Il sig. Cafici ha raccolto in abbondanza esemplari di questa specie nelle marne calcaree biancastre sovrastanti ai gessi del Vizzinese, e che sono ornati ancora di st.isce paonazze (2). In Terra d' Otranto poi e specialmente a Lizzanello il Cav. Botti ne ha esso pure raccolte coi colori benissimo conservati, come si può vedere nella Tav. II, fig. 8.

Che le forme fossili principali sovraccennate e specialmente l' *O. cochlear* e l' *O. navicolaris* abbiano molta analogia fra loro, particolarmente pei graduati passaggi mercè dei quali si uniscono, si fondano insieme, lo provano ancora i molti autori che ora col nome del Poli, ora con quello del Brocchi le hanno indicate, e spesso insieme citate ora con l' una ed ora con l' altra denominazione.

Come negli esemplari fossili anche in quelli viventi l' *O. cochlear* va soggetta a forme svariatissime, e così dalle valve quasi rotonde (Tav. I, fig. 8) si passa gradatamente a delle forme allungatissime (Tav. II, fig. 9); varia pure la convessità della valva inferiore e varia la ripiegatura dell' umbone: l' aletta laterale poi in moltissimi esemplari è bene manifesta (Tav. I-II, fig. 7) e ciò ha luogo per il modo d' inserzione della conchiglia al corpo cui aderisce e per l' espansione della sostanza calcarea della valva inferiore lungo il corpo stesso (*). La valva

(1) Monterosato — Note sur quelq. Coquill. prov. des côtes d' Algerie (Journal de Conchyl. 3ª Ser., Tom. XVII, pag. 24). — Paris 1877.

(2) Cafici — La formaz. gess. del Vizzinese e del Licodiano ecc. (Bull. r. comit. Geolog. 1880 — N. 1, 2).

(*) — Anche al Brocchi col suo occhio osservatore tanto giusto e minuzioso, non era sfuggita quella impronta, che accenna al modo di fissarsi della conchiglia e che poi coll' accrescere di essa dà spesso luogo a quella specie di spostamento dell' umbone ed al formarsi dell' aletta laterale. Parlando della sua *O. navicularis* il celebre naturalista di Bassano così si esprime: « Sembra che « quest' Ostrica rimanga affissa ai corpi solidi, scorgendosi alla base della valva inferiore quello « spazio piano che si è indicato parlando dell' *O. foliosa*, il quale serve alla conchiglia di punto di « attacco ».

Ma mentre molti degli esemplari spettanti alla *O. navicularis* presentano questa impronta esterna,

superiore sempre più piccola come negli esemplari fossili è pure più o meno concava, e le lamine concentriche che l' adornano sono sempre più spesse e più appariscenti. — Tutte queste varietà di forme si riscontrano tanto negli esemplari adulti, quanto negli esemplari giovani, e così pure in molti di essi sono bene manifeste le strie longitudinali violacee o rossiccie, come ho accennato più sopra, per cui non è a meravigliare se questi colori si mantengono in alcuni esemplari fossili; dipendendo ciò dalla natura della roccia entro cui sono stati sepolti.

Quanto alla distribuzione geologica di questa specie di Ostrica egli è ben manifesto come sotto questa forma cominciando ad apparire alla metà circa dell'epoca miocenica, abbia poi avuto il suo maggiore sviluppo insieme alle sue varietà al cominciare dell' epoca pliocenica: diffatti per quanto a me consta, il maggior numero di esemplari si rinviene nella porzione inferiore del pliocene antico, in quelle argille turchiniccie, sabbiose, che nel bolognese poggiano sopra i gessi, come lo provano le raccolte da me fatte sì nei dintorni di Bologna che a Castrocaro, ed i molti e bellissimi esemplari rinvenuti dal Sig. Carlo Fornasini lungo la sponda del Savena; confermano ciò pure gli esemplari trovati del Sig. Cafici nelle marne biancastre superiori ai gessi nella provincia di Catania, e le belle ed interessanti scoperte fatte dal Prof. Capellini in Toscana ed altrove. Gli esemplari di molte altre parti d' Italia, come quelli del bacino di Vienna e del Belgio, che tengo nella mia collezione e raccolti nello stesso piano geologico confermano sempre più quanto or ora ho affermato relativamente all' epoca del suo maggiore sviluppo.

In questo piano sono più frequenti gli esemplari rappresentanti la *var. alata* e la *var. navicularis* scarseggiando la forma tipica, la quale però colle sue varietà particolari ho trovato formare come degli strati a Castrocaro con degli esemplari che per le forme e le dimensioni si potrebbero confondere cogli esemplari viventi; ed in simili condizioni è stata parimenti rinvenuta dal Prof. Capellini a Sant-al-Poggio in Toscana presso Castellina marittima. In questo stesso piano è stata pure raccolta la *var. gigantea*, ma in numero molto scarso di esemplari.

Nella porzione superiore del pliocene antico, la forma tipica si fa un poco più

ve ne hanno poi moltissimi ove essa non apparisce per nulla, mostrandosi tutta quanta la conchiglia dal margine inferiore all' umbone perfettamente liscia, e in alcuni esemplari con leggiera apparenza di poche e rade lamine concentriche. Per cui alcune delle forme riferentesi a questa varietà, per il carattere particolare di non presentare nessuna impronta che indichi come la conchiglia fosse aderente, mostrano come passino al genere o sotto-genere Grifea; essendo carattere proprio di questo genere l' avere la conchiglia libera.

L' unione di questi due caratteri in una forma sola fa sempre più palese come tutto in natura si colleghi, si concateni, come tutti gli esseri organici abbiano stretti rapporti fra loro e come si faccia sempre più difficile il volere per comodo di studio stabilire i generi e le specie.

Con queste considerazioni resta per tal modo anche ben spiegato come in alcune località, a Castrocaro p. es., si trovino degli strati composti delle diverse forme dell' *O. cochlear* con gli esemplari che tutti più o meno mostrano l' impronta di attacco, mentre poi nella stessa formazione si raccolgano sparsi alcuni esemplari della *var. navicularis* colla loro superficie esterna perfettamente liscia e senza traccia di impronta.

frequente, e così proporzionatamente diminuisce la forma grifeata, la quale sparisce, per quanto è a mia cognizione almeno in Italia, nel pliocene recente.

Fra gli esemplari viventi nei nostri mari oltre la forma tipica (Tav. I, fig. 8) soggetta a molte e diverse modificazioni come ho accennato più sopra, riscontrasi frequentissima la *var. alata* (Tav. I-II, fig. 7) mentre la *var. navicularis* è del tutto sparita. (*)

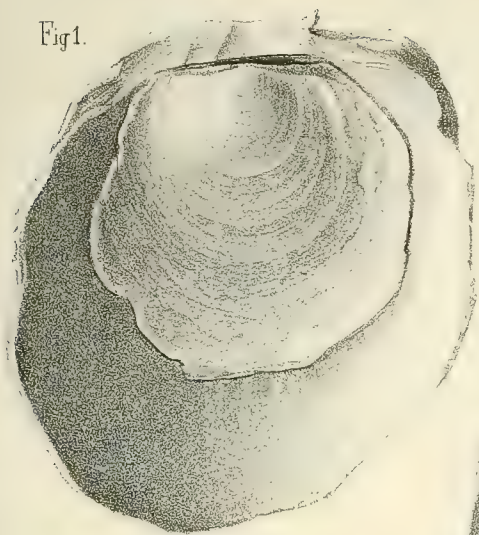
Dietro a quanto ho fin quì accennato mi sembra ben manifesto come non si abbia a considerare che come tipo la sola forma descritta ed illustrata dal Poli; e che io ho riprodotto da esemplari fossili nella Tav. I-II, fig. 1, e da esemplari viventi nella Tav. I, fig. 8, tenendo tutte le altre forme come semplici varietà, perciò così io considero questo tipo di Ostrica.

OSTREA COCHLEAR — Poli.

1	„	„	*var. navicularis* =	*O. navicularis*, Brocchi.
				O. Hennei, Nyst.
				O. navicularis auct.
2	„	„	*var. alata* . . . =	*Gryphaea colomba* Lk (secondo il Pilla).
				O. Pillae, Menegh.
3	„	„	*var. gigantea*. . =	*O. Brocchii*, Mayer.

Con studi più accurati e minuziosi e possedendo buon numero di esemplari di molte altre specie di Ostriche che abbiano analogia colle forme che ora ho preso ad esaminare, forse si potrà stabilire come e dove abbia origine la nostra *O. cochlear* colla sua *var. alata* e perciò probabilmente bisognerà, attraversando il miocene (*O. Hornesi* Reuss)? discendere oltre l'eocene per giungere fino al cretaceo (*O. vescicularis*)? E così credo che per l'altre forme riferentesi alla *var. gigantea* e *var. navicularis* bisognerà portarsi alle forme grifeate dell'epoche più antiche.

In rapporto poi alle ultime considerazioni rispetto alla origine delle forme che assume il tipo di Ostrica che oggi ho preso in esame, sarebbe più logico e naturale il considerare la forma dell'*O. cochlear* vivente come una varietà di altra forma

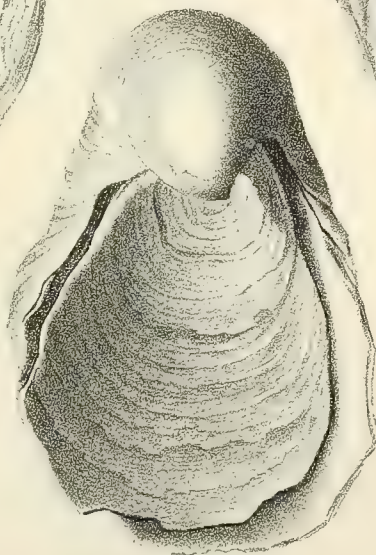
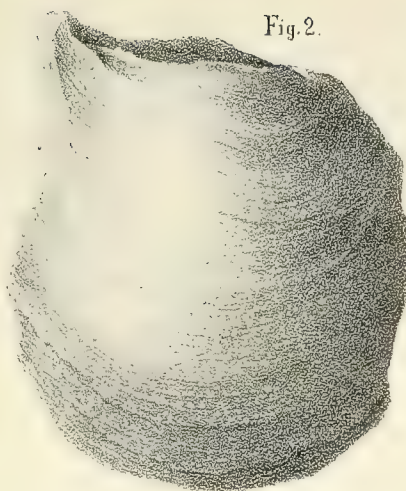
(*) — Secondo il Monterosato (Notizie sulle conchiglie della rada di Civitavecchia) non si potrebbe annoverare come Mediterranea nessuna Ostrica grifeata, e a tale proposito così si esprime: « Le specie ora descritte (*O. edulis, O. Cyrnusci, O stentina*) e l'*O cochlear* sono rigorosamente « parlando le sole *Ostreae* che si possono annoverare come Mediterranee. L'*O. angulata (Gryphaea)* Lk, è riconoscibile dalla sua forma navicolare e dalle sue brune impressioni muscolari. « Oran, e una località data dubbiosamente da qualche collezionista di conchiglie delle coste Algerine. — Vive nell'Atlantico a cominciare da Cadice (Hidalgo) e si propaga sulle coste del Portogallo alla imboccatura del Tago, dove sembra essere il suo centro di creazione ecc. — L'*O. ruscuriana* Lk d'Algeria è consimile e forse la stessa, giudicando dalla diagnosi. L'esemplare citato da Weinkauff (Conch. Mitti. I, pag. 275) è un' *O. stentina*. Si deve forse a questa riferire « l'*O. cornucopiae* di Philippi (non l'*Ostrea* così chiamata che è esotica. In tal caso sarabbe anche « Siciliana. »

Contoli dis.

Bologna, Lit. G. Wenk.

OSTREA COCHLEAR
e alcune sue varietà.

Contoli dis.

Bologna, Lit. G. Wenk.

OSTREA COCHLEAR
e alcune sue varietà.

spettante a qusto tipo, giacchè essa è stata l'ultima a comparire ed è essa che prevale nell' attualità, mentre la forma grifeata ossia la *var. navicularis* sparita dai mari che circondano la nostra penisola abbondantissima trovavasi negli oceani che preparavano la prima formazione del terreno pliocenico, e spingendoci anche più oltre, come ho superiormente accennato, era frequente ed abbondante nei mari mesozoici; ma ciò porterebbe non poca confusione negli studi di conchiologia, lo che devesi con tutta cura evitare, essendovene anche troppa per la smania di dividere e suddividere e per la mania di creare continuamente delle specie nuove.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1.ª — Ostrea cochlear, forma tipica. Esemplare fossile raccolto nelle argille turchine inferiori di Savena (bolognese).

Fig. 2.ª e 3.ª — Due esemplari fossili della *var. Alata:* il N. 2 che rappresenta un primo passaggio dalla forma tipica a questa varietà proviene dalla porzione superiore delle argille turchine di S. Lorenzo in collina (bolognese); mentre il N. 3 di forma più allungata fu rinvenuto nella porzione inferiore delle stesse argille a Pradalbino (bolognese).

Fig. 4.ª — Individuo che rappresenta la *var. navicularis* e che per la forma somiglia moltissimo alla *var. gigantea* ossia *O. Brocchii* di Mayer: fossile raccolto in Savena.

Fig. 5.ª e 6.ª — Altre due forme della *var. navicularis;* la figura 5.ª rappresenta un individuo fossile di forma un poco più grifeata della figura 4.ª raccolto a Pradalbino; e la figura 6.ª un secondo individuo anche più esagerato raccolto ad Edeghon nel Diettiano del Belgio e che corrisponde all'*O. Henney* del Nyst.

Fig. 7.ª — Individuo vivente dell' *O. cochlear; var. alata* pescata presso Palermo.

Fig. 8.ª — Altro individuo della stessa specie, forma tipica, raccolto nella stessa località.

Tavola II.

Fig. 1.ª — Lo stesso individuo della Tav. I, figura 1, visto di profilo.

Fig. 2.ª 3.ª — Gli esemplari 2 e 3 della Tav. I visti dalla parte esterna della valva inferiore onde meglio distinguere l' aletta laterale.

Fig. 4.ª, 5.º e 6.ª — Profili degli individui 4, 5, 6, Tav. I: per meglio apprezzare il graduato ripiegarsi della valva inferiore.

Fig. 7.ª — L' esemplare 7 della Tav. I visto esternamente dalla parte della valva inferiore.

Fig. 8.ª — Esemplare fossile della *var. alata* che conserva ancora i colori e raccolto a Lizzarello (Terra d' Otranto).

Fig. 9.ª — Individuo vivente nel Mediterraneo di forma allungatissima, e che accenna ancora alla *var. alata.* Questa forma si riscontra anche fossile e a Ficarazzi nel pliocene superiore, e a Castrocaro nel pliocene inferiore.

RICERCHE

SOPRA UNA QUESTIONE DI PARTIZIONE DI NUMERI

MEMORIA

DEL PROF. PIETRO BOSCHI

(Letta nella Sessione ordinaria delli 13 Maggio 1880)

Mi propongo di determinare in quanti modi differenti si può ottenere un numero intero p, mediante la somma di s numeri interi della serie 1, 2, 3,... n. Dopo di avere mostrato come in generale si può ottenere questo numero di modi, passo a ricercare le formule che danno tal numero in quei casi, nei quali s sia uguale a 2, 3, 4. Nelle ipotesi di s uguale a 2, 3 trovo pure le formule, che danno il numero delle combinazioni, nelle quali la somma risultante riesca minore od uguale ad un certo numero intero; per brevità ho tralasciato di trovare quelle corrispondenti al caso di s uguale a 4.

L' egregio Sig. Dott. Piuma nel fascicolo ultimo del 1879 del giornale del Battaglini trattò la questione nel caso di $s = 3$; il metodo da me tenuto mi sembra più facile e tale che si presta per ogni altro valore di s.

1. Poniamo

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
S_{1,r} &= x^r + x^{r+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n \\
S_{2,r} &= x^r S_{1,r+1} + x^{r+1} S_{1,r+2} + \ldots + x^{n-2} S_{1,n-1} + x^{n-1} S_{1,n} \\
S_{3,r} &= x^r S_{2,r+1} + x^{r+1} S_{2,r+2} + \ldots + x^{n-2} S_{2,n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

È facile persuadersi che in generale nella $S_{u,r}$ sviluppata ed ordinata rispetto ad x, il coefficiente di x^p indica in quanti modi differenti può aversi il numero p colla somma di u diversi numeri della serie r, $r+1$, $r+2$,..., n.

La prima delle (1) si riduce alla seguente

$$S_{1,r} = \frac{x^r - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Nella seconda delle (1)

$$S_{2,r} = \sum_{r=r}^{r=n-1} x^r \, S_{1,r+1}$$

sostituendo per $S_{1,r+1}$ il valore dato dalla precedente, si ottiene

$$S_{2,r} = \sum_{r=r}^{r=n-1} \frac{x^{2r+1} - x^{n+r+1}}{1 - x}$$

ed eseguendo le operazioni Σ

$$S_{2,r} = \frac{1}{1 - x} \left[\frac{x^{2r+1} - x^{2n+1}}{1 - x^2} - \frac{x^{n+r+1} - x^{2n+1}}{1 - x} \right]$$

e riducendo si ha

$$S_{2,r} = \frac{(x^r - x^{n+1})(x^{r+1} - x^{n+1})}{(1 - x)(1 - x^2)} ;$$

in simile modo potremo operare per $S_{3,r}$, $S_{4,r}$ ..., affine di esprimerle mediante la x.

2. Ora vogliamo provare che in generale si avrà

$$(2) \qquad S_{u,r} = \frac{(x^r - x^{n+1})(x^{r+1} - x^{n+1}) \ldots (x^{r+u-1} - x^{n+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \ldots (1 - x^u)} ;$$

infatti supponiamo vera questa formula per valori 1, 2, 3,..., $u - 1$ di u e dimostriamo che la medesima è pur vera per il valore u di u. Intanto per questo valore u di u la formula è vera per $n = r + u - 1$, riducendosi in tal caso il secondo membro della medesima a

$$\frac{(x^r - x^{r+u})(x^{r+1} - x^{r+u}) \ldots (x^{r+u-1} - x^{r+u})}{(1 - x)(1 - x^2) \ldots (1 - x^u)} .$$

ossia a

$$x^r\, x^{r+1} \ldots x^{r+u-1} \quad ;$$

mostriamo ora che la detta formula (2), se è vera per tale valore u di u e per il valore n di n, è pur vera per il valore $n+1$ di n. Indichiamo con $\underline{S_{u,r}}$ l'espressione $S_{u,r}$ quando in essa si cangi la n in $n+1$; avremo evidentemente

$$\underline{S_{u,r}} = S_{u,r} + x^{n+1}\, S_{u-1,r} \;,$$

e sostituendo in questa i valori di $S_{u,r}$, $S_{u-1,r}$, che dalla (2) si deducono legittimamente per le supposizioni fatte, abbiamo facendo le riduzioni

$$\underline{S_{u,r}} = \frac{(x^r - x^{n+2})(x^{r+1} - x^{n+2}) \ldots (x^{r+u-1} - x^{n+2})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^u)} \;,$$

la quale formula mostra che la (2) è vera in generale.

Questa formula (2) può scriversi nel seguente modo

$$S_{u,r} = x^{\frac{1}{2}(2r+u-1)u}\, \frac{(1-x^{n-r+1})(1-x^{n-r}) \ldots (1-x^{n-r-u+2})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^u)} \;.$$

3. Facciamo in questa $r = 1$ e poniamo

$$T_u = \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1}) \ldots (1-x^{n-u+1})}{(1-x)(1-x^2) \ldots (1-x^u)} \;, \tag{3}$$

avremo

$$S_{u,1} = x^{\frac{1}{2}u(u+1)}\, T_u .$$

Il coefficiente di x^p in $S_{u,1}$ indica il numero dei modi, coi quali il numero p può ottenersi colla somma di u numeri differenti della serie $1, 2, \ldots n$; tale numero di modi è dato anche dal coefficiente di $x^{p-\frac{1}{2}u(u+1)}$ in T_u. Noi appunto cercheremo il coefficiente di una certa potenza di x in T_u e tale coefficiente indicherà in quanti modi il numero dato da tale potenza accresciuta di $\frac{1}{2}\,u\,(u+1)$ potrà ottenersi colla somma di u differenti numeri della serie proposta.

Passiamo ad applicare il teorema ora dimostrato ai casi, nei quali u sia eguale a 2, 3, 4.

APPLICAZIONE PRIMA

4. Supponiamo $u = 2$ nella (3), sarà

$$T_2 = \frac{(1 - x^n)(1 - x^{n-1})}{(1 - x)(1 - x^2)} \; ; \tag{4}$$

essendo T_2 un polinomio in x di grado $2n - 4$, potremo porre

$$T_2 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n-4} x^{2n-4},$$

nel quale polinomio A_s, per quanto si è detto, indica il numero dei modi coi quali può ottenersi il numero $s + 3$ colla somma di due differenti numeri della serie $1, 2, \ldots n$.

Avremo dunque le seguenti identità

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n-4} x^{2n-4} = \frac{(1 - x^n)(1 - x^{n-1})}{(1 - x)(1 - x^2)} ,$$

dalla ispezione della quale equazione deduciamo dover essere

$$A_r = A_{2n-4-r} , \tag{5}$$

e perciò conosceremo i cofficienti A, quando noi avremo determinato A_0, A_1, $A_2, \ldots A_{n-2}$. Dalla precedente identità si passa a quest' altra

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n-4} x^{2n-4})(1 - x^2) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 - x^{n-1});$$

eseguendo le operazioni, ordinando ed eguagliando i coefficienti delle uguali potenze di x, abbiamo,

$$A_0 = 1 \quad , \quad A_1 = 1 \tag{6}$$

$$A_2 - A_0 = 1, \quad A_3 - A_1 = 1, \ldots A_{n-2} - A_{n-4} = 1 \tag{7}$$

. . . .

Indicando con α un intero positivo minore di 2, le relazioni (6) sono contenute nella

$$A_\alpha = 1 ,$$

e le (7) nella

$$A_r - A_{r-2} = 1 \quad , \qquad 2 \leqq r \leqq n - 2 \ .$$

Poniamo in questa

$$r = 2v + \alpha \ ,$$

per cui si ha

$$A_{2v+\alpha} - A_{2v+\alpha-2} = 1 \ ,$$

e cambiando in questa la v successivamente in 1, 2,..., $v - 1$, v e sommando ed osservando che è $A_\alpha = 1$, si ha

$$A_{2v+\alpha} = v + 1 \ .$$

Riponiamo in questa il valore di v formato con r ed abbiamo

$$A_r = \frac{r + 2 - \alpha}{2} \ .$$

Questa formula è vera non solo per $2 \leqq r \leqq n - 2$, ma anche per $r = 0, 1$, come si può verificare. Siccome α è zero od uno, secondo che r è pari o dispari, così sarà

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^r\right)$$

e però

$$A_r = \frac{2r + 3 + (-1)^r}{4} \ . \tag{8}$$

Per $n - 2 < r \leqq 2n - 4$ si ha per la (5)

$$A_r = n - 2 + r + \frac{2r + 3 + (-1)^r}{4} \ . \tag{9}$$

5. Indichiamo ora con U_r il numero delle combinazioni a due a due coi numeri 1, 2,... n, nelle quali la somma risultante sia minore o al più uguale ad r; sarà

$$U_r = \sum_{s=0}^{s=r-3} A_s \ . \tag{10}$$

Distinguiamo due casi, nel primo supponiamo $r \leqq n+1$ e nel secondo $r > n+1$. Nel primo caso A_s, per i valori che s può assumere, viene dato dalla (8) e però sarà

$$U_r = \frac{1}{4} \sum_{s=0}^{s=r-3} \left[2s + 3 + (-1)^s \right].$$

Rammentiamo le seguenti formule, che più volte avremo occasione di adoperare:

$$\sum_{s=0}^{s=u} s(s+1)....(s+r-1) = \frac{1}{r+1} u(u+1)....(u+r-1)(u+r),$$

$$(\alpha) \qquad \sum_{s=0}^{s=u} 1 = u+1, \quad \sum_{s=0}^{s=u} (-1)^s = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^u\right);$$

in causa di queste avremo

$$(11) \qquad U_r = \frac{1}{4}\left[r(r-2) + \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^r\right) \right], \quad 3 \leqq r \leqq n+1.$$

6. Se poi è $r > n+1$ si avrà

$$U_r = \sum_{s=0}^{s=r-3} A_s = \sum_{s=0}^{s=2n-4} A_s - \sum_{s=r-2}^{s=2n-4} A_s \ ;$$

la prima di queste sommatorie, esprimendo il numero totale delle combinazioni a due a due di n numeri, è uguale a $\frac{1}{2} n(n-1)$; riguardo poi alla seconda sommatoria, osservando che A_s, per i valori di cui s è suscettibile, è per la (5) eguale a A_{2n-4-s} si avrà

$$\sum_{s=r-2}^{s=2n-4} A_s = \sum_{s=r-2}^{s=2n-4} A_{2n-4-s} = \sum_{s=0}^{s=2n-r-2} A_s$$

e quindi per la (10)

$$\sum_{s=r-2}^{s=2n-4} A_s = U_{2n-r+1} \ ;$$

avremo perciò:

$$(12) \qquad U_r = \frac{1}{2} n(n-1) - U_{2n-r+1}\,, \quad n+1 < r \leqq 2n-1\,,$$

e nella quale U_{2n-r+1} verrà calcolata colla formula (11), essendo l' indice di U inferiore a $n+1$.

7. Se nelle (11) e (12) sostituiamo $2v+\alpha$ in luogo di r, $\alpha < 2$, ed osserviamo che appunto per $\alpha < 2$ è sempre $\alpha(\alpha-2) + \frac{1}{2}(1-(-1)^{\alpha}) = 0$, abbiamo le seguenti due formule più comode di quelle per il calcolo:

$$(11)' \qquad U_{2v+\alpha} = v(v+\alpha-1)\,, \quad 2 < 2v+\alpha \leqq n+1$$

$$(12)' \quad U_{2v+\alpha} = \frac{1}{2} n(n-1) - (n-v)(n-v-\alpha), \; n+1 < 2v+\alpha \leqq 2n-1.$$

APPLICAZIONE SECONDA

8. Facendo nella (3) $u=3$, avremo

$$(13) \qquad T_3 = \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})(1-x^{n-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\;;$$

quindi T_3 è un polinomio in x di grado $3n-9$ e potremo però porre

$$(14) \qquad T_3 = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{3n-9}\, x^{3n-9},$$

nel quale polinomio B_s esprime il numero dei modi, coi quali il numero $s+6$ può ottenersi mediante la somma di tre differenti numeri della serie 1, 2,... n.

Dalla (13) si deduce

$$(15) \qquad B_r = B_{3n-9-r}\,.$$

La (13) per le (14) e (4) diviene

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{3n-9}\, x^{3n-9}$$
$$= (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{2n-4}\, x^{2n-4}) \frac{(1-x^{n-2})}{(1-x^3)}\,,$$

e moltiplicando per $1 - x^3$, eseguendo le operazioni ed uguagliando i coefficienti delle uguali potenze di x nei due membri, abbiamo:

$$B_0 = A_0,\ B_1 = A_1,\ B_2 = A_2; \tag{16}$$

$$B_3 - B_0 = A_3,\ B_4 - B_1 = A_4, \ldots,\ B_{n-3} - B_{n-6} = A_{n-3}; \tag{17}$$

$$B_{n-2} - B_{n-5} = A_{n-2} - A_0,\ \ B_{n-1} - B_{n-4} = A_{n-1} - A_1, \ldots, \tag{18}$$
$$B_{2n-4} - B_{2n-7} = A_{2n-4} - A_{n-2};$$

. . . .

8. Indicando con β un numero intero minore di 3, le (16) saranno contenute nella seguente

$$B_\beta = A_\beta;$$

le (17) per $3 \leqq r \leqq n - 3$ sono comprese nella

$$B_r - B_{r-3} = A_r.$$

Ponendo in questa

$$r = 3v + \beta$$

e quindi cambiando successivamente la v in $1, 2, \ldots, v$ e sommando ed osservando che $B_\beta = A_\beta$ si ha:

$$B_{3v+\beta} = \sum_{s=0}^{s=v} A_{3s+\beta},$$

la quale formula è vera anche per $v = 0$, come appare evidentemente e però è vera per tutti i valori interi di $3v + \beta \leq n - 3$. Sostituiamo nella precedente per $A_{3s+\beta}$ il suo valore, che viene dato, per il valore che può assumere $3s + \beta$, dalla (8), ed avremo

$$B_{3v+\beta} = \frac{1}{4} \sum_{s=0}^{s=v} \left[6s + 2\beta + 3 + (-1)^{s+\beta} \right],$$

ed eseguendo le operazioni, badando alle (a) otterremo

$$B_{3v+\beta} = \frac{1}{4}\left[(v+1)(3v+3+2\beta)+\frac{1}{2}(-1)^{\beta}\left(1+(-1)^{v}\right)\right],$$

e riponendo per v il suo valore formato con r si ha

$$B_r = \frac{1}{24}\left[2\,(r+3)^2-2\beta^2+3\,(-1)^{\beta}+3\,(-1)^{r}\right].$$

Ora l' espressione $-2\beta^2+3\,(-1)^{\beta}$ assume il valore 3 per $\beta=0$, ed il valore -5 sia per $\beta=1$, come per $\beta=2$ e siccome β è il resto della divisione di r per 3, così potremo porre

$$-2\beta^2+3\,(-1)^{\beta}=3-8\lambda_r,$$

ove λ_r è uguale a zero o ad uno, secondo che r è, o non è, divisibile per 3. Avremo quindi

$$(19) \qquad B_r = \frac{1}{24}\left[2\,(r+3)^2+3+3\,(-1)^{r}-8\lambda_r\right], \quad r \leqq n-3$$

9. Le formule (18) sono contenute nella seguente

$$B_{n-2+t}-B_{n-5+t}=A_{n-2+t}-A_t,$$

t potendo assumere i valori 0, 1, 2,... $n-2$; e ponendo A_{n-t-2} in luogo di A_{n-2+t}, come permette la (5) si ha:

$$B_{n-2+t}-B_{n-5+t}=A_{n-t-2}-A_t.$$

Cambiando in questa la t in $3v+\beta$, $\beta<3$, e quindi la v successivamente in 0, 1, 2,... v e sommando si ha

$$B_{n+3v+\beta-2}=B_{n+\beta-5}+\sum_{s=0}^{s=v}\left(A_{n-3s-\beta-2}-A_{3s+\beta}\right),$$

e sostituendo in questa i valori delle A dati dalla (8) ed eseguendo le operazioni,

otteniamo

$$B_{n+3v+\beta-2}$$

$$= B_{n+\beta-5} + \frac{1}{4}\left[2(v+1)(n-3v-2\beta-2) + \frac{1}{2}(1+(-1)^v)((-1)^n-1)(-1)^\beta\right].$$

Riponendo in questa per v il suo valore formato con t, si ha

$$B_{n+t-2} = B_{n+\beta-5} + \frac{1}{24}\left[4(t-\beta+3)(n-t-\beta-2) + 3((-1)^\beta + (-1)^t)((-1)^n-1)\right],$$

e ponendo

$$n + t - 2 = r \qquad \text{e però} \qquad n = r - t + 2$$

e quindi $B_{n+\beta-5} = B_{r-t+\beta-3}$ e sostituendo per $B_{r-t+\beta-3}$ il valore, che dalla (19) viene dato, si ha facilmente

$$B_r = \frac{1}{24}\left[2(r+3)^2 + 3 + 3(-1)^r - 8\lambda_r\right] - \frac{1}{8}\left[2(t+2)^2 - 2(\beta-1)^2 + (-1)^t + (-1)^\alpha\right].$$

Si osservi infine che $-2(\beta-1)^2 + (-1)^\beta$ è per i valori 0, 1, 2 di β sempre uguale a -1 e però riscrivendo la precedente e ponendo per t il suo valore $n - r - 2$, si ha

$$(20) \qquad B_r = \frac{1}{24}\left[2(r+3)^2 + 3 + 3(-1)^r - 8\lambda_r\right] - \frac{1}{8}\left[2(r-n+4)^2 - 1 + (-1)^{r+n}\right];$$

questa formula è vera non solo per valori di r tali che sia

$$n - 2 \leqq r \leqq 2n - 4,$$

ma anche per $r = n - 3$, poichè per tale valore di r annullandosi la seconda parte del secondo membro si ricade nella (19).

Si avrà poi il valore di B_r per valori di r tali che sia

$$2n - 4 < r \leqq 3n - 9$$

calcolando colla (19) B_{3n-9-r} e ciò per la (15).

10. Se nelle (19), (20) poniamo

$$r = 6p + \delta \ , \qquad \delta < 6$$

avremo le seguenti più comode al calcolo:

$$(19)' \qquad B_{6p+\vartheta} = 3p^2 + (3+\delta)\,p + B_\vartheta \ , \qquad 6p + \delta \leqq n - 3$$

$$(20)' \quad B_{6p+\vartheta} = -6p^2 + \big(3\,(n-3) - 2\delta\big)\,p + B_\vartheta - \frac{1}{8}\big(2\,(n-4-\delta)^2 - 1 + (-1)^{\vartheta+n}\big),$$

$$n - 3 \leqq 6p + \delta \leqq 2n - 4,$$

e nelle quali la B_ϑ verrà calcolata colla (19) e però saranno per i valori di δ

$$B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 3,\ B_4 = 4,\ B_5 = 5.$$

Le (19)′ somministrano le sei relazioni seguenti

$$(19)'' \qquad \begin{array}{ll} B_{6p} = 3\,p^2 + 3p + 1 & B_{6p+3} = 3p^2 + 6p + 3 \\ B_{6p+1} = 3p^2 + 4p + 1 & B_{6p+4} = 3p^2 + 7p + 4 \\ B_{6p+2} = 3p^2 + 5p + 2 & B_{6p+5} = 3p^2 + 8p + 5 \end{array}$$

e nelle quali l' indice di B deve essere minore o al più uguale a $n - 3$; le (20)′ danno poi le sei seguenti:

$$(20)'' \qquad \begin{aligned} B_{6p} &= -6p^2 + (3n-9)\,p + 1 - \frac{1}{8}\Big(2\,(n-4)^2 - 1 + (-1)^n\Big) \\ B_{6p+1} &= -6p^2 + (3n-11)\,p + 1 - \frac{1}{8}\Big(2\,(n-5)^2 - 1 - (-1)^n\Big) \\ B_{6p+2} &= -6p^2 + (3n-13)\,p + 2 - \frac{1}{8}\Big(2\,(n-6)^2 - 1 + (-1)^n\Big) \\ B_{6p+3} &= -6p^2 + (3n-15)\,p + 3 - \frac{1}{8}\Big(2\,(n-7)^2 - 1 - (-1)^n\Big) \\ B_{6p+4} &= -6p^2 + (3n-17)\,p + 4 - \frac{1}{8}\Big(2\,(n-8)^2 - 1 + (-1)^n\Big) \\ B_{6p+5} &= -6p^2 + (3n-19)\,p + 5 - \frac{1}{8}\Big(2\,(n-9)^2 - 1 - (-1)^n\Big) \end{aligned}$$

e nelle quali l' indice di B deve essere uguale o superiore a $n - 3$ e inferiore o uguale a $2n - 4$.

11. Troviamo ora il numero delle combinazioni a tre a tre dei numeri $1, 2, \ldots n$ e tali che la somma dei tre numeri sia minore o al più uguale ad r; detto U_r tale numero, si avrà

$$(21) \qquad U_r = \sum_{s=0}^{s=r-6} B_s \, .$$

Supponiamo dapprima $r \leqq n + 3$; in tal caso dobbiamo sostituire nella precedente per B_s il valore dato dalla (19) ed eseguendo le operazioni e notando che per il significato di λ_s si ha

$$(22) \qquad \sum_{s=0}^{s=t} \lambda_s = \frac{2t + (t)_3}{3} \, ,$$

ove $(t)_3$ indica il resto più piccolo positivo della divisione di t per 3, avremo

$$(23) \qquad U_r = \frac{1}{144}\left(4r^3 - 30r^2 + 60r - 9\left(1 - (-1)^r\right) - 16\,(r)_3\right) .$$

Se in questa poniamo $r = 6p + \delta$, $\delta < 6$, si ha

$$(23)' \qquad U_{6p+\delta} = p\left(6p^2 + \frac{1}{2}\left(3\,(2\delta - 5)\,p + \delta^2 - 5\delta + 5\right)\right)$$

essendo nullo il termine indipendente da p per i valori che può assumere δ; la (23)' somministra le sei seguenti adatte al calcolo

$$(23)'' \qquad \begin{aligned} U_{6p} &= 6p^3 - \frac{5p\,(3p-1)}{2} \, , & U_{6p+3} &= 6p^3 + \frac{p\,(3p+1)}{2} \\ U_{6p+1} &= 6p^3 - \frac{p\,(9p+1)}{2} \, , & U_{6p+4} &= 6p^3 + \frac{p\,(9p+1)}{2} \\ U_{6p+2} &= 6p^3 - \frac{p\,(3p+1)}{2} \, , & U_{6p+5} &= 6p^3 + \frac{5p\,(3p+1)}{2} \end{aligned}$$

e nelle quali l'indice di U è minore o uguale a $n + 3$.

12. Se poi è

$$n + 3 < r \leqq 2\,n + 2$$

si avrà

$$U_r = \sum_{s=0}^{s=r-6} B_s = \sum_{s=0}^{s=n-3} B_s + \sum_{s=n-2}^{s=r-6} B_s = U_{n+3} + \sum_{s=0}^{s=r-n-4} B_{n-2+s}\ ,$$

nella quale U_{n+3} si calcolerà colla (23). Ponendo nella precedente il valore di B_{n-2+s}, che verrà dato dalla (20) ed eseguendo il calcolo, e sostituendo pure il valore di U_{n+3}, si avrà

$$(24)\quad U_r = \frac{1}{144}\Big[-8r^3 + 12r^2(3n+2) - 36rn(n+3) + 6n(2n^2+9n+10) + 9(-1)^r\big(1-(-1)^n\big) - 16(r)_3\Big]\ ;$$

e facendo in questa $r = 6p + \delta$, $\delta < 6$, si ottiene:

$$(24)'\quad U_{6p+\vartheta} = -12p^3 + 3p^2(3n+2-2\delta) - p\left(\frac{3}{2}n(n+3) - (3n+2)\delta + \delta^2\right) + E_\vartheta$$

essendo

$$E_\vartheta = \frac{1}{144}\Big(-8\delta^3 + 12(3n+2)\delta^2 - 36n(n+3)\delta + 12n^3 + 54n^2 + 60n + 9(-1)^\vartheta\big(1-(-1)^n\big) - 16(\delta)_3\Big)\ .$$

Dalla (24)' deduciamo le sei seguenti:

$$U_{6p} = -12p^3 + 3p^2(3n+2) - p\frac{3}{2}n(n+3) + \frac{1}{24}\left(2n^3 + 9n^2 + 10n + \frac{3}{2}\big(1-(-1)^n\big)\right)$$

$$U_{6p+1} = -12p^3 + 3p^2 \,.\, 3n - p\left(\frac{3}{2}n(n+3) - 3n - 1\right) + \frac{1}{24}\left(2n^3 + 3n^2 - 2n - \frac{3}{2}\big(1-(-1)^n\big)\right)$$

$$U_{6p+2} = -12p^3 + 3p^2(3n-2) - p\left(\frac{3}{2}n(n+3) - 6n\right) + \frac{1}{24}\left(2n^3 - 3n^2 - 2n + \frac{3}{2}\big(1-(-1)^n\big)\right)$$

$$(24)''\quad U_{6p+3} = -12p^3 + 3p^2(3n-4) - p\left(\frac{3}{2}n(n+3) - 9n + 3\right) + \frac{1}{24}\left(2n^3 - 9n^2 + 10n - \frac{3}{2}\big(1-(-1)^n\big)\right)$$

$$U_{6p+4} = -12p^3 + 3p^2(3n-6)$$
$$-p\left(\frac{3}{2}n(n+3) - 12n + 8\right) + \frac{1}{24}\left(2n^3 - 15n^2 + 34n + \frac{3}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right) - 1$$
$$U_{6p+5} = -12p^3 + 3p^2(3n-8)$$
$$-p\left(\frac{3}{2}n(n+3) - 15n + 15\right) + \frac{1}{24}\left(2n^3 - 21n^2 + 70n - \frac{3}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right) - 3$$

13. Se poi infine è

$$2n + 2 < r \leqq 3n - 3$$

avremo

$$U_r = \sum_{s=0}^{s=r-6} B_s = \sum_{s=0}^{s=3n-9} B_s - \sum_{s=r-5}^{s=3n-9} B_s \ ;$$

ma per essere

$$\sum_{s=0}^{s=3n-9} B_s = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \ ,$$

$$\sum_{s=r-5}^{s=3n-9} B_s = \sum_{s=r-5}^{s=3n-9} B_{3n-9-s} = \sum_{s=0}^{s=3n-r-4} B_s = U_{3n-r+2} \ ,$$

sarà

$$U_r = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} - U_{3n-r+2} \ ,$$

ove U_{3n-r+2}, per il valore che ha r, si calcolerà colla (23).

APPLICAZIONE TERZA

14. Consideriamo da ultimo il caso di $s = 4$ nella (3) e poniamo

$$T_4 = C_0 + C_1 x + C_2 x_2 + \ldots + C_{4n-16} x^{4n-16},$$

ove C_s indica in quanti modi il numero $s + 10$ può decomporsi in quattro parti

differenti coi numeri 1, 2,... n. Avremo al solito la seguente identità:

$$(C_0+C_1x+C_2x^2+...+C_{4n-16}x^{4n-16})(1-x^4)=(B_0+B_1x+...+B_{3n-9}x^{3n-9})(1-x^{n-3}),$$

ed uguagliando i coefficienti delle uguali potenze di x avremo:

$$(25) \qquad C_0 = B_0, \quad C_1 = B_1, \quad C_2 = B_2, \quad C_3 = B_3$$

$$(26) \qquad C_4 - C_0 = B_4, \ C_5 - B_1 = B_5, ..., \ C_{n-4} - B_{n-8} = B_{n-4}$$

$$(27) \qquad C_{n-3} - C_{n-7} = B_{n-3} - B_0, \ C_{n-2} - C_{n-6} = B_{n-2} - B_1, \ldots, \\ C_{3n-9} - C_{3n-13} = B_{3n-9} - B_{2n-6}$$

. . . .

15. Le (25) sono contenute nella

$$(28) \qquad C_\gamma = B_\gamma, \quad \gamma < 4,$$

le (26) nella

$$C_r - C_{r-4} = B_r, \quad 3 < r \leqq n - 4;$$

facendo in questa

$$r = 4v + \gamma, \quad \gamma < 4$$

e poi cambiando la v successivamente in 1, 2,..., v e sommando si ha per la (28)

$$C_{4v+\gamma} = \sum_{s=0}^{s=v} B_{4s+\gamma},$$

formula che è vera anche per $v = 0$ e quindi per i valori di $4v + \gamma \leqq n - 4$. Sostituiamo nella medesima per $B_{4s+\gamma}$ il valore dato dalla (19) ed eseguendo le operazioni abbiamo, dinotando con $(r)_u$ il più piccolo resto positivo della divisione di r per u,

$$(29) \quad 9\, C_{4v+\gamma} = 4v^3 + 3v^2(\gamma + 5) + \frac{3v}{8}\left(2\gamma^2 + 20\gamma + 45 + 3\,(-1)^\gamma\right) \\ + \frac{1}{8}\left(6\gamma^2 + 36\gamma + 47 + 9\,(-1)^\gamma\right) - (v + \gamma)_3 + (\gamma + 2)_3 .$$

Poniamo in questa $v = 3p + \beta$, $\beta < 3$, ed avremo:

$$(30) \qquad C_{12p+4\beta+\gamma} = 12p^3 + 3p^2(4\beta + \gamma + 5)$$
$$+ p\left(4\beta^2 + 2\beta(\gamma + 5) + \frac{1}{8}(2\gamma^2 + 20\gamma + 45 + 3(-1)^\gamma)\right) + C_{4\beta+\gamma},$$

essendo

$$(31) \quad C_{4\beta+\gamma} = \frac{1}{9}\left[4\beta^3 + 3\beta^2(\gamma + 5) + \frac{3\beta}{8}\left(2\gamma^2 + 20\gamma + 45 + 3(-1)^\gamma\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\left(6\gamma^2 + 36\gamma + 47 + 9(-1)^\gamma\right) - (\beta + \gamma)_3 + (\gamma + 2)_5\right].$$

Dalla formula (30) deduciamo le seguenti formule

$$(32) \quad \begin{array}{ll}
C_{12p} = 12p^3 + 15p^2 + 6p + 1 & C_{12p+6} = 12p^3 + 33p^2 + 30p + 6 \\
C_{12p+1} = 12p^3 + 18p^2 + 8p + 1 & C_{12p+7} = 12p^3 + 36p^2 + 35p + 11 \\
C_{12p+2} = 12p^3 + 21p^2 + 12p + 2 & C_{12p+8} = 12p^3 + 39p^2 + 42p + 15 \\
C_{12p+3} = 12p^3 + 24p^2 + 15p + 3 & C_{12p+9} = 12p^3 + 42p^2 + 48p + 18 \\
C_{12p+4} = 12p^3 + 27p^2 + 20p + 5 & C_{12p+10} = 12p^3 + 45p^2 + 56p + 23 \\
C_{12p+5} = 12p^3 + 30p^2 + 24p + 6 & C_{12p+11} = 12p^3 + 48p^2 + 63p + 27
\end{array}$$

16. Le equazioni (27) sono comprese nella seguente

$$C_{n+t-3} - C_{n+t-7} = B_{n+t-3} - B_t$$

potendo t assumere i valori $0, 1, 2, \ldots, 2n - 6$; noi però supporremo che t sia solo suscettibile dei valori $0, 1, 2, \ldots, n - 3$ e per tale ipotesi B_{n+t-3} sarà dato dalla (20), mentre B_t verrà dato dalla (19). Cambiando nella precedente la t in $4v + \gamma$, $\gamma < 4$ e quindi la v successivamente in $0, 1, 2, \ldots, v$ e sommando, otteniamo

$$C_{4v+\gamma+n-3} = C_{n+\gamma-7} + \sum_{s=0}^{s=v}\left(B_{4s+n+\gamma-3} - B_{4s+\gamma}\right),$$

ma si trova per la sostituzione dei valori dei B fatta nel modo sopra dichiarato

$$B_{4s+n+\gamma-3} - B_{4s+\gamma} = \frac{1}{3}\left[-12s(s+1) + 2s(n - 3\gamma) + F_\gamma + \lambda_{s+\gamma} - \lambda_{s+n+\gamma}\right],$$

ove è

$$(33) \qquad 8\, F_\gamma = 2n^2 + 4\,(n - 6)\,\gamma - 6\gamma^2 - 21 - 3\,(-1)^{n+\gamma}\ ;$$

perciò sostituendo ed eseguendo le operazioni si trova

$$(34) \qquad C_{4v+\gamma+n-3} = C_{n+\gamma-7}$$
$$+ \frac{1}{3}\Big[- 4v\,(v + 1)(v + 2) + v\,(v + 1)(n - 3\gamma) + F_\gamma\,(v + 1) + G_{v,\gamma}\Big]\,,$$

nella quale è:

$$(35) \qquad G_{v,\gamma} = \sum_{s=0}^{s=v} \Big(\lambda_{s+\gamma} - \lambda_{s+n+\gamma}\Big)$$
$$= \frac{1}{3}\Big((\gamma + v)_3 + (n + \gamma + 2)_3 - (\gamma + 2)_3 - (n + v + \gamma)_3\Big)$$

Ponendo poi nella (34)

$$v = 3p + \beta\,, \quad \beta < 3$$

e facendo le riduzioni si ha:

$$(36) \qquad C_{12p+4\beta+\gamma+n-3} = C_{n-3+4\beta+\gamma}$$
$$+ \Big[-36p^3 + 3(n - 12 - 3\gamma - 12\beta)p^2 + p\Big(-12\beta^2 + 2\beta(n - 12 - 3\gamma) + n + F_\gamma - 8 - 3\gamma\Big)\Big]$$

essendo

$$(37) \qquad C_{n-3+4\beta+\gamma} = C_{n+\gamma-7}$$
$$+ \frac{1}{3}\Big(- 4\beta^3 + (n - 12 - 3\gamma)\,\beta^2 + \beta\,(n + F_\gamma - 8 - 3\gamma) + G_{\beta,\gamma} + F_\gamma\Big)\,.$$

L'equazione (36), dando a β e γ i valori di cui sono suscettibili, ed avendo riguardo alla (37), somministra 12 equazioni; la medesima vale per valori $0, 1, \ldots, n - 3$ di $12p + 4\beta + \gamma$ e però per valori dell'indice di C a cominciare da $n - 3$ fino a $2n - 6$, esso compreso. Quando poi l'indice di C è maggiore di $2n - 6$ noi troveremo il valore di C colla formula

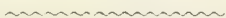
$$C_r = C_{4n-16-r}\,.$$

SULLA

TEORIA DELL' ATTRAZIONE DEGLI ELLISSOIDI

MEMORIA

DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI

(Presentata nella XIX Adunanza 8 Aprile 1880).

Come già osservò il non mai abbastanza deplorato collega nostro Domenico Chelini, nella sua egregia Memoria *Sulla legge onde un ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione* (Vol. I, Serie II delle Memorie di quest' Accademia, 1861), le molteplici soluzioni date dai geometri al classico problema dell' attrazione degli ellissoidi si possono distinguere in dirette ed indirette. Dirette furono naturalmente le soluzioni più antiche (di Legendre, Laplace, Poisson,......), come quelle che, intraprese quando non era ancora sufficientemente chiarita la teoria generale dell' attrazione newtoniana, dovevano necessariamente risolversi in procedimenti, più o meno complicati, d' integrazione. Che se più tardi vennero proposte nuove soluzioni dello stesso genere, fra le quali mirabile è quella di Dirichlet, che ha dato origine a tante e così belle ricerche, si può affermare che esse hanno arricchito di nuovi e poderosi stromenti il calcolo integrale, più che non abbiano promossa la teoria dell' attrazione degli ellissoidi, in sè stessa considerata. All' incontro le soluzioni indirette di Ivory e di Gauss hanno grandemente contribuito a svelarne l' intima natura, e le belle ricerche di Chasles l' hanno illuminata per guisa da non lasciarne quasi più alcuna parte nell' ombra.

Con tutto ciò l' argomento è lungi dall' essere esaurito. Anche prescindendo dalla possibilità di applicare i risultati già noti a sistemi ellissoidali diversi da quelli che vennero fin quì considerati, è certo che l' esposizione della teoria di cui parliamo presenta ancora adesso alcune difficoltà, le quali sono attestate dai tentativi stessi che si fanno ogni giorno per perfezionarla e per renderla di più agevole accesso. Per non parlare che di lavori italiani, mi basti accennare la già citata Memoria del Chelini, l' elegante metodo esposto dal Betti nella sua Monografia

del 1865 sulle forze newtoniane e riprodotto con maggiori svolgimenti nella sua recente Opera sullo stesso soggetto (Pisa 1879) e le importanti ricerche del Prof. Dini (negli Atti della R. Accademia dei Lincei, 1875). Non farà dunque meraviglia ch' io pure proponga un nuovo metodo per trattare il problema in discorso, metodo il quale non solo appartiene alla classe degli indiretti, ma si può anzi dire il più indiretto possibile, perchè ogni operazione d' effettiva integrazione ne è interamente eliminata. Questo metodo si fonda sull' uso delle coordinate ellittiche, il quale, mentre è omai famigliare a chiunque sia appena mezzanamente versato negli studii matematici, non è mai stato direttamente invocato come base della ricerca, ed è pur nondimeno, a mio credere, non solo giustificato, ma suggerito spontaneamente dal fatto che in ogni questione di fisica matematica giova introdurre, fin dal principio, quel sistema di variabili che meglio risponde alle condizioni geometriche della questione stessa. Si vedrà infatti che con queste coordinate la deduzione delle formole generali per l' attrazione degli ellissoidi riesce speditissima.

Il metodo quì tenuto potrebbe servire eziandio alla trattazione di problemi analoghi per l' iperboloide: ma io non sono entrato in cotesto campo, ed ho preferito invece dare uno svolgimento abbastanza completo alla teoria dei sistemi ellissoidali, comprendendovi alcune distribuzioni di massa che non sono state ancora considerate e che danno luogo tuttavia a risultati molto semplici.

Una sola osservazione debbo aggiungere, per opportuna norma del lettore. Il citato scritto di Dini mette in evidenza la necessità di completare le dimostrazioni ordinarie, quando si vogliano assumere, per rappresentare le densità od altro, funzioni della specie più generale fra quelle per le quali le formole da dimostrarsi conservano il loro significato. Per non deviare troppo dal mio scopo principale, io non mi sono addentrato in questo genere di considerazioni, cosicchè le funzioni indeterminate che s' incontreranno nel seguito debbono senz' altro ritenersi dotate (oltrechè dei caratteri esplicitamente dichiarati) di tutti quelli, come l' integrabilità, la derivabilità, od altro, che sono necessarii per la legittimità delle operazioni eseguite sovr' esse. L' unico modo di evitare le complicazioni risultanti dalla rimozione *a priori* di questi vincoli è appunto quello di cui ha dato l' esempio il prof. Dini, cioè di riprendere in esame i singoli risultati ottenuti coi metodi ordinarii e di stabilire, volta per volta, il grado di generalità delle funzioni indeterminate che vi figurano.

§ I. Formole preliminari.

È noto che le tre radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dell' equazione in λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

sono reali e, supponendo $a > b > c$, limitate nel modo seguente

$$\infty > \lambda_1 > -c^2 > \lambda_2 > -b^2 > \lambda_3 > -a^2.$$

È noto inoltre che, ponendo

$$F(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda),$$

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

si ha

$$(1) \qquad \Delta_2\varphi = 4 \sum_i \frac{\sqrt{F(\lambda_i)}}{f'(\lambda_i)} \frac{\partial}{\partial\lambda_i} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i} \sqrt{F(\lambda_i)} \right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

dove φ è una funzione qualunque di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e dove $f'(\lambda_i)$ è il valore che prende $f'(\lambda)$ per $\lambda = \lambda_i$, cioè

$$f'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3), \quad \text{etc.}$$

Propriamente delle tre quantità

$$F(\lambda_1), \quad F(\lambda_2), \quad F(\lambda_3)$$

la prima e la terza sono positive, mentre la seconda è negativa, cosicchè d' ordinario si modifica la precedente formola (1) introducendovi

$$\sqrt{-F(\lambda_2)} \qquad \text{invece di} \qquad \sqrt{F(\lambda_2)}\ ;$$

nel qual modo il secondo termine della formola, cioè il termine corrispondente ad $i = 2$, acquista segno negativo. Ma per lo scopo nostro è preferibile tenere $\Delta_2\varphi$ sotto la forma precedente, nella quale la simmetria è perfetta e nella quale d'altronde l' immaginarietà non è che apparente.

Ciò premesso assumiamo per φ una funzione qualunque dell' argomento

$$\mu = \Lambda f(\lambda),$$

dove le quantità λ e Λ sono da considerarsi, per ora, come parametri, indipendenti dalle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. In tale ipotesi si trova facilmente

$$\sqrt{F(\lambda_i)} \frac{\partial}{\partial\lambda_i} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i} \sqrt{F(\lambda_i)} \right\} = \frac{\mu^2\varphi''(\mu)\, F(\lambda_i)}{(\lambda - \lambda_i)^2} - \frac{\mu\,\varphi'(\mu)\, F'(\lambda_i)}{2\,(\lambda - \lambda_i)}$$

e quindi

$$\Delta_2\varphi = 4\mu^2\varphi''(\mu)\sum\frac{F(\lambda_i)}{(\lambda-\lambda_i)^2 f'(\lambda_i)} - 2\mu\,\varphi'(\mu)\sum\frac{F'(\lambda_i)}{(\lambda-\lambda_i)f'(\lambda_i)}.$$

Ora dalla teoria delle frazioni razionali si hanno le due identità

$$\frac{F'(\lambda)}{f(\lambda)} = \sum\frac{F'(\lambda_i)}{(\lambda-\lambda_i)f'(\lambda_i)},$$

$$\frac{F(\lambda)}{f(\lambda)} = 1 + \sum\frac{F(\lambda_i)}{(\lambda-\lambda_i)f'(\lambda_i)},$$

dalla seconda delle quali, derivata rispetto a λ, si deduce quest' altra identità:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{F(\lambda)}{f(\lambda)}\right) = -\sum\frac{F(\lambda_i)}{(\lambda-\lambda_i)^2 f'(\lambda_i)};$$

si ha dunque

$$\Delta_2\varphi = -4\mu^2\varphi''(\mu)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\Lambda F(\lambda)}{\mu}\right) - 2\varphi'(\mu)\Lambda F'(\lambda).$$

Se fra i due parametri λ e Λ si pone la relazlone

$$\Lambda F(\lambda) = 1,$$

vale a dire se si assume

$$\mu = \frac{f(\lambda)}{F(\lambda)}, \tag{2}$$

la precedente espressione di $\Delta_2\varphi$ diventa

$$\Delta_2\varphi = 4\left\{\frac{\partial\varphi'(\mu)}{\partial\lambda} - \frac{\varphi'(\mu)F'(\lambda)}{2\,F(\lambda)}\right\}$$

o, più semplicemente,

$$\Delta_2\varphi = 4\sqrt{F(\lambda)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\varphi'(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\right\}.$$

Quindi, supponendo che la quantità $\phi'(\mu)$ si mantenga finita per $\lambda=\infty$, cioè per $\mu=1$, si ha

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\Delta_2\phi(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\,d\lambda=-\frac{4\phi'(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\,. \tag{3}$$

Poniamo ora

$$U=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\phi(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\,.$$

Se il limite inferiore λ è costante rispetto alle variabili λ_1, λ_2, λ_3, l'equazione (3) equivale a quest' altra

$$\Delta_2 U=-\frac{4\phi'(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\,. \tag{3$_a$}$$

Se invece il detto limite è funzione delle variabili, l'espressione di $\Delta_2 U$ è differente. Per non deviare dallo scopo nostro, supponiamo che il limite inferiore λ dell' integrale U sia $=\lambda_1$, supponiamo cioè che si abbia

$$U=\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\phi(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\,.$$

In tale ipotesi si ha

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda_1}=\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\frac{\phi(0)}{\sqrt{F(\lambda_1)}}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{\partial U}{\partial\lambda_1}\sqrt{F(\lambda_1)}\right\}=\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left\{\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_1}\sqrt{F(\lambda_1)}\right\}\frac{\partial\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\left\{\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_1}\right\}\lambda=\lambda_1\,,$$

mentre per $i = 2, 3$ si ha invece

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left\{\frac{\partial U}{\partial\lambda_i}\sqrt{F(\lambda_i)}\right\} = \int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left\{\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_i}\sqrt{F(\lambda_i)}\right\}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}},$$

epperò (1)

$$\Delta_2 U = \int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\Delta_2\phi(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\,d\lambda - \frac{4\sqrt{F(\lambda_1)}}{f'(\lambda_1)}\left\{\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_1}\right\}_{\lambda=\lambda_1}.$$

Ma

$$\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_1} = -\,\phi'(\mu)\,\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{F(\lambda)},$$

donde

$$\left\{\frac{\partial\phi(\mu)}{\partial\lambda_1}\right\}_{\lambda=\lambda_1} = -\,\frac{\phi'(0)f'(\lambda_1)}{F(\lambda_1)};$$

quindi

$$\Delta_2 U = \int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\Delta_2\phi(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\,d\lambda + \frac{4\,\phi'(0)}{\sqrt{F(\lambda_1)}}.$$

Ora l' equazione (3), che vale qualunque sia il limite inferiore λ, dà, per $\lambda = \lambda_1$,

$$\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\Delta_2\phi(\mu)}{\sqrt{F(\lambda)}}\,d\lambda = -\,\frac{4\,\phi'(0)}{\sqrt{F(\lambda_1)}};$$

dunque, in questa stessa ipotesi $\lambda = \lambda_1$, si ha

$$(3)_b \qquad \Delta_2 U = 0.$$

Quando dunque il limite λ dell' integrale U è $= \lambda_1$, U è una funzione di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che soddisfa all' equazione di LAPLACE. Quando invece il detto limite è costante, U è ancora una funzione di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ma questa funzione soddisfa all' equazione $(3)_a$, il cui secondo membro dipende dalle variabili e dal valor costante del limite.

Stabiliamo, per semplicità, che il valore costante del limite inferiore λ sia lo zero e designiamo con μ_0 il valore μ corrispondente a $\lambda = 0$. Ponendo in tale ipotesi

$$V = \pi abc U ,$$

cioè

$$V = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\varphi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} , \tag{4}$$

possiamo concludere che questa funzione V ha le proprietà seguenti:

1°) Se vi si pone il limite inferiore $\lambda = \lambda_1$, si ha

$$\Delta_2 V = 0; \tag*{$(4)_b$}$$

2°) Se vi si pone il detto limite $\lambda = 0$, si ha

$$\Delta_2 V = - 4\pi \varphi'(\mu_0). \tag*{$(4)_a$}$$

§ II. Funzione potenziale d' un ellissoide stratificato omoteticamente.

Veniamo ora all' interpretazione dei risultati precedenti dal punto di vista della teoria del potenziale.

Essendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le radici dell' equazione in λ

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 ,$$

ed avendo μ il valore (2), ha luogo l' identità

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} , \tag{5}$$

donde

$$(5)_0 \qquad \mu_0 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Quest' ultima equazione rappresenta la superficie d'un ellissoide i cui semi-assi sono

$$a\sqrt{1-\mu_0}, \qquad b\sqrt{1-\mu_0}, \qquad c\sqrt{1-\mu_0},$$

e che è quindi omotetico (*) a quello, che per brevità designeremo con E, la cui superficie è rappresentata dall' equazione $\mu_0 = 0$, cioè

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

In base a quanto precede, la funzione

$$(4)_0 \qquad V_0 = \pi abc \int_0^\infty \frac{\Phi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}},$$

che soddisfa all' equazione differenziale $(4)_a$, possiede una delle proprietà caratteristiche della funzione potenziale interna d'una massa stratificata per ellissoidi omotetici all'ellissoide E, in guisa che allo strato individuato dal valore μ_0 del parametro che entra nell' equazione $(5)_0$ corrisponda la densità

$$(6) \qquad k = \Phi'(\mu_0).$$

Affinchè l' altra funzione

$$(4)_1 \qquad V_1 = \pi abc \int_{\lambda_1}^\infty \frac{\Phi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}},$$

che soddisfa all' equazione di LAPLACE, possa essere la funzione potenziale esterna della stessa massa, bisogna innanzi tutto che quando il punto esterno $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

(*) Per brevità diciamo *omotetico* invece di *omotetico e concentrico*. Avremo occasione più tardi di considerare ellissoidi omotetici ma non concentrici; sarà sempre facile al lettore di rilevare il senso esatto della frase.

si accosta alla superficie terminale di questa massa, la variabile λ_1, che funge anche da limite inferiore, tenda verso zero, giacchè altrimenti le due funzioni V_0 e V_1 non avrebbero gli stessi valori sulle due faccie della detta superficie. Dunque la superficie terminale della massa dev' essere quella dell' ellissoide E, il quale appartiene tanto alla serie degli ellissoidi omofocali (λ_1) quanto a quella degli ellissoidi omotetici (μ_0).

È da osservare che le limitazioni relative ai valori delle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ danno

$$\lambda - \lambda_1 < \lambda + c^2, \quad \lambda - \lambda_2 < \lambda + b^2, \quad \lambda - \lambda_3 < \lambda + a^2,$$

talchè le tre frazioni

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda + c^2}, \qquad \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda + b^2}, \qquad \frac{\lambda - \lambda_3}{\lambda + a^2}$$

sono positive e minori dell' unità se i loro termini sono positivi. Ora il denominatore della prima frazione e ambidue i termini delle altre due sono sempre positivi per $\lambda \geqq 0$. Quanto al numeratore della prima frazione, $\lambda - \lambda_1$, esso non diventa mai negativo nei due integrali V_0 e V_1, perchè nel primo integrale il valore costante di λ_1 è necessariamente negativo (come quello che si riferisce ad un punto interno ad E) mentre il valor variabile di λ è sempre positivo; e nel secondo integrale il valor costante di λ_1 è bensì positivo (come quello che si riferisce ad un punto esterno ad E), ma è sempre superato dal valor variabile di λ. Dunque tanto nell' uno quanto nell' altro integrale la quantità μ, che è il prodotto delle tre frazioni precedenti, non esce mai dall' intervallo fra 0 ed 1, ch' essa percorre tutto, epperò qualunque sia la legge con cui varia la densità $\varphi'(\mu_0)$ da strato a strato (purchè sia rappresentabile da una funzione suscettibile d' integrazione) è sempre possibile determinare la funzione $\varphi(\mu)$ che le corrisponde.

Cerchiamo ora il limite del prodotto

$$V_1 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

quando il punto (xyz) si allontana indefinitamente. Scrivendo l' equazione dell' ellissoide (λ_1) sotto la forma

$$\frac{x^2}{1 + \frac{a^2}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{1 + \frac{b^2}{\lambda_1}} + \frac{z^2}{1 + \frac{c^2}{\lambda_1}} = \lambda_1 \; ,$$

si riconosce immediatamente che il rapporto

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\lambda_1}$$

tende all' unità coll' indefinito allontanarsi del punto (xyz). Invece del limite sopraddetto si può dunque considerare quello del prodotto $V_1 \sqrt{\lambda_1}$ per $\lambda_1 = \infty$. Ora ponendo $\lambda = \varkappa \lambda_1$, dove $\varkappa$ è una nuova variabile, si trova

$$V_1 \sqrt{\lambda_1} = \pi abc \int_1^\infty \frac{\varphi(\mu)\, d\varkappa}{\sqrt{\left(\varkappa + \frac{a^2}{\lambda_1}\right)\left(\varkappa + \frac{b^2}{\lambda_1}\right)\left(\varkappa + \frac{c^2}{\lambda_1}\right)}},$$

dove

$$\mu = \frac{(\varkappa - 1)\left(\varkappa - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\left(\varkappa - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)}{\left(\varkappa + \frac{a^2}{\lambda_1}\right)\left(\varkappa + \frac{b^2}{\lambda_1}\right)\left(\varkappa + \frac{c^2}{\lambda_1}\right)},$$

epperò

$$\lim (V_1 \sqrt{\lambda_1})_{\lambda_1 = \infty} = \pi abc \int_1^\infty \varphi\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \varkappa^{-\frac{3}{2}} d\varkappa .$$

Indicando con M il limite cercato e ponendo

$$1 - \frac{1}{\varkappa} = \mu$$

si ha quindi

$$M = \pi abc \int_0^1 \frac{\varphi(\mu) d\mu}{\sqrt{1 - \mu}} .$$

Se questa quantità M è finita, come supporremo, essa deve coincidere colla quantità totale di materia cui è dovuta la funzione potenziale V.

D' altronde essendo

$$\frac{4}{3}\pi abc\,(1-\mu_0)^{\frac{3}{2}}$$

il volume dell' ellissoide (μ_0), è

$$2\pi abc\sqrt{1-\mu_0}\,d\mu_0$$

il volume dello strato compreso fra esso e l' ellissoide omotetico contiguo $(\mu_0+d\mu_0)$; dunque la quantità totale della materia di densità variabile (6) che riempie l' ellissoide E è data da

$$2\pi abc\int_0^1 \phi'(\mu_0)\sqrt{1-\mu_0}\,d\mu_0\ ,$$

ossia, scrivendo μ in luogo di μ_0 ed integrando per parti,

$$\pi abc\int_0^1 \frac{\phi(\mu)d\mu}{\sqrt{1-\mu}}-2\pi abc\phi(0)\ .$$

Il confronto di quest' espressione colla (7) mostra che, se non è $\phi(0)=0$, vi deve essere una porzione

$$(7)_0 \qquad m=2\pi abc\phi(0)$$

della massa totale M non distribuita nel modo che fin quì si è supposto.

Per ispiegare questo fatto, consideriamo le derivate della funzione V. Dando uno spostamento infinitesimo al punto, interno od esterno ad E, cui si riferiscono le due funzioni V_0, V_1, si ha

$$\delta V^0=\pi abc\int_0^\infty \frac{\phi'(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\,\delta\mu\ ,$$

$$\delta V_1=\pi abc\int_{\lambda_1}^\infty \frac{\phi'(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\,\delta\mu-\pi abc\,\frac{\phi(0)\delta\lambda_1}{\sqrt{F(\lambda_1)}}\ .$$

Ma chiamando δn la projezione del detto spostamento sulla normale esterna all' ellissoide (λ_1) nel punto cui lo spostamento si riferisce, e p la distanza del centro dal piano tangente all' ellissoide anzidetto nel punto stesso, si ha

$$\delta\lambda_1 = 2p\delta n \, ,$$

talchè si può scrivere

$$\delta V_1 = \pi abc \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\phi'(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} \delta\mu - 2\pi \frac{abc}{\sqrt{F(\lambda_1)}} \phi(0)p\delta n \, .$$

Da questo valore, confrontato con quello di δV_0, risulta che, per $\lambda_1 = 0$, le derivate di V_0 e di V_1 prese in ogni direzione tangente all' ellissoide E coincidono fra loro, mentre quelle prese nella direzione normale differiscono fra loro di $-2\pi\phi(0)p$, talchè si ha

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_0} + \frac{\partial V_1}{\partial n_1} = -2\pi\phi(0)p \, ,$$

n_0, n_1 essendo le direzioni delle normali, interna ed esterna, erette in quel punto della superficie dell' ellissoide E nel quale il piano tangente ha la distanza p dal centro. Dunque alla superficie del detto ellissoide esiste una distribuzione di materia, la cui densità superficiale è data da

$$(6)_0 \qquad h = \frac{1}{2} \phi(0) \, p \, .$$

La massa totale di questa distribuzione è

$$\int h d\sigma = \frac{1}{2} \phi(0) \int p d\sigma$$

dove $d\sigma$ è un elemento di superficie dell' ellissoide E, e l' integrazione s' estende a tutta la superficie. E siccome l' integrale $\int p d\sigma$ rappresenta evidentemente il triplo del volume dell' ellissoide E, così si ha

$$\int h d\sigma = 2\pi abc\phi(0) = m.$$

Dunque la massa m, che si deve aggiungere a quella stratificata omoteticamente nell' ellissoide E, per costituire la massa M cui è dovuta la funzione potenziale V, trovasi distribuita sulla superficie dello stesso ellissoide E, colla densità variabile $(6)_0$ (*).

§ III. Funzione potenziale d' uno strato ellissoidale in equilibrio.

Si può facilmente separare la parte della funzione potenziale V che spetta alla distribuzione superficiale di massa m. Infatti rappresentando con $k\,(\mu_0)$ la densità variabile della distribuzione a tre dimensioni e ponendo

$$\psi(\mu) = \int_0^\mu k(\mu) d\mu = \phi(\mu) - \phi(0) \ ,$$

donde

$$k\,(\mu_0) = \psi'(\mu_0), \quad \psi(0) = 0 \ ,$$

si può, in luogo di

$$V = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\phi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} \ ,$$

scrivere

$$V = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\psi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \pi abc \phi(0) \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} \ ,$$

(*) Propriamente non si sono in questo § verificate *tutte* le proprietà caratteristiche della funzione potenziale: ma abbiamo, per brevità, ommessi tutti gli svolgimenti che non sono peculiari al metodo quì tenuto e che si possono fare nel modo ordinario.

ovvero $(7)_o$

$$V = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\psi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{m}{2} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} .$$

La funzione

$$v = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\psi(\mu) d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}$$

rappresenta in tal modo la funzione potenziale della massa

$$M - m = \pi abc \int_0^1 \frac{\psi(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu}} ,$$

stratificata omoteticamente nell' ellissoide E, colla densità variabile

$$k = \psi'(\mu_o) ;$$

mentre la funzione

$$u = \frac{m}{2} \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} \tag{8}$$

rappresenta la funzione potenziale della massa m distribuita alla superficie dell' ellissoide E, colla densità variabile $[(6)_o, (7)_o]$

$$h = \frac{mp}{4\pi abc} . \tag{8_a}$$

Naturalmente si deve porre, tanto in u quanto in v, il limite inferiore $\lambda = \lambda_1$ pei punti esterni ed $= 0$ pei punti interni all' ellissoide E.

La funzione u è costante pei punti posti alla superficie dell' ellissoide E e pei punti interni, cosicchè la massa m, cui essa è dovuta, è distribuita *in equilibrio* sulla detta superficie, e le superficie di livello esterne, relative a tale distribuzione, sono quelle degli ellissoidi omofocali ed esterni ad E.

Indicando con δn la projezione sulla normale interna all' ellissoide (μ_0) di uno spostamento infinitesimo qualunque del punto in cui è eretta la normale stessa, si ha

$$2\delta n = p\delta\mu_0 ,$$

dove p è la distanza del centro dal piano tangente nel detto punto e $\mu_0 + \delta\mu_0$ è il parametro dell' ellissoide omotetico che passa per il punto dopo lo spostamento. Per $\mu_0 = 0$ si ha $(8)_a$

$$h\delta\mu_0 = \frac{m}{2\pi abc}\,\delta n ,$$

epperò, designando con ε un infinitesimo e ponendo

$$k_0 = \frac{m}{2\pi abc\varepsilon} ,$$

si può dire che la distribuzione superficiale di densità variabile h sull' ellissoide E equivale ad una distribuzione *uniforme* della massa m nell' involucro omotetico infinitamente sottile compreso fra l' ellissoide E $(\mu_0 = 0)$ e l' ellissoide $(\mu_0 = \varepsilon)$, distribuzione la cui densità costante k_0 è infinitamente grande se m è quantità finita.

In virtù di tale equivalenza sparisce ogni essenziale differenza di natura fra le distribuzioni delle due masse $M—m$ ed m: quest' ultima si può considerare come formante uno strato omotetico elementare, che circonda tutti gli strati elementari onde si compone la massa $M—m$. Il solo divario è che la massa di questo strato terminale è finita anzichè infinitesimale.

Le proprietà della distribuzione ellissoidale in equilibrio sono notissime: è tuttavia necessario che ci tratteniamo alcun poco sovr' esse, in vista delle applicazioni che dovremo farne più tardi.

Poichè le superficie degli ellissoidi omofocali (λ_1) sono superficie di livello rispetto alla massa m, distribuita in equilibrio sull' ellissoide E, questa massa può essere *riportata*, con parità di funzione potenziale esterna, sopra una qualunque di queste superficie omofocali, sì esterne che interne a quella dell' ellissoide E. La

legge della densità, per ciascuno di tali riporti, è sempre quella espressa dalla formola $(8)_a$; vale a dire che designando con

$$a',\ b',\ c',\ p',\ h'$$

quantità analoghe alle

$$a,\ b,\ c,\ p,\ h$$

per uno qualunque dei detti ellissoidi omofocali, si ha sempre

$$h' = \frac{mp'}{4\pi a'b'c'},$$

ovvero, indicando con x, y, z le coordinate del punto di densità h',

$$h' = \frac{m}{4\pi a'b'c'\sqrt{\frac{x^2}{a'^4}+\frac{y^2}{b'^4}+\frac{z^2}{c'^4}}},$$

od anche

$$h' = \frac{m}{4\pi a'b'\sqrt{c'^2\left(\frac{x^2}{a'^4}+\frac{y^2}{b'^4}\right)+1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}$$

in causa della relazione identica

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Questo valore di h si conserva finito e determinato anche quando l' ellissoide omofocale che si considera è l' *ellissoide limite*, cioè la superficie dell' ellisse focale e contata due volte, che corrisponde al valor limite $\lambda_1 = -c^2$. Per questo ellissoide limite si ha

$$a'^2 = a^2 - c^2 = A^2,\quad b'^2 = b^2 - c^2 = B^2,\quad c' = 0$$

e quindi

$$h' = \frac{m}{4\pi AB\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}}},$$

o meglio, considerando come una superficie materiale unica le due faccie dell' ellisse focale,

$$(8)_b \qquad h' = \frac{m}{2\pi AB\sqrt{\varkappa}} ,$$

dove

$$\varkappa = 1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} .$$

Si può verificare facilmente che questo valore di h' è identico a quello che si deduce direttamente dalla stessa funzione potenziale u. Infatti scrivendo dapprima λ^2 invece di $c^2 + \lambda$ nell' espressione (8) e formando la derivata rispetto a z,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{d\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} ,$$

indi osservando che si ha

$$lim \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} = \pm \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \quad \text{per} \quad \lambda_1 = 0 ,$$

dove il segno $\pm$ è lo stesso di quello dell' ordinata z quando questa tende verso zero insieme con λ_1, si ottiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\pm 0} = \mp \frac{m}{AB\sqrt{\varkappa}}$$

epperò

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-0} = - \frac{2m}{AB\sqrt{\varkappa}} = - 4\pi h' .$$

Questa distribuzione in equilibrio della massa m sulla superficie dell' ellisse focale è evidentemente omotetica. Essendo $\pi AB(1 - \varkappa)$ l' area dell' ellisse omotetica di parametro $\varkappa$, la massa elementare compresa fra le ellissi $(\varkappa)$ e $(\varkappa + d\varkappa)$ è

$$\pi ABh'd\varkappa = \frac{md\varkappa}{2\sqrt{\varkappa}} = md\sqrt{\varkappa} ,$$

epperò la massa finita $m_\varkappa$ compresa fra il contorno dell' ellisse focale e $(\varkappa = 0)$ e quello dell' ellisse omotetica $(\varkappa)$ è data da

$$(8)_c \qquad m_\varkappa = m\sqrt{\varkappa}\,.$$

Questa quantità tende a zero con $\varkappa$, quantunque la densità h' sia infinita per $\varkappa = 0$.

§ IV. Funzione potenziale d' un involucro ellissoidale omotetico.

Abbiamo supposto, nel § II, che la massa M riempiesse tutto l' ellissoide E. Questa supposizione può essere facilmente rimossa e sostituita da quella che la detta massa occupi soltanto un involucro omotetico, per esempio quello compreso fra l' ellissoide $E\,(\mu_0 = 0)$ e l' ellissoide interno $(\mu_0 = \mu' < 1)$. Basta immaginare che la funzione $\varphi(\mu)$ sia variabile soltanto fra i limiti $\mu = 0$ e $\mu = \mu'$, e sia invece costante, e precisamente $= \varphi(\mu')$, fra i limiti $\mu = \mu'$ e $\mu = 1$. Introducendo tale ipotesi nelle espressioni $(4)_0$ e $(4)_1$, esse convengono senz' altro al caso del detto involucro.

Ma se si vuole francarsi da ogni sottinteso, si modificheranno le suddette espressioni nel modo seguente.

Indichiamo con λ' la radice maggiore dell' equazione $\mu = \mu'$, cioè dell' equazione

$$(9) \qquad \mu' = 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}\,.$$

Ogni valore di λ maggiore di λ' rende evidentemente il secondo membro maggiore del primo, e corrisponde quindi a valori di μ compresi fra μ' ed 1, cioè a valori di $\varphi(\mu)$ costanti ed $= \varphi(\mu')$. Ora per ogni punto (xyz) esterno ad E la quantità λ' riesce evidentemente maggiore di λ_1: scomponendo quindi l' integrale V_1 in due, l' uno esteso da λ_1 a λ', l' altro da λ' a ∞, si ha

$$V_{1\prime} = \pi abc \int_{\lambda_1}^{\lambda'} \frac{\varphi(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \pi abc\varphi(\mu') \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}$$

quale funzione potenziale dell' involucro omotetico nello spazio infinito esterno ad esso. Per ogni punto (xyz) appartenente all' involucro stesso la quantità λ' riesce > 0, perchè per $\lambda = 0$ l' equazione (9) rappresenta la superficie interna dell' involucro: scomponendo dunque l' integrale V_0 in due, l' uno esteso da 0 a λ', l' altro da λ' a ∞, si ha

$$V_{0\prime} = \pi abc \int_{0}^{\lambda'} \frac{\varphi(\mu)d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \pi abc\varphi(\mu') \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}$$

quale funzione potenziale dell' involucro omotetico nello spazio occupato da esso. Finalmente per ogni punto (xyz) della cavità interna la quantità λ' riesce evidentemente negativa, epperò

$$V_{00} = \pi abc\varphi'(\mu') \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}$$

è la funzione potenziale dell' involucro omotetico nella cavità suddetta. Questo valore di V_{00} è costante, d' accordo colla già ricordata proprietà degli involucri omotetici elementari, ossia delle distribuzioni ellissoidali in equilibrio (§ III).

§ V. Intorno ad alcune altre distribuzioni ellissoidali.

Ponendo $\varphi(\mu) = k\mu$ nelle formole del § II si ottiene la funzione potenziale d' un ellissoide omogeneo, di densità k, senza distribuzione addizionale alla superficie. Questa funzione può scriversi così:

$$V = \frac{3}{4} MU ,$$

dove M è la massa totale ed

$$U = \int_\lambda^\infty \frac{\mu d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}},$$

il limite inferiore λ essendo $= 0$ od $= \lambda_1$ secondo che il punto (xyz) è interno od esterno.

Questa funzione V può servire al calcolo della funzione potenziale d' uno strato ellissoidale limitato da due ellissoidi infinitamente vicini *del tutto arbitrarii*, e quindi, coll' integrazione, al calcolo della funzione potenziale d' un involucro eterogeneo stratificato per ellissoidi succedentisi con una legge *qualunque*.

Sarebbe facile stabilire delle formole generali fondate su questo concetto, ma siccome esse riuscirebbero alquanto complicate, mentre nei singoli casi particolari si presentano quasi sempre delle semplificazioni, così preferiamo accennare qualche applicazione del detto principio.

Considerando dapprima il caso dei punti esterni, nel quale la funzione U diventa

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\mu d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}},$$

osserviamo che se in luogo di λ si scrive $\lambda + \lambda'$, dove

$$\lambda_1 > \lambda' > -c^2,$$

e se si pone

$$a^2 + \lambda' = a'^2, \quad b^2 + \lambda' = b'^2, \quad c^2 + \lambda' = c'^2,$$

l' integrale U_1, senza cambiare di valore, acquista la forma che avrebbe avuta *ab initio* se l' ellissoide omogeneo, invece d' essere quello di semi-assi a, b, c, fosse stato quello di semi-assi a', b', c', fosse stato, cioè, uno qualunque degli ellissoidi omofocali al primitivo pei quali il punto (xyz) è ancora punto esterno. Dunque la funzione potenziale esterna d' una massa M è la stessa qualunque sia l' ellissoide omofocale in cui questa massa è distribuita uniformemente, teorema celebre, di cui le prime traccie risalgono a Maclaurin e che può essere ulteriormente generalizzato (§ VI).

Da questo teorema si deduce molto facilmente che la funzione potenziale esterna d' una massa M, distribuita uniformemente nell' involucro formato da due ellissoidi omofocali, è indipendente dalla scelta di questi due ellissoidi; e di quì risulta nuovamente che se tale involucro, invece d' essere omogeneo, avesse una densità variabile per istrati omofocali, la sua funzione potenziale esterna sarebbe ancora indipendente dalla legge di variazione della densità e dipenderebbe soltanto, per un dato punto esterno, dalla massa totale, proprietà che vale naturalmente anche nel caso d' un ellissoide pieno. Dunque la stratificazione omofocale non dà luogo, rispetto all' azione esterna, ad alcuna considerazione speciale.

Merita però d' essere menzionato il caso dell' involucro omofocale infinitamente sottile, che supporremo essere quello compreso fra l' ellissoide E, di parametro $\lambda_1 = 0$, e l' ellissoide omofocale infinitamente vicino, di parametro $\lambda_1 = \delta\lambda$. La massa totale m di questo strato è data da

$$m = \frac{4}{3} \pi k \delta \sqrt{F(\lambda)} \qquad \text{per} \qquad \lambda = 0 \ ,$$

cioè da

$$m = \frac{2}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)k\delta\lambda\ .$$

La densità variabile h di quella distribuzione di tal massa m sulla superficie dell' ellissoide E, nella quale ogni elemento di superficie riceve tutta la massa che gli sovraincombe normalmente, è data da $h = k\delta n$, dove δn è lo spessore dello strato nel posto che si considera; essendosi già trovata nel § II la relazione $\delta\lambda = 2p\delta n$, si può quindi porre

$$h = \frac{k\delta\lambda}{2p}\ .$$

Queste due quantità m ed h sono infinitesime se k è quantità finita, e sono finite se k è infinitamente grande dell' ordine di $\frac{1}{\delta\lambda}$. Eliminando $\delta\lambda$ fra le loro espressioni, si ha

$$h = \frac{3m}{4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\frac{1}{p}\ ,$$

ossia

$$h = \frac{3m}{4\pi abc}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ ,$$

dove x, y, z sono le coordinate di quel punto della superficie cui si riferisce la densità superficiale h. In virtù di quanto precede, la funzione potenziale esterna d' una massa m, distribuita colla densità variabile h sulla superficie dell' ellissoide E, è identica a quella d' un' egual massa distribuita per istrati omofocali di densità variabile con legge qualunque in un ellissoide od in un involucro ellissoidale qualunque, purchè l' ellissoide o gli ellissoidi che limitano questa massa sieno omofocali ad E e non esterni a quello che passa pel punto (xyz) cui si riferisce la funzione potenziale, l' espressione della quale, in tali condizioni, resta sempre

$$V_1 = \frac{3}{4}mU_1\ .$$

Si può osservare che la densità h qui trovata segue la ragione inversa di quella della distribuzione in equilibrio (§ III).

Sostituendo all'ellissoide E un ellissoide omofocale interno, la densità h cambia, ma, finchè m è costante, la funzione potenziale V_1 rimane sempre la stessa. Si può, in particolare, sostituire ad E la superficie dell' ellisse focale e contata due volte, e la densità h' relativa a questo caso (ricavata come nel § III) è

$$h' = \frac{3m}{2\pi AB} \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}} ,$$

dove, come nel luogo citato, le due faccie dell' ellisse e sono considerate come una superficie unica (*).

Per fare un' altra applicazione, conduciamo per un punto qualunque di coordinate α, β, γ tre nuovi assi paralleli ai primitivi, e chiamiamo ξ, η, ζ le coordinate del punto (xyz) rispetto a questi assi, cosicchè l' ellissoide E viene ad essere rappresentato dall' equazione

$$\frac{(\xi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(\eta + \beta)^2}{b^2} + \frac{(\zeta + \gamma)^2}{c^2} = 1 .$$

Poscia trasformiamo omoteticamente questo ellissoide, assumendo come centro d'omotetia l' origine dei nuovi assi; prendiamo, cioè, su ogni raggio vettore ρ condotto da questo punto un segmento $= t\rho$, dove t è costante. L' equazione dell' ellissoide trasformato, che diremo E_t, è

$$\frac{(\xi + t\alpha)^2}{a^2t^2} + \frac{(\eta + t\beta)^2}{b^2t^2} + \frac{(\zeta + t\gamma)^2}{c^2t^2} = 1 .$$

talchè, se si pone

$$\mu_t = 1 - \frac{(\xi + t\alpha)^2}{a^2t^2 + \lambda} - \frac{(\eta + t\beta)^2}{b^2t^2 + \lambda} - \frac{(\zeta + t\gamma)^2}{c^2t^2 + \lambda} ,$$

è evidente che

$$V_t = \pi abct^3 \int_\lambda^\infty \frac{\mu_t d\lambda}{\sqrt{(a^2t^2 + \lambda)(b^2t^2 + \lambda)(c^2t^2 + \lambda)}}$$

(*) Questi risultati s' accordano con quelli che, in forma meno generale, sono menzionati da DINI alla fine della citata sua Memoria.

è la funzione potenziale d'una massa di densità 1 distribuita nell' ellissoide E_t. Il limite inferiore λ è, come sempre, nullo od eguale alla maggior radice dell' equazione $\mu_t = 0$, secondo che il punto $(\xi\eta\zeta)$ è interno od esterno ad E_t. Scrivendo λt^2 in luogo di λ si ottiene l' espressione più semplice

$$V_t = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\mu_t' d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} ,$$

dove

$$\mu_t' = t^2 - \frac{(\xi + t\alpha)^2}{a^2 + \lambda} - \frac{(\eta + t\beta)^2}{b^2 + \lambda} - \frac{(\zeta + t\gamma)^2}{c^2 + \lambda}$$

e dove il limite inferiore λ è nullo oppure eguale alla maggior radice dell' equazione $\mu_t' = 0$.

Ora da questo secondo valore di V_t si trae

$$\frac{dV_t}{dt} = 2\pi abc \int_\lambda^\infty \left(t - \frac{(\xi + t\alpha)\alpha}{a^2 + \lambda} - \frac{(\eta + t\beta)\beta}{b^2 + \lambda} - \frac{(\zeta + t\gamma)\gamma}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} ,$$

perchè il termine dovuto alla variazione del limite inferiore, quando questo è radice di $\mu_t' = 0$ e quindi funzione di t, è nullo in virtù del fattore μ_t'. Facendo $t = 1$ e ripassando ai primitivi assi delle x, y, z, si ha di quì

$$\left(\frac{dV_t}{dt}\right)_{t=1} = \frac{4\pi abc}{m} W ,$$

dove

$$W = \frac{m}{2} \int_\lambda^\infty \frac{v d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} . \tag{9}$$

In questa nuova funzione W si è posto

$$v = 1 - \frac{\alpha x}{a^2 + \lambda} - \frac{\beta y}{b^2 + \lambda} - \frac{\gamma z}{c^2 + \lambda} : \tag{9$_a$}$$

il limite inferiore λ è di nuovo nullo pei punti interni all'ellissoide E ed è eguale alla radice maggiore dell'equazione $\mu = 0$ pei punti esterni, μ avendo ora riacquistato il suo solito significato (5).

Ciò posto vediamo che cosa significhi la funzione W così ottenuta. Consideriamo a tal uopo il rapporto

$$\frac{1}{\tau}(V_{t+\tau} - V_t) .$$

Le due quantità V_t e $V_{t+\tau}$ rappresentano le funzioni potenziali di due masse, rispettivamente eguali a $\frac{4}{3}\pi abct^3$ ed a $\frac{4}{3}\pi abc\,(t+\tau)^3$, distribuite, colla densità 1, la prima nell' elissoide E_t e la seconda nell'ellissoide omotetico (ma eccentrico) $E_{t+\tau}$. Se dunque questi due ellissoidi non si intersecano in punti reali, per il che basta supporre che il centro d' omotetia sia interno ad E_t e se inoltre supponiamo che il punto (xyz) sia esterno all' ellissoide maggiore, od interno all' ellissoide minore, il suddetto rapporto rappresenta la funzione potenziale d' una massa

$$4\pi abc\left(t^2 + t\tau + \frac{\tau^2}{3}\right)$$

distribuita colla densità $\frac{1}{\tau}$ nell' involucro compreso fra i suddetti due ellissoidi, sopra un punto qualunque dello spazio infinito esterno oppure della cavità interna. Facendo convergere τ verso 0 e t verso 1, si riconosce quindi che W è la funzione potenziale d' una massa m distribuita uniformemente (con densità infinitamente grande, se m è quantità finita) nello strato compreso fra il solito ellissoide E ed un ellissoide omotetico (ma eccentrico) infinitamente vicino, col centro d' omotetia nel punto interno $(\alpha\beta\gamma)$. Questa massa m si può supporre distribuita, con densità variabile, sulla superficie dell' ellissoide E. La determinazione della legge di variazione di tal densità superficiale si fa, come nel caso precedente, osservando dapprima che se s' indica con k la densità costante dello strato e con $1 + \delta t$ il rapporto di omotetia della seconda superficie di esso, si ha

$$m = 4\pi abck\delta t .$$

Si ha inoltre, detta h la densità variabile nel punto dove il piano tangente all' ellissoide E ha la distanza p dal centro di omotetia,

$$h = k\delta n = kp\delta t$$

(formola che vale per ogni strato compreso fra superficie omotetiche): quindi

$$h = \frac{mp}{4\pi abc} \cdot \qquad (9)_b$$

Questa formola è del tutto simile a quella $(8)_a$ che vale per la distribuzione in equilibrio, se non che quì il simbolo p rappresenta la distanza del piano tangente non già dal centro dell' ellissoide, ma dal centro di omotetia. Nel caso della distribuzione in equilibrio questi due punti coincidono.

Se il centro d' omotetia, invece d' essere interno, come si è supposto, fosse esterno ad E, la densità della distribuzione superficiale sarebbe positiva in una regione della superficie, negativa nell' altra, e le due regioni sarebbero separate dalla conica di contatto della superficie col cono tangente avente il vertice nel centro di omotetia, ossia dalla conica d' intersezione dell' ellissoide col piano polare di questo punto. Siccome l' equazione $\nu = 0$ rappresenta il piano polare del punto stesso rispetto alla superficie $\mu = 0$ (qualunque sia λ), così la detta conica è rappresentata da $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La distribuzione di superficie ora considerata è dotata, rispetto ai punti esterni, di una proprietà analoga a quella della distribuzione in equilibrio (§ III) e della distribuzione omofocale considerata nella prima parte del presente §. Vale a dire che l' ellissoide E può essere sostituito da un ellissoide omofocale qualunque, come si verifica scrivendo $\lambda + \lambda'$ invece di λ in

$$W_1 = \frac{m}{2}\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\nu d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} \cdot$$

Se si vuole però che la densità h resti positiva, bisogna che il parametro λ' del nuovo ellissoide sia compreso fra λ_1 e la radice maggiore dell' equazione

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2+\lambda} = 1 \, ,$$

affinchè il centro d' omotetia non passi all' esterno. Quando il centro d' omotetia è nel piano dell' ellisse focale ed è interno alla medesima, la massa m può, in particolare, essere distribuita, con parità di funzione potenziale esterna, sull' ellisse focale stessa. Chiamando x, y le coordinate d' un punto del disco focale, si trova facilmente che la densità h' relativa ad esso è data da

$$h' = \frac{m\left(1 - \frac{\alpha x}{A^2} - \frac{\beta y}{B^2}\right)}{2\pi AB\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}}} \cdot \qquad (9)_c$$

Ma non insisteremo, per ora, su questo argomento, suscettibile di molti sviluppi, e torneremo alla teoria classica delle distribuzioni omotetiche e concentriche.

§ VI. Riporto d'una distribuzione ellissoidale omotetica sul disco focale.

Riprendiamo l'espressione $(4)_1$ della funzione potenziale esterna d'un ellissoide a densità variabile e scriviamo

$$\lambda^2, \qquad A^2, \qquad B^2, \qquad AB\psi(\mu)$$

al posto rispettivamente di

$$c^2 + \lambda, \qquad a^2 - c^2, \qquad b^2 - c^2, \qquad abc\varphi(\mu) .$$

Otteniamo così

$$V_1 = 2\pi AB \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\psi(\mu) d\lambda}{\sqrt{(A^2 + \lambda^2)(B^2 + \lambda^2)}}, \tag{10}$$

dove

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{A^2 + \lambda^2} - \frac{y^2}{B^2 + \lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2} \tag{10_a}$$

e dove λ_1 è l'unica radice positiva dell'equazione $\mu = 0$. La massa totale cui corrisponde questa funzione potenziale è data da

$$M = \pi AB \int_0^1 \frac{\psi(\mu) d\mu}{\sqrt{1 - \mu}} \tag{10_b}$$

e la parte di questa massa che si trova distribuita in equilibrio alla superficie è

$$m = 2\pi AB\psi(0). \tag{10_c}$$

Per una *data* funzione $\psi(\mu)$ la funzione potenziale V_1, la massa totale M e la

massa parziale m sono quantità indipendenti dalla scelta dell' ellissoide E che limita la massa medesima, poichè le loro espressioni non contengono alcuna traccia dei semi-assi a, b, c: questo ellissoide E può essere uno qualunque di quelli il cui parametro varia fra 0 e λ_1. Fissato che sia questo ellissoide, per esempio da $\lambda = c$, la densità variabile k della massa $M-m$ stratificata nel suo interno è determinata dalla formola

$$k = \frac{AB\psi'(\mu_c)}{abc}$$

dove

$$\mu_c = 1 - \frac{x^2}{A^2 + c^2} - \frac{y^2}{B^2 + c^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

x, y, z essendo le coordinate del punto cui la densità k si riferisce (*).

Se invece della funzione potenziale esterna si volesse considerare l' interna, bisognerebbe assumere come limite inferiore dell' integrale il parametro dell' ellissoide E, cioè il valore c, nel caso or ora supposto.

Poichè questo parametro di E può essere scelto arbitrariamente fra 0 e λ_1, e poichè quindi può essere preso piccolo quanto si voglia, si presenta naturalmente la ricerca della distribuzione superficiale, sull' ellisse focale e, che possiede la stessa funzione potenziale di ognuna delle distribuzioni ellissoidali equivalenti, che corrispondono agli altri valori del detto parametro.

Per trovare questa distribuzione superficiale basta riportare, in base a ciò che si disse nel § III, la massa di ciascuno degli strati omotetici elementari sulla corrispondente ellisse focale, e calcolare la densità che ne risulta in ciascun punto di e. Si può già concludere di quì che tale densità varierà per ellissi omotetiche all' ellisse focale, poichè è evidente che le ellissi focali d' una serie d' ellissoidi omotetici sono pure ellissi omotetiche.

Passiamo dunque ad eseguire il detto riporto, incominciando dalla massa finita m, che si trova distribuita in equilibrio sulla superficie dell' ellissoide E. Dal § III sappiamo già che riportando questa massa sulla superficie dell' ellisse e (contata una volta sola), e ponendo

$$(11) \qquad \varkappa = 1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} \qquad (0 < \varkappa < 1)$$

dove x, y sono le coordinate d' un punto qualunque del disco focale, — talchè,

(*) Questa proposizione costituisce il teorema di MACLAURIN inteso nel suo significato più generale.

per un dato valore di $\varkappa$, quest' equazione rappresenta una, $e_\varkappa$, delle ellissi omotetiche ed interne ed e, — la parte $m_\varkappa$ della massa m che va a distribuirsi sulla corona ellittica $e - e_\varkappa$ è data $(8)_c$ $(10)_c$ da

$$(11)_a \qquad m_\varkappa = 2\pi AB\psi(0)\sqrt{\varkappa}\ .$$

Consideriamo ora uno qualunque degli ellissoidi omotetici ed interni all' ellissoide E, rappresentato dall' equazione

$$\mu_c = 1 - \frac{x^2}{A^2 + c^2} - \frac{y^2}{B^2 + c^2} - \frac{z^2}{c^2} \qquad (0 < \mu_c < 1)\ .$$

L' ellisse focale e_c di questo ellissoide, la quale è anch' essa omotetica ed interna all' ellisse e ed ha per semi-assi

$$A_c = A\sqrt{1-\mu_c}\ , \qquad B_c = B\sqrt{1-\mu_c}\ ,$$

è quella sulla quale va a riportarsi la massa elementare

$$2\pi AB\psi'(\mu_c)\sqrt{1-\mu_c}\,d\mu_c$$

dello strato compreso fra gli ellissoidi omotetici (μ_c) e $(\mu_c + d\mu_c)$. Ora l' equazione (11), scritta nel modo seguente

$$\varkappa_c = \frac{\varkappa - \mu_c}{1-\mu_c} = 1 - \frac{x^2}{A_c^2} - \frac{y^2}{B_c^2}\ ,$$

rappresenta, se $\mu_c < \varkappa$, cioè se $0 < \varkappa_c < \varkappa$, un' ellisse omotetica ed *interna* all' ellisse e_c: dunque la parte di detta massa elementare che va a distribuirsi sulla corona ellittica $e_c - e_\varkappa$, è, sempre in base alla formola $(8)_c$ del § III,

$$2\pi AB\psi'(\mu_c)\sqrt{1-\mu_c}\,d\mu_c\sqrt{\varkappa_c}\ ,$$

ossia

$$2\pi AB\psi'(\mu_c)\sqrt{\varkappa-\mu_c}\,d\mu_c\ .$$

Conseguentemente

$$2\pi AB\int_0^\varkappa \psi'(\mu_c)\sqrt{\varkappa-\mu_c}\,d\mu_c = \pi AB\int_0^\varkappa \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{\varkappa-\mu}} - 2\pi AB\psi(0)\sqrt{\varkappa}$$

è l'espressione della totale quantità di materia che, dai varii strati ellissoidici i cui parametri μ_c sono $< \varkappa$, si riporta sulla corona ellittica $e - e_\varkappa$, perchè gli strati corrispondenti a valori di $\mu_c > \varkappa$ hanno ellissi focali *interne* ad $e_\varkappa$ e però non danno luogo a verun riporto sulla corona suddetta.

Sommando la precedente quantità colla $m_\varkappa$ data dall' equazione $(11)_a$, si ha

$$(11)_b \qquad M_\varkappa = \pi AB \int_0^\varkappa \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{\varkappa - \mu}}$$

quale espressione della totale massa riportata sulla corona ellittica $e - e_\varkappa$. Per $\varkappa = 1$ si ottiene $M_1 = M$ $(10)_b$. Per $\varkappa = 0$ si ottiene $M_0 = 0$, supponendo, come s' è fatto fin quì, che $\psi(0)$ sia quantità finita.

D' altra parte, essendo $\pi AB\,d\varkappa$ l' area della corona elementare compresa fra le ellissi omotetiche $e_\varkappa$ ed $e_{\varkappa+d\varkappa}$, se si chiama $h(\varkappa)$ la densità variabile della cercata distribuzione superficiale sul disco focale, dev' essere anche

$$M_\varkappa = \pi AB \int_0^\varkappa h(\varkappa)d\varkappa \ .$$

Dunque la formola che esprime la cercata legge della densità superficiale è

$$(11)_c \qquad h(\varkappa) = \frac{d}{d\varkappa}\int_0^\varkappa \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{\varkappa - \mu}},$$

Da questa si deduce

$$\int_0^v h(\varkappa)\sqrt{v - \varkappa}\, d\varkappa = \int_0^v \sqrt{v - \varkappa}\, d\int_0^\varkappa \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{\varkappa - \mu}} = \frac{1}{2}\int_0^v \frac{d\varkappa}{\sqrt{v - \varkappa}}\int_0^\varkappa \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{\varkappa - \mu}}$$

e quindi, per la nota regola di Dirichlet, scrivendo a trasformazione fatta μ in luogo di v,

$$\int_0^\mu h(\varkappa)\sqrt{\mu - \varkappa}\, d\varkappa = \frac{\pi}{2}\int_0^\mu \psi(\mu)d\mu \ .$$

Quest' equazione, avendo luogo per ogni valore di μ, dà subito, derivando rispetto a questa variabile,

$$(11)_d \qquad \psi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\mu \frac{h(\varkappa)d\varkappa}{\sqrt{\mu - \varkappa}},$$

formola che permette di determinare $\psi(\mu)$ quando è data la legge della densità del disco focale.

Si può osservare che dalle due equazioni $(11)_c$ $(11)_d$ segue la relazione

$$\psi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\mu \frac{d\varkappa}{\sqrt{\mu - \varkappa}} \frac{d}{d\varkappa}\int_0^\varkappa \frac{\psi(\lambda)d\lambda}{\sqrt{\varkappa - \lambda}},$$

che sembra meritevole di studio (*).

§ VII. Funzione potenziale d' un anello ellittico.

Ponendo $h(\varkappa) = 1$ nella formola $(11)_d$ si trova

$$\psi(\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu},$$

epperò la funzione potenziale d' un disco ellittico, omogeneo e di densità 1 è data da

$$V = 4AB\int_{\lambda_1}^\infty \frac{\sqrt{\mu}\, d\lambda}{\sqrt{(A^2 + \lambda^2)(B^2 + \lambda^2)}},$$

dove μ rappresenta l'espressione $(10)_a$ e λ_1 è la radice positiva dell'equazione $\mu = 0$.

Questa funzione potenziale può servir di base ad una ricerca analoga a quella che fu formulata in generale al principio del § V ed eseguita per alcuni casi particolari nel seguito del medesimo §; può, cioè, servire al calcolo della funzione

(*) È una formola analoga a quella incontrata da Dini nel n. 8 del citato lavoro.

potenziale d' una corona ellittica limitata da due ellissi infinitamente vicine *del tutto arbitrarie*, e quindi, coll' integrazione, al calcolo della funzione potenziale d' un disco eterogeneo stratificato per ellissi succedentisi con una legge *qualunque* (**).

Anche rispetto a questa ricerca ci limiteremo a mostrare l' applicazione dell' enunciato principio ad un caso particolare, e propriamente a quello che fa riscontro all' ultimo dei due casi trattati nel citato § V; nel che, stante l' analogia del procedimento analitico, potremo usare maggiore brevità.

Designando con α, β le coordinate d' un punto nel piano del disco, assunto come centro di omotetia, e con ξ, η, ζ le coordinate d' un punto qualunque dello spazio rispetto a tre assi condotti per questo centro parallelamente a quelli delle x, y, z, si trova dapprima che l' espressione

$$V = 4AB\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu_t'}\, d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda^2)(B^2+\lambda^2)}},$$

dove

$$\mu_t' = t^2 - \frac{(\xi+t\alpha)^2}{A^2+\lambda^2} - \frac{(\eta+t\beta)^2}{B^2+\lambda^2} - \frac{\zeta^2}{\lambda^2},$$

rappresenta la funzione potenziale d' un disco ellittico e_t di densità 1, ottenuto trasformando omoteticamente il disco e, dal punto $(\alpha\beta)$ come centro d' omotetia, col rapporto d' omotetia t. Si deduce di quì

$$\frac{dV}{dt} = 4AB\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{v_t d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda^2)(B^2+\lambda^2)\mu_t'}}$$

dove

$$v_t = t - \frac{(\xi+t\alpha)\alpha}{A^2+\lambda^2} - \frac{(\eta+t\beta)\beta}{B^2+\lambda^2}.$$

(**) In questo caso però le formole che si ottengono, essendo integrali semplici o doppii, non costituiscono altro che una trasformazione di quelle che si otterrebbero dalla definizione di funzione potenziale d' una linea o d' una superficie. Ma gli esempii dati quì ed altrove pel caso delle distribuzioni lineari mostrano abbastanza quanto possano riuscire vantaggiose tali trasformazioni.

Facendo $t = 1$, ripassando ai primitivi assi delle x, y, z e ragionando come nel passo citato, si conclude che l' espressione

$$W = \frac{2m}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{v d\lambda}{\sqrt{(A^2 + \lambda^2)(B^2 + \lambda^2)\mu}}, \tag{12}$$

dove

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{A^2 + \lambda^2} - \frac{y^2}{B^2 + \lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2}, \tag{12$_a$}$$

$$v = 1 - \frac{\alpha x}{A^2 + \lambda^2} - \frac{\beta y}{B^2 + \lambda^2}, \tag{12$_b$}$$

rappresenta la funzione potenziale d' una massa m distribuita uniformemente nella corona ellittica compresa fra l' ellisse e ed un' ellisse omotetica infinitamente vicina col centro d' omotetia nel punto interno $(\alpha\beta)$.

Questa massa m si può supporre distribuita, con densità variabile, sul contorno dell'ellisse e. La determinazione della legge di variazione di tal densità lineare g si fa col metodo seguito nel § III; si trova così

$$g = \frac{mp}{2\pi AB}, \tag{12$_c$}$$

dove p è la distanza del centro d' omotetia dalla tangente all' ellisse e nel punto cui la densità g si riferisce; talchè, sostituendo il valore di p in funzione delle coordinate x, y del punto anzidetto, si ha

$$g = \frac{m\left(1 - \frac{\alpha x}{A^2} - \frac{\beta y}{B^2}\right)}{2\pi AB \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4}}}.$$

Se il centro d' omotetia, invece d' essere interno, come si è supposto, fosse esterno ad e, questa densità sarebbe positiva in una parte del contorno e negativa nell' altra, e i due punti del contorno situati sulla retta

$$1 - \frac{\alpha x}{A^2} - \frac{\beta y}{B^2} = 0$$

(polare del centro d' omotetia) sarebbero i termini comuni a queste due parti.

La funzione (12) prende una forma elegante se si scrive λ in luogo di λ^2, e se si designano con λ_1, λ_2, λ_3 le tre radici dell' equazione

$$\frac{x^2}{A^2+\lambda}+\frac{y^2}{B^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}=1\,;$$

giacchè, essendo in tal caso

$$(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)\,\lambda\mu=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

si può scrivere

$$(12)_d \qquad W=\frac{m}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{v\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}}$$

dove

$$(12)_e \qquad v=1-\frac{\alpha x}{A^2+\lambda}-\frac{\beta y}{B^2+\lambda}\,.$$

Merita attenzione speciale il caso in cui il centro d' omotetia sia uno dei fuochi dell' ellisse e, cioè in cui sia

$$\alpha=\sqrt{A^2-B^2}\,,\quad \beta=0\,,$$

e quindi

$$(13) \qquad W=\frac{2m}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{x\sqrt{A^2-B^2}}{A^2+\lambda^2}}{\sqrt{(A^2+\lambda^2)(B^2+\lambda^2)\mu}}\,d\lambda=\frac{m}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{x\sqrt{A^2-B^2}}{A^2+\lambda}}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}}\,d\lambda$$

Si sa infatti che, in ogni moto centrale, la velocità in un punto dell' orbita è sempre inversa della distanza del centro di forza dalla tangente dell' orbita in quel punto: quindi la precedente espressione di W è quella della funzione potenziale d' una massa m distribuita, lungo il contorno dell' ellisse e, in ragione inversa della velocità colla quale quest' ellisse sarebbe percorsa da un pianeta, se il centro del sole fosse nel fuoco che si è assunto come centro d' omotetia. Questa distribuzione di

massa è quella che GAUSS ha considerato, in vista d'alcuni problemi di perturbazione, nella celebre Memoria *Determinatio attractionis* etc. (T. III delle Opere), e le espressioni precedenti somministrano, sotto forme elegante, la funzioni potenziale di tale distribuzione.

Un altro caso notevole ed ancor più semplice è quello in cui il centro d'omotetia è nel centro dell'ellisse, cioè in cui $\alpha = 0$, $\beta = 0$. In questo caso si ha

$$(14) \quad W = \frac{2m}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(A^2+\lambda^2)(B^2+\lambda^2)\mu}} = \frac{m}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}} \,.$$

dove [come nelle formole (13)] λ_1 è, rispetto alla prima espressione, la radice positiva dell'equazione

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda^2} - \frac{y^2}{B^2+\lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2} = 0 \;,$$

e, rispetto alla seconda, la radice maggiore dell'equazione

$$\frac{x^2}{A^2+\lambda} + \frac{y^2}{B^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1 \;.$$

È questa la funzione potenziale d'una massa m distribuita uniformemente nella corona compresa fra l'ellisse e ed un'ellisse omotetica e concentrica infinitamente vicina, oppure della massa medesima distribuita lungo il contorno dell'ellisse e colla densità lineare variabile

$$g = \frac{mp}{2\pi AB} = \frac{m}{2\pi AB\sqrt{\dfrac{x^2}{A^4}+\dfrac{y^2}{B^4}}}$$

dove p è di nuovo la distanza del centro dell'ellisse dalla tangente nel punto di densità g.

La prima delle due espressioni (14) di W rientra, come si vede, nel tipo generale (10), dal quale essa si deduce ponendo

$$\psi(\mu) = \frac{m}{\pi^2 AB\sqrt{\mu}} \,.$$

Ma questa forma della funzione $\psi(\mu)$ non soddisfa alla condizione, da noi fin quì ammessa, d' essere finita per $\mu = 0$, ed è quindi naturale che non si possa, per esempio, considerare W come funzione potenziale esterna di una stratificazione omotetica ellissoidale (sebbene tale fosse la primitiva funzione V_1), a meno di concedere l' esistenza di due strati ellissoidali di densità infinita e di segno contrario, l' uno proveniente dalla distribuzione superficiale della massa $(10)_c$, l'altro proveniente (per $\mu = 0$) dalla distribuzione in tre dimensioni della massa $(10)_b$. Per la stessa ragione non sarebbe applicabile la formola $(11)_c$ alla massa m considerata come distribuita sul disco ellittico. Ma la formola $(11)_b$, che è pur relativa a questa supposizione, porge un risultato che s' accorda col significato, da noi dedotto per altra via, dell' espressione (14). Infatti, introducendo in essa il precedente valore di $\psi(\mu)$, essa dà

$$M_\varkappa = \frac{m}{\pi} \int_0^\varkappa \frac{d\mu}{\sqrt{(\varkappa - \mu)\mu}} = m \; ,$$

essa dice, cioè, che la quantità di materia contenuta nella corona ellittica compresa fra l' ellisse e ed un' ellisse omotetica interna qualunque è sempre la stessa, qualunque sia quest' ultima ellisse, il qual fatto non può verificarsi se la massa totale non è *tutta* distribuita sul *contorno* dell' ellisse e.

Il prof. Dini, nella citata sua Memoria, ha considerato il caso in cui la funzione $h(\varkappa)$ del § VI abbia la forma

$$h(\varkappa) = \frac{A}{\sqrt{\varkappa}} + B(\varkappa) \; .$$

Da quanto precede risulta che anche per la funzione $\psi(\mu)$ è ammissibile una forma analoga

$$\psi(\mu) = \frac{A}{\sqrt{\mu}} + B(\mu) \; .$$

Ma sarebbe interessante di considerare anche il significato di un termine della forma μ^{-n} $\left(0 < n < \frac{1}{2}\right)$ nell' espressione di $\psi(\mu)$.

Terminiamo con un' osservazione sulla forma comparativa delle due funzioni (8) e (14), le quali si possono scrivere così

$$\frac{m}{2} \int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} , \qquad \frac{m}{\pi} \int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} ,$$

e rappresentano le funzioni potenziali esterne della massa m, distribuita uniformemente, nel primo caso, fra due ellissoidi omotetici e concentrici infinitamente vicini, e nel secondo caso, fra due ellissi omotetiche e concentriche infinitamente vicine. Se si considera che le due funzioni intere di 3° grado $F(\lambda)$ ed $f(\lambda)$, introdotte fin dal § I, sono gli elementi fondamentali d' ogni procedimento analitico fondato sull' uso delle coordinate ellittiche, si può ragionevolmente affermare che quelle due funzioni potenziali sono da riguardarsi come fondamentali nella teoria dell' attrazione dei sistemi ellissoidali. E infatti molti dei metodi proposti per la trattazione di questa teoria si fondano sull' uso della prima di dette due funzioni per la deduzione delle altre funzioni potenziali ellissoidiche più complesse. Ma questa prima funzione si può ricavare dalla seconda con una integrazione definita, su di che tuttavia non vogliamo trattenerci, avendo già data molta estensione a questo lavoro.

§ VIII. Dei sistemi simmetrici intorno all' asse minore.

Facendo $A = B$ nella formola (10) si ottiene

$$V_1 = 2\pi A^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\psi(\mu)d\lambda}{A^2 + \lambda^2}, \tag{15}$$

espressione che si può considerare (§ VI) come la funzione potenziale esterna d'una massa

$$M = \pi A^2 \int_0^1 \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{1-\mu}} \tag{15$_a$}$$

distribuita, in parte per ellissoidi di rotazione omotetici, colla densità variabile

$$k = \frac{A^2\psi'(\mu_c)}{a^2 c}, \qquad (A^2 = a^2 - c^2)$$

ed in parte, e precisamente per una parte m data da

$$m = 2\pi A^2 \psi(0) ,$$

alla superficie dell' ellissoide terminale, di semi-assi a, c, colla densità superficiale corrispondente alla distribuzione in equilibrio. Le quantità μ e μ_c sono date da

$$(15)_b \qquad \mu = 1 - \frac{u^2}{A^2 + \lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2}, \qquad (u^2 = x^2 + y^2)$$

$$\mu_c = 1 - \frac{u^2}{A^2 + c^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

e λ_1 è la radice positiva dell' equazione $\mu = 0$. Per la funzione potenziale interna si deve porre $\lambda_1 = c$.

Ma, in virtù del riporto eseguito nel detto § VI, si può anche considerare l' espressione (15) come la funzione potenziale d' un disco circolare di raggio A, sul quale la massa M sia distribuita con una densità $h(\varkappa)$, variabile colla distanza u dal centro e data dalla formola $(11)_b$, dove

$$(15)_c \qquad \varkappa = 1 - \frac{u^2}{A^2}.$$

Nei punti stessi del disco V_1 diventa

$$V_0 = 2\pi A^2 \int_0^\infty \frac{\psi(\mu) d\lambda}{A^2 + \lambda^2}$$

dove

$$\mu = 1 - \frac{u^2}{A^2 + \lambda^2},$$

ovvero, introducendo μ invece di λ come variabile d' integrazione e scrivendo $V(\varkappa)$ invece di V_0,

$$(16) \qquad V(\varkappa) = \pi A \int_\varkappa^1 \frac{\psi(\mu) d\mu}{\sqrt{(1-\mu)(\mu-\varkappa)}}.$$

Di quì si deduce

$$\int_v^1 \frac{V(\varkappa) d\varkappa}{\sqrt{\varkappa - v}} = \pi A \int_v^1 \frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa - v}} \int_\varkappa^1 \frac{\psi(\mu) d\mu}{\sqrt{(1-\mu)(\mu-\varkappa)}},$$

ed applicando la regola di DIRICHLET, convenientemente modificata, indi scrivendo μ in luogo di ν,

$$\int_{\mu}^{1} \frac{V(x)dx}{\sqrt{x-\mu}} = \pi^2 A \int_{\mu}^{1} \frac{\psi(\mu)d\mu}{\sqrt{1-\mu}} .$$

Questa relazione ha luogo qualunque sia μ, epperò, derivando rispetto a questa variabile, si ottiene

$$(16)_a \qquad \psi(\mu) = -\frac{\sqrt{1-\mu}}{\pi^2 A} \frac{d}{d\mu} \int_{\mu}^{1} \frac{V(x)dx}{\sqrt{x-\mu}} ,$$

formola che determina la funzione $\psi(\mu)$ per mezzo dei valori della funzione potenziale del disco alla superficie del disco stesso. Se nella stessa relazione da cui questa formola è stata dedotta si pone $\mu = 0$, si ottiene, in virtù della $(15)_a$,

$$(16)_b \qquad M = \frac{A}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{V(x)dx}{\sqrt{x}}$$

espressione della massa totale del disco in funzione dei valori suddetti. Finalmente se s' introduce il valore $(16)_a$ di $\psi(\mu)$ nell' equazione $(11)_b$, si ottiene

$$(16)_c \qquad M_x = -\frac{A}{\pi} \int_{0}^{x} \frac{d\mu \sqrt{1-\mu}}{\sqrt{x-\mu}} \frac{d}{d\mu} \int_{\mu}^{1} \frac{V(x)dx}{\sqrt{x-\mu}}$$

formola che determina la quantità di materia compresa fra l' orlo del disco e il cerchio concentrico (x), di raggio $A\sqrt{1-x}$ per mezzo dei medesimi valori, e dalla quale si deduce subito la densità variabile del disco per mezzo della relazione

$$(16)_d \qquad h(x) = \frac{1}{\pi A^2} \frac{dM_x}{dx} .$$

Si può osservare che dalle due equazioni (16), $(16)_a$ segue la relazione

$$V(\varkappa) = -\frac{1}{\pi}\int_{\varkappa}^{1} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu - \varkappa}} \frac{d}{d\mu}\int_{\mu}^{1} \frac{V(v)dv}{\sqrt{v - \mu}},$$

analoga quella che fu notata alla fine del § VI.

Come verificazione ed esempio d' applicazione semplicissimo delle formole precedenti (alcune delle quali furono già da me stabilite, con processi e sotto aspetti un po' diversi, in una Nota *intorno ad alcune questioni d' elettrostatica*, negli Atti del R. Istituto Lombardo del 1877), suppongasi $V(\varkappa) = 1$. Le formole $(16)_a$, $(16)_b$, $(16)_c$, $(16)_d$ danno in tal caso

$$\psi(\mu) = \frac{1}{\pi^2 A}, \qquad M = \frac{2A}{\pi}, \qquad M_\varkappa = \frac{2A\sqrt{\varkappa}}{\pi}, \qquad h(\varkappa) = \frac{1}{\pi^2 A\sqrt{\varkappa}}$$

risultati che stanno in perfetto accordo con quelli del § III.

Nella supposizione, fatta in questo §, di $A = B$, la prima espressione di W, data dalla formola (14), diventa

$$W = \frac{2m}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(A^2 + \lambda^2)\sqrt{\mu}},$$

dove μ ha il valore $(15)_b$, e fornisce la funzione potenziale d' una massa M distribuita uniformemente lungo la periferia d' un cerchio di raggio A, sotto una forma della quale ho mostrato l' utilità in una Nota *sull' attrazione di un anello circolare od ellittico* (inserita negli Atti della R. Accademia dei Lincei 1880). La seconda espressione di W, opportunamente trasformata, si converte in un' altra forma della stessa funzione potenziale, che si trova pure ricordata nel citato lavoro.

§ IX. Dei sistemi simmetrici intorno all'asse maggiore.

Risaliamo alla primitiva forma $(4)_1$ di V_1 e scriviamo, dopo aver fatto $b = c$,

$$\lambda^2, \qquad A^2, \qquad A^2\psi(\mu)$$

al posto rispettivamente di

$$b^2 + \lambda, \qquad a^2 - b^2, \qquad ab^2\phi(\mu) .$$

Otteniamo così

$$(17) \qquad V_1 = 2\pi A^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\psi(\mu) d\lambda}{\lambda^2 - A^2},$$

dove

$$(17)_a \qquad \mu = 1 - \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{v^2}{\lambda^2 - A^2} \qquad (v^2 = y^2 + z^2)$$

e dove λ_1 è la radice positiva e maggiore di A dell' equazione $\mu = 0$. È questa la funzione potenziale esterna d' una massa

$$(17)_b \qquad M = \pi A^2 \int_0^1 \frac{\psi(\mu) d\mu}{\sqrt{1 - \mu}}$$

distribuita, in parte per ellissoidi di rotazione omotetici, colla densità variabile

$$k = \frac{A^2 \psi'(\mu_a)}{ab^2} ,$$

dove

$$\mu_a = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{v^2}{a^2 - A^2}$$

(x, v essendo le coordinate del punto cui la densità k si riferisce), ed in parte, e precisamente per una parte m data da

$$(17)_c \qquad m = 2\pi A^2 \psi(0) ,$$

alla superficie dell' ellissoide terminale, di semi-assi a, b, colla densità superficiale

corrispondente alla distribuzione in equilibrio. Per la funzione potenziale interna si deve porre $\lambda_1 = a$.

Per una *data* funzione $\psi(\mu)$ la funzione potenziale esterna V_1, la massa totale M e la massa parziale m sono quantità indipendenti dalla scelta dell' ellissoide E, che limita la massa medesima, il quale può essere uno qualunque di quelli il cui parametro varia fra A e λ_1. Fissato che sia questo ellissoide, per esempio da $\lambda = a$, la densità variabile k della massa $M-m$ stratificata nel suo interno è determinata dalla formola testè riportata.

Ciò posto consideriamo la massa m distribuita in equilibrio alla superficie. La densità di tale distribuzione nel punto (x, v) è (§ III) espressa da

$$\frac{m}{4\pi ab^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}}},$$

epperò

$$\frac{mvds}{2ab^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}}}$$

è la quantità di materia compresa, in tale distribuzione, fra il parallelo d' ascissa x ed il parallelo contiguo, ds essendo l' elemento di sezione meridiana intercetto fra i paralleli medesimi. Questa quantità si può scrivere così

$$\frac{m \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, ds}{2a \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} + 1 - \frac{x^2}{a^2}}},$$

epperò, quando l' ellissoide E, che, come abbiamo detto, è di parametro variabile fra A e λ_1, si va indefinitamente restringendo, per guisa che il suo semi-asse maggiore a tenda al limite A, e il suo semi-asse minore $b = \sqrt{A^2 - a^2}$ tenda a zero, essa tende verso il valore

$$\frac{mds}{2A},$$

il quale corrisponde quindi alla quantità di materia che va a riportarsi sull' ele-

mento ds del segmento focale $2A$, quando il suddetto ellissoide si confonde all' ultimo con tale segmento. Dunque la distribuzione in equilibrio sulla superficie del primitivo ellissoide E, come d' ogni altro ellissoide omofocale interno, equivale, in funzione potenziale esterna, ad una distribuzione *uniforme* d' egual massa m sul segmento focale $2A$, colla densità lineare costante

$$\frac{m}{2A} = \pi A \psi(0) \ ,$$

risultato che si potrebbe verificare con un procedimento analogo a quello usato nel § III.

Poichè la distribuzione superficiale in equilibrio equivale ad una distribuzione di densità costante in uno strato omotetico infinitamente sottile, si può concludere di quì che la materia costituente un tale strato (quando gli ellissoidi terminali sono di rotazione intorno all' asse maggiore) può essere riportata, con parità di funzione potenziale esterna, sul segmento focale dello strato medesimo, purchè venga uniformemente distribuita su questo segmento. Applicando questo principio ai singoli strati elementari della distribuzione di densità variabile k, si può così ottenere una distribuzione di tutta la massa M sul segmento focale $2A$, avente la stessa funzione potenziale esterna della primitiva distribuzione a tre dimensioni.

Consideriamo dunque uno degli ellissoidi omotetici ed interni ad E, e sia quello rappresentato dall' equazione

$$\mu_a = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{v^2}{a^2 - A^2} \ , \qquad (0 < \mu_a < 1)$$

il cui segmento focale è compreso fra i punti

$$x = \pm A \sqrt{1 - \mu_a} \ , \qquad v = 0 \ .$$

La massa

$$2\pi A^2 \sqrt{1 - \mu_a} \ \psi'(\mu_a) d\mu_a$$

dello strato elementare compreso fra gli ellissoidi (μ_a) e $(\mu_a + d\mu_a)$, riportandosi uniformemente sul detto segmento focale, genera una distribuzione lineare di densità costante

$$\pi A \psi'(\mu_a) d\mu_a \ .$$

Ora il punto d'ascissa x ($x^2 < A^2$) del segmento focale $2A$ è interno ai segmenti focali di tutti gli ellissoidi il cui parametro μ_a soddisfa alla condizione

$$x^2 < A^2(1 - \mu_a) ,$$

ossia

$$\mu_a < 1 - \frac{x^2}{A^2} .$$

Quindi la densità complessiva nel punto d'ascissa x, risultante dal riporto di tutti gli strati elementari nei cui segmenti focali esso punto è contenuto, è

$$\pi A \psi\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) - \pi A \psi(0) ;$$

e sommando tale densità con quella della distribuzione lineare procedente dalla massa m, si ottiene

$$(17)_d \qquad g = \pi A \psi\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

come espressione della densità lineare totale nel punto d'ascissa x del segmento focale $2A$.

Se con questo valore di g si calcola la massa totale del segmento

$$2\int_0^A g dx = 2\pi A \int_0^A \psi\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) dx$$

si ritrova subito il valore $(17)_b$ di M, ponendo

$$1 - \frac{x^2}{A^2} = \mu .$$

Si può osservare che la distribuzione lineare testè determinata, ed equivalente alla primitiva distribuzione ellissoidale simmetrica intorno all'asse maggiore, ha

una funzione potenziale che, calcolata in base alla definizione, sarebbe espressa da

$$\pi A \int_{-A}^{A} \frac{\psi\left(1 - \frac{\xi^2}{A^2}\right) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + v^2}},$$

Si ha dunque la seguente trasformazione d'integrali

$$\int_{-A}^{A} \frac{\psi\left(1 - \frac{\xi^2}{A^2}\right) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + v^2}} = 2A \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\psi(\mu) d\lambda}{\lambda^2 - A^2},$$

dove λ_1 è la radice maggiore di A dell'equazione

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{v^2}{\lambda^2 - A^2} = 0 \ .$$

La funzione $g(x)$ non è soggetta ad altra condizione che d'essere *pari*. Quando questa condizione è soddisfatta si può ricavare ψ da g mediante la formola

$$(17)_e \qquad \psi(\mu) = \frac{1}{\pi A} g(A\sqrt{1-\mu}) \ .$$

DI UNA BAMBINA MICROCEFALICA

E SPECIALMENTE DEL SUO CERVELLO

MEMORIA

DEL PROF. LUIGI CALORI

(Letta nella XXIV Adunanza, 20 Maggio 1880)

Facendomi a parlare di un Microcefalo e ad esporne l'anatomia, io non ho l'intendimento di coloro i quali si danno a tutt' uomo allo studio della Microcefalia per dimostrare che quelli che la presentano, sono esseri degradati costituenti l'anello di congiunzione tra l'uomo e le scimie, e non dubitano chiamarli Uomini-scimie, quasi che nelle parti onde sono microcefali, fosser' ellino, rispetto alla specie cui appartengono, stati esseri già perfetti, scaduti poscia di loro perfezione. Ma questa ipotesi non ha verun buono fondamento, e chi ben guarda, troverà che i Microcefali non sono esseri degradati, ma esseri che nella formazione del loro cranio ed in ispecie del loro cervello non hanno acquistato tutto il loro incremento e perfezionamento, e talvolta sono anche morbosi, di qualità, ch' e' non possono valere a quella bisogna, a servire cioè di mezzo di unione tra esseri perfettamente formati. Ma io non vo' trattare cotesta materia, e lasciola di buon grado a chi ama profferir cose speciose a fin di pigliare i mal proveduti, ed in cambio di quelle esibirò la casta nudità delle semplici osservazioni, salvo che rispetto al cervello; intorno al quale ho brigato e studiato in rettificare le idee sulle cause onde si formano le circonvoluzioni, in provare non esservi troppo buone ragioni per rigettare, come si è fatto di presente, l'esistenza delle circonvoluzioni primarie o maestre, abbandonando il loro divisamento in generali o comuni ed in proprie o particolari, ed all' ultimo in mostrare quale sia il modo, secondo me, preferibile a distinguere gli emisferi cerebrali in lobi. Queste cose ho anteposte alle speciosità ed alla vaghezza di mettere in vista le rancide analogie così dette animali del cervello dei Microcefali; le quali analogie si leggono in cento scritti, e corrono

eziandio per le bocche del volgo che le prende per identità, persuadendosi della trasformazione delle specie che diconsi meno perfette, nelle più perfette. Ed anche mi sono astenuto dalla profusa erudizione, essendo che si hanno ricchissime bibliografie degli autori che scrissero sulla Microcefalia, nelle Opere di Carlo Vogt (1), di Luigi Montanè (2), e di Carlo Giacomini (3). Il mio lavoro dunque si limita alla storia dell' individuo microcefalico che ho avuto opportunità di osservare ed alla sua anatomia, cogliendo in ciò fare il destro di rettificare, o dire più propriamente le cose poco sopra divisate.

Nell' Ospizio degli Esposti di questa città nasceva addì 5 Decembre 1878 una Bambina Microcefalica non a termine, ma nell' ottavo mese di gestazione. Invitato dopo due mesi a vederla dall' esimio nostro Collega Cav. Dottor Cesare Belluzzi, medico ed ostetrico peritissimo presso quell' Ospizio, andai non molto di poi per quella, e non appena giunto che mi fu condotta davanti una giovane donna che aveala in braccio, ed era sua madre. Trovai la bambina veramente tale quale dicevasi. Aveva il cranio piccolo, assimetrico, ricordante il tersitico, detto aguzzo da Omero (4); la fronte stretta, bassa, obliqua con una eminenza media tondeggiante, resa apparentemente maggiore da due avvallamenti laterali ed alquanto carenata lungo la linea media. La fontanella anteriore non sentivasi: il bregma piuttosto basso, ma prominente in tutta la sua media lunghezza con a lati una depressione arcuata limitante le bozze parietali nella loro parte superiore: la regione occipitale piana con nessuna traccia di fontanella posteriore, terminata superiormente da un rialto semicircolare corrispondente alla sutura lambdoidea. Aveva poi gli occhi grandi anzi che no, la regione mascellare non altrimenti che il cranio, assimetrica, breve e larga già come nei bambini, con zigomi piuttosto sporgenti. la quale larghezza tanto più appariva per la strettezza sunnotata della fronte: naso grosso; bocca mediocre; mento acuto. Il restante del corpo era piccoletto e gracile alquanto: i membri però n' erano ben tagliati. Alla madre che accarezzavala, pareva ch' ella talvolta sorridesse, e così agli altri indistintamente; e seppi dopo la morte di lei che rideva anche quando fosse stata sola, essendosi dalle donne astanti non di rado sorpresa in quell' atto: il quale poi o procedeva da qualche piacevole sensazione ch' ella provasse, o vero era un moto convulsivo. Gridava poco: poppava volentieri, e nulla offriva d' anormale nelle sue funzioni. La madre poi non era certo avvenente della persona, non però deforme, nè aggiugneva mezzanità di statura, ed aveva temperamento scrofoloso. Il suo cranio altresì era piuttosto piccolo e corto con fronte bassa e un po' obliqua. Era donna di piccolissima levatura. Nulla ho potuto sapere del padre. Queste le particolarità che raccolsi in quella visita. Avrei amato, morta che fu la piccola Microcefala, attingere qualche altra

(1) Memoire sur les Microcéphales on Hommes-singes. Genève 1867.

(2) Etude anatomique du crane chez les Microcéphales. Paris 1874.

(3) Una Microcefala, osservazioni anatomiche ed antropologiche ecc. Torino 1876.

(4) Vedi Iliade. Lib. II, v. 219. φοξὸς ἔην κεφαλήν.

notizia, massimamente dalla madre, ma non vennemi fatto. Quelle che seguono, tengo dalla gentilezza del sullodato Dott. Belluzzi, la relazione del quale qui piacemi trascrivere:

„ La piccola Enrica, che questo era il nome della Bambina Microcefalica, nei
„ primi tre mesi dopo la nascita nulla offrì di molto notabile: ebbe bensì per alcun
„ tempo catarro bronchiale accompagnato da dimagramento, sì ch' ella era dive-
„ nuta debolissima. Dopo i tre mesi cominciarono disturbi nervosi a carattere
„ convulsivo. L' attacco cominciava con agitazione rilevata da inquietezza e da
„ grida talora con cianosi, talora con arrossamento semplice della faccia, indi rag-
„ giungeva il massimo grado in mezzo a convellimenti di tutti gli arti, non che
„ a movimenti del tronco, ne' quali era manifesta ora una contrazione dei muscoli
„ tutti della nuca, ora dei lati del collo solamente. Alcune volte l' accesso finiva
„ col sonno: altre volte era seguito da maggior irrequietezza. Questi accessi da
„ prima si presentavano presti in numero di 4-5 e fino a 11 in un giorno, durando
„ ognuno circa da 5 a 10 minuti. Dopo una ventina di giorni presero a farsi più
„ rari, ma sempre con li stessi caratteri, e l' intervallo fra ogni accesso aumen-
„ tando, si giunse al punto che non compariva più che dopo due mesi, e perfino
„ verso la fine di Luglio 1879, con un intervallo cioè di due mesi e mezzo. La
„ cura usata fu il bromuro di potassio che dapprima parve mitigare gli accessi
„ per la intensità e la frequenza, ma poi non continuò nel favorevole risultato.
„ Anche lo zinco non ebbe alcun effetto marcato sugli accessi. Un nuovo accesso
„ n' ebbe dunque alla fine di Luglio ed altro 10-12 giorni dopo in Agosto. Verso il
„ 25 Agosto sopravenne catarro acuto con segni di grave prostrazione e si rin-
„ novarono altri tre accessi convulsivi con intervalli di poche ore: la bambina
„ cessò di poppare, e morì il 1° Settembre 1879, cioè non ancora compiuti nove
„ mesi dalla nascita „.

L' indomani per tempissimo n' ebbi il cadaverino colla trascritta relazione. Egli era gracile anzi che magro, ed aveva la lunghezza di 53 centim. dal vertice alla regione plantare del calcagno, e pesava 2910 grammi. Mia prima cura fu quella di farne cavare la forma della testa con porzione di tronco in gesso e farne il getto pure in gesso: donde il disegno del ritratto di quella in due vedute anteriore e laterale che vedi nella Tav. I. Fig. 1-2. Queste due figure confermano a pieno le particolarità notate nella testa della Microcefala, allora quando la visitai qualche mese dopo la nascita nell' Ospizio degli esposti. Fattomi poi subito a notomizzare il cranio e trarne il cervello, che era la parte che più calevami, segando circolarmente il cranio ne trovai le pareti molto grosse, ed aperta la dura meninge, sgorgò una certa quantità di liquido rossigno. Questa meninge era alquanto più grossa del solito ed opaca e come sclerotizzata, e tolta che fu, mi si offerse il cervello che era piccolissimo, nè ben riempiva la cavità, massime nella regione frontale, dove distava dalla mentovata meninge da sei in sette millim., e questo spazio era occupato dall' aracnoide e da un umore sanguigno situato tra esso lei

e la pia meninge, dal quale umore erano esse altresì inzuppate. Quest' ultima membrana aveva nella restante sua estensione i vasi sanguigni più del solito iniettati. Tratto poi con tutta diligenza di sito il cervello così avviluppato dall' aracnoide e dalla pia, e pesato, mi riescì di 69 grammi e quasi trenta centigrammi; e spogliato alla meglio di quelle nella regione anteriore, e misurato, lo trovai lungo sessantacinque millim. e largo nella sua maggiore larghezza cinquantotto: onde l' indice cerebrale fu di 89, 23. Benchè abbastanza sodo e quindi maneggievole senza guasti di momento, nondimeno volli metterlo nello spirito di vino rettificatissimo per esaminarlo poscia in una col cranio a mio grande agio, e passai ad osservare i visceri degli altri due ventri.

E aperto il torace scorsi subito in esso come una stasi sanguigna, apparendomi i vasi, e le vene in ispecie, turgidissimi di sangue. I polmoni erano iperemici e la glandola timo assottigliata, piccola, punto volta a degenerazione grassosa, ma integra tuttavia de' suoi lobetti e della sua struttura e del peso di neanche un grammo. E messo in vista il cuore coll' apertura del pericardio, era pur esso molto disteso da sangue, massime in corrispondenza delle sue cavità destre, e recava una ragguardevole quantità di pinguedine accumulata ne' solchi longitudinali e circolare e lungo le diramazioni secondarie e terziarie de' suoi vasi nutrizi, ed all' apice: cosa straordinaria avuto riguardo alla età della Microcefala. Venuto in sospetto che potesse esservi un principio di degenerazione adiposa, ne esaminai le carni al microscopio, ma non sì tosto n' ebbi incominciato l' esame che mi convinsi della vanità del sospetto. Vuotatone le cavità del sangue ond' erano soverchiamente piene, me n' apparvero le pareti e le valvole normali, e chiuso il forame ovale. Il condotto arterioso poi era trasmutato in un sottile funicello tutto impervio.

Nello addome mi si presentarono innanzi tratto gli intestini oltre modo gonfi per gas formatisi entro esso loro; erano iperemici, anzi internamente flogosati. Il fegato, la milza, le glandule mesenteriche, i reni ecc. ingorgati di sangue. La cava ascendente e la porta turgide anch' esse del medesimo umore. Le parti genitali ottimamente conformate: le ovaia grandi; e tagliate mostravano patentissime le vescichette o follicoli di Graaf. Cercatone l' ovulo al microscopio, non mi venne fatto di scoprirlo.

Finalmente nulla d' anormale incontrai negli arti, esaminati soprattutto quanto allo stato delle loro ossa e della loro muscolatura.

Torno ora alle parti più importanti della nostra Microcefala, vo' dire il teschio osseo ed il cervello. Il primo vedesi ritratto intero in cinque aspetti nella Tav. II, ed aperto nella Fig. 8, 9 Tav. III. Non è d' uopo notare che le fig. 3, 4, Tav. II convengono appuntamente col prospetto e col profilo della Microcefala rappresentati nella Tav. I. E per fermo il cranio apparisce a prima vista piccolo a rispetto della faccia. E qui a scanso di equivoci dirò che per faccia intendo le ossa delle due mascelle, secondo che ne detta l' anatomia descrittiva: onde limite

superiore di esso lei per me sono le suture naso-frontale, e fronto-iugale, e non i margini sopraorbitali riuniti mediante una linea trasversale fattizia che va dall' uno all' altro di quei margini, secondo che vogliono certi antropologi moderni un po' troppo novatori: i quali così considerando cadono in contraddizione, poichè quella parte della porzione frontale qui recata artificialmente alla faccia, recano altrove al cranio, misurandone l' arco frontoccipitale. Che se lor piace di confinare più estesamente la faccia comprendendovi una porzione di frontale, non è mestiero di novelli insegnamenti, chè ne abbiamo di antichi ottimissimi portici pure dall' Anatomia descrittiva nella contemplazione e nello studio degli ovati del teschio osseo, tra' quali a tutti è conosciuto l' ovato facciale corrispondente a quella parte del capo denominata *glabra* dagli antichi, la quale non è che la faccia, cominciando dal confine anteriore de' capelli nel sincipite, e discendendo giù giù fino al mento. Con che io credo avere sufficientemente risposto a chi si è pigliato la briga di redarguirmi aver io seguito metodi antropologici dismessi. Lasciamo andare se siano veramente dismessi: dirò solo che i nuovi non vogliansi accogliere con troppa leggerezza, e preferire se non quando abbiano uno incontestabile vantaggio sugli antichi. Ma assai di ciò: veniamo alla considerazione del cranio.

Questo adunque, oltre le particolarità suddivisate tratteggiando con parole la Microcefala da viva, ha di notabile che le sinimensi e le fontanelle sono al postutto scomparse, di guisa che quasi crederebbesi non ci fossero mai state. In luogo loro occorrono suture e sinostosi. Quelle sono più presto armoniche che dentate, come apparisce guardando la coronale, la sagittale, la lambdoidea e le laterali del cranio, salvo la squamosa del temporale. La sutura frontale è scomparsa eccetto che nella porzione nasale ove ne ha un vestigio in cui è intercalato un sottile ossetto longitudinale, Fig. 3 Tav. II. Tra la macchia rosso-scura inferiore 1, e la superiore 2 ibid., e Fig. 4-6, nel luogo della sinostosi risalta una linea longitudinale a modo di leggier carena. Le dette macchie poi non occorrono semplicemente nella porzione frontale dell' osso frontale, ma e nei parietali in 3, 3, a' lati della sutura sagittale, e lungo la sutura coronale in 4, 4, e lungo la lambdoidea in 5, 5, e presso alle suture sfeno-fronto-parietale e squamosa temporale in 6, 6, 6 Figure cit. e Fig. 5 Tav. cit. Esse sono formate dal pericranio e da una falda ossea reticolata sottoposta, aderentissima a quello ed alla tavola esterna delle ossa, e molto vascolare, la quale falda accresce naturalmente la grossezza delle ossa, come è manifesto in 7, 7 fig. 8-9, Tav. III, e indurrebbe quasi a credere ch' esse aumentassero per soprapposizione (1): ma tale maniera di aumento non è cosa normale ed è effetto di malattia o flogosi del pericranio e delle ossa. Al di fuori delle macchie descritte le ossa della volta offrono una moltitudine di forellini per-

(1) Non vuolsi confondere questa soprapposizione coll' incremento per apposizione indicato da Spigelio, essendo questa una giunta che si fa nelle estremità delle ossa, un complemento, laddove quella è giunta che si fa alla superficie di un osso già formato. Vedi *de formatu foetu in Op. om. Adriani Spigelii. Amstelodami* 1645 pag. 27

corsi da esili vasi pieni d' atro sangue, Fig. 3, 4, 5, 6 Tav. II; e sollevando a loro termini le falde ossee delle macchie veggonsi tali forellini o vasi sanguigni pur sotto le medesime, le quali ricevono poi diramazioni da essi. Detti vasi sanguigni penetrano per la tavola esterna, e consumansi per la massima parte nel tessuto diploico molto succoso e abbondante, donde la straordinaria grossezza delle ossa dimostrata nella Fig. 8-9 Tav. III, ed accresciuta, come vedemmo, dalle falde sopradette. E che nel tessuto diploico avvengane il quasi intero consumamento, ne dà prova la superficie interna della volta craniense, o tavola vitrea di quelle ossa, la quale ne va senza, tranne però alle suture, alle sinostosi ed alla porzione lambdoidea dell' occipite, nei quali luoghi hanno numerosissimi forellini 11, 11, 12, 13 Fig. 8 Tav. III, che non mostrano contenere vasi sanguigni e che rendono un aspetto reticolato o spugnoso simile a quello che occorre generalmente nella faccia interna delle ossa della base di questo cranio, e cioè nel corpo e nelle grandi ale dello sfenoide, nella porzione squamosa del temporale, nella base della petrosa e nell' occipite: il quale aspetto è pur quello delle ossa fetali giovanissime. E poichè il discorso è caduto sulla interna superficie della volta, noterò che la sutura sagittale è al tutto obliterata, e similmente la lambdoidea in corrispondenza della fontanella posteriore: pel quale fatto è chiaro che essa volta era impedita dal potere ulteriormente crescere in lunghezza e larghezza.

In cranj di neonati e d' infanti dell' età della Microcefala le bozze parietali ne segnano la maggiore larghezza; ma qui la maggiore larghezza è subito al di sopra della sutura squamosa del temporale: particolarità conveniente coll' obliterazione della sutura sagittale. E conviene pure coll' obliterazione completa della frontale la molta strettezza della fronte, e il confluire o concorrere che fanno quasi insieme le bozze frontali, separate solo dalla carena media dell' eminenza tondeggiante notata da principio, Fig. 3, Tav. II. Guardando poi il cranio lateralmente, trovi la linea semicircolare temporale verso la parte media della macchia 6, 6, 6, Fig. 4, Tav. II: l' apofisi zigomatica non arcuata, ma diritta, corrente obliqua dallo indietro in avanti e dallo interno allo esterno all' osso jugale: la fossa temporale profonda, e similmente la pterigo-mascellare con esso lei continua: ampio il meato auditorio esterno osseo, in gran parte formato, ma interrotto nella parete inferiore da una ragguardevole incisura chiusa da cartilagine: la membrana del timpano molto obliqua: il processo mastoideo ben formato, ma meglio o più perfetto a sinistra che a destra. La veduta posteriore del pari e la laterale, Fig. 4-5, Tav. II, mostrano la porzione lambdoidea in nulla parte orizzontale, ma tutta ascendente, e piana sopratutto nella metà inferiore: donde un notabile accorciamento della base craniense. Essa porzione manca della tuberosità occipitale esterna; offre nondimeno la cresta del medesimo nome e le linee semicircolari od arcuate, e lascia vedere per la suddetta disposizione una parte del segmento posteriore del grande foro occipitale, che esso altresì alquanto ascende, ed apparisce più posteriore del solito; poichè corrispondendo normalmente il lembo anteriore del foro circa al

punto medio di una linea tirata dai denti incisivi superiori al limite posteriore dell' occipite, (linea basilare), nella Microcefala essendo cotal linea lunga 90 millim., 56 ne rimangono al davanti di quel lembo, e 34 al di dietro (1). Detto foro poi è romboidale ed ampio, Fig. 7, Tav. II — Fig. 9, Tav. III, e delle quattro ossa che con la loro riunione il compongono, non ha esternamente che la porzione basilare o corpo che sia distinto, essendo la sincondrosi tra la porzione lambdoidea e le condiloidee scomparsa quasi affatto o convertita in sinostosi, laddove internamente è anche patentissima, Fig. 9, Tav. III. Nella restante superficie esterna della base non trovo cose che meritino particolare menzione. Ma nella superficie interna sono notabili le fosse anteriore e posteriore, essendo che amendue sono molto piccole, e l' anteriore è limitata anteriormente e lateralmente da una linea sinuosa, concava nella sua parte media e convessa ai lati: posteriormente poi da una linea arcuata come di solito. I processi dello Ingrassias o piccole ale sono molto grosse ed offrono una macchia 8, 8, Fig. 9, Tav. III estesa in 9, 9 e 10, 10, la quale macchia ritrae da quelle che vedemmo nella faccia esterna della volta craniense. La fossa etmoidale è molto profonda, e prolungata in avanti più che le regioni sopraorbitali. La lamina cribrosa dell' etmoide è ossificata, salvo che nella estremità anteriore media, e media posteriore; ed è compatta e grossa: l' apofisi *cristagalli* ha l' epifisi 14, corrispondente alla sua sommità. La fossa posteriore è corta, non arcuata posteriormente, ma piana. Il *clivus sphenoidalis* è coperto da una falda cartilaginea 15, la quale si estende a' processi clinoidei posteriori e comprendeli, e discende insinuandosi tra il corpo dello sfenoide e la porzione basilare dell' occipite, qual mezzo di unione di queste due parti. Tutti i fori della base occorrono, e similmente nella faccia interna del cranio i solchi vascolari. La grossezza delle ossa che lo compongono, varia poi da poco più di un millim. a quattro. Le seguenti misure che ho prese sul medesimo, valgano a completarne la descrizione.

Misure prese allo esterno.

Diametro longitudinale od antero-posteriore . . .	millim.	91
„ trasverso massimo	„	75
„ verticale	„	60
Circonferenza orizzontale	„	261
Segmento preauricolare di questa circonferenza . .	„	130
„ postauricolare della medesima . . .	„	131
Arco fronto-occipitale	„	160
Lunghezza del grande foro occipitale	„	24
Dal lembo anteriore del grande foro occipitale alla sutura naso-frontale	„	59

(1) Non si sono misurati gli angoli di Daubenton e di Broca, perchè segando perpendicolarmente il cranio si sarebbero resi dubbi ed anco perduti certi caratteri importanti del medesimo.

Circonferenza verticale	„	243		
Curva della porzione frontale della circonferenza verticale	„	56		
„ della porzione parietale della medesima	„	54		
„ della porzione occipitale della stessa	„	50		
Arco biauricolare	„	160		
Corda di quest' arco o diametro biauricolare	„	55		
Diametro bimastoideo	„	60		
„ trasverso del grande foro occipitale	„	21		
„ trasverso frontale inferiore	„	60		
„ trasverso frontale superiore	„	60		
Indice cefalico, o proporzione tra la lunghezza e la larghezza del cranio, considerata la prima come 100			82,42	
Indice verticale, o proporzione tra la lunghezza e l' altezza del cranio, considerata la prima come 100			65,93	
Indice delle circonferenze, o proporzione tra la circonferenza orizzontale e verticale, considerata la prima come 100			93,10	
Indice del grande foro occipitale, o proporzione tra la sua lunghezza e la sua larghezza, considerata la prima come 100			87,50	

Diametri della cavità craniense.

Diametro antero-posteriore	millim.	82		
„ trasversale	„	68		
„ verticale	„	53		
Proporzione tra la lunghezza e la larghezza della cavità del cranio, considerata la prima come 100			82,92	
Proporzione tra la lunghezza e l'altezza della stessa cavità, considerata la prima come 100			64,63	
Angolo sfenoidale di Welcker				140°

La faccia presenta le particolarità già notate parlando della regione mascellare e zigomatica della Microcefala, e la sua assimetria è manifestissima ed apparisce subito nelle orbite. Già riunite per sinostosi ne sono le due metà della mandibola. Di denti spuntati non hanno che gli incisivi inferiori. Valgano a compierne la descrizione le seguenti misure:

Lunghezza della faccia	millim.	50
Larghezza fra i centri dei zigomi	„	62
Dalla sutura naso-frontale alla spina nasale	„	22

Dalla detta spina al bordo alveolare superiore	„	11
Lunghezza del palato osseo	„	26
Larghezza massima del medesimo	„	21
„ „ del naso	„	12
Altezza dell' orbita o suo diametro verticale	„	22
Suo diametro trasversale	„	28
Distanza del mento agli angoli mandibolari	„	44
„ fra gli angoli mandibolari	„	54
„ fra i condili	„	61
Altezza della mandibola al mento	„	15
„ „ al foro mentale	„	24
„ del ramo mandibolare in corrispondenza del condilo	„	24
„ „ in corrispondenza dell' apofisi coronoide	„	23
Larghezza del ramo o branca mandibolare	„	16
Indice facciale, o proporzione tra la lunghezza e la larghezza della faccia, considerata la prima come 100		124
Indice nasale, o proporzione tra la lunghezza e la larghezza del naso, considerata la prima come 100		54
Indice orbitale, o proporzione tra l' altezza e la larghezza dell' orbita, considerata la prima come 100		127,27
Angolo facciale		75°

Ora della parte che mi ha maggiormente stimolato ad illustrare coll'anatomia la piccola Microcefala, vo' dire il cervello. Vedemmo di sopra ch' egli era piccolo e di poco peso; ma avendolo tenuto per due mesi nello spirito di vino, rifattomi sopra esso e ripesatolo, l' ho trovato impicciolito di vantaggio, e scemato più di 24 grammi del suo peso, per forma che se io l' avessi pesato sol dopo quella lunga dimora nello spirito di vino, avrei creduto essere il suo peso solo 45 grammi, e non 69 e quasi 30 centigrammi come subito che l' ebbi tratto dal cranio. Metteva conto notare questa differenza, poichè dimostra quanto si allontani dal vero il peso di un cervello stato a lungo nello spirito di vino. Oltre la picciolezza scorgonsi in esso lui altri caratteri molto attendibili; i quali però non sono tutti suoi propri, siccome quelli che occorrono eziandio in altri Microcefali, salvo differenze di grado. E ponendomi a divisarli dirò in prima che gli emisferi cerebrali appena coprono il cervelletto, Fig. 18-19, Tav. IV, e sono anteriormente molto corti, di guisa che i nervi olfattorî protraggonsi di molto oltre l' estremità anteriore di quelli ibid: lo che si accorda con la disposizione della fossa anteriore della faccia interna della base craniense, e specialmente della fossetta etmoidale addietro descritta. In secondo luogo che la valle o fossa del Silvio è largamente aperta, e l' isola del Reil tutta allo scoperto presso a poco come in un feto quadrimestre, e liscia, o vero senza quasi affatto vestigio delle circonvoluzioni brevi od insulari, chè così

potrebbero chiamarsi, Fig. 18 cit. Terzamente che le altre circonvoluzioni sono semplicissime, scarse ed in certi luoghi appena divisate ed anco nulle (Vedi le Figure della Tav. IV), come fia manifesto più avanti particolareggiandole, essendone mestiere pel gran momento ch' elle hanno in sè ed appo coloro che studiano la Microcefalia. In quarto luogo che dir si deve altrettanto rispetto a certi lobi, siccome quelli che mostransi imperfetti o manchevoli o vero sono indistinti, (Fig. 16-19, Tav. IV). Quinto che l' isola sopradetta è manifestissima eziandio guardando il cervello dalla base, (Fig. 17, Tav. IV). Sesto che questa (Fig. 17 cit.) ha le sue parti così; cioè la sostanza perforata anteriore, il *tuber cinereum*, l' infundibolo, l' ipofisi ben espresse, ma non egualmente i tubercoli od eminenze mammillari o candicanti, la sostanza perforata media o posteriore, poverissima di forellini, essendovene solo due da ciascun lato dell' estremità anteriore delle gambe del cervello internamente subito al di dietro del *tuber cinereum:* le gambe del cervello un po' piccole e similmente il nodo o ponte del Varolio. Settimo che il cervelletto è desso altresì piccolo. Ottavo che normale apparisce la midolla allungata. Nono che hannovi tutti i nervi cerebrali ben formati (Fig. 17 cit.), tra' quali l' olfattorio mostrasi molto lungo e protratto oltre l' estremità anteriore degli emisferi od oltre i lobi frontali, come già fu notato (Fig. 17-18-19, Tav. IV). Decimo che il corpo calloso è piuttosto sottile nella sua metà posteriore, e manco dell' ingrossamento che chiamano tuberosità o *splenium,* (Fig. 19 cit.) Undecimo che il centro semiovale di Wieussens, o tetto de' ventricoli laterali, è proporzionato alla grandezza degli emisferi ed allo stato delle circonvoluzioni ed alla grandezza di essi ventricoli, già prolungati nelle solite tre corna, ed aventi l' anteriore stretto e piccolo ed il medio e 'l posteriore forse un po' più capaci di quel che converrebbe. Duodecimo che il corpo striato, il talamo ottico, la *taenia cornea*, il grande e 'l piccolo hippocampo, l' eminenza collaterale, la fimbria, la fascia dentata di Tarin, dalla picciolezza infuori, non sono notabili per verun' altra particolarità. Decimoterzo che il setto lucido è piuttosto crasso ed opaco, e la volta a tre pilastri ben conformata, salvo quanto si notò riguardo alla sua terminazione. Decimoquarto che il terzo ventricolo, i tubercoli quadrigemini, la glandula pineale, le commessure che scorgonsi in quello, la *valvula magna cerebri,* il quarto ventricolo nulla offrono che meriti particolare considerazione. Decimoquinto che i plessi coroidei sono grossi e polposi e pieni di granelli. Decimosesto infine che le arterie carotidi cerebrali, date le oftalmiche, hanno ciascuna il diametro di un millimetro, e che così è presso a poco rispetto la capacità delle vertebrali.

Detto sommariamente quanto s' appartiene alle diverse parti del cervello, ripiglierò il discorso delle circonvoluzioni. Toccai già la loro semplicità e scarsezza, e 'l loro essere in certi luoghi o nulle o quasi nulle, circostanze convenienti colla piccolezza degli emisferi e del cranio non che del suo stato sinostotico, senza però vedere in questo un rapporto causale nella formazione di quelle. E ciò dico che sebbene gli anatomici generalmente avvisino formarsi le circonvoluzioni per lo

incremento degli emisferi, ed in ispecie pel vegetare e lussureggiare delle loro irradiazioni midollari alla superficie, già coperte ed abbracciate dalla sostanza corticale, nondimeno da certi è tenuto non bastare alla produzion loro la divisata cagione, ma essere eziandio richiesta una sproporzione tra l' incremento degli emisferi e del cranio, questo crescendo meno rapidamente di quelli, per forma che non trovando sufficiente spazio sono costretti a ripiegarsi sopra loro stessi e le pieghe che ne avvengono, sono le circonvoluzioni (1). Contro questa meccanica maniera di spiegarne la genesi opposi, dieci anni or sono (2), che ne' mostri exencefali e nelle ernie cerebrali il cervello propriamente detto escito di sede può essere normale o quasi normale, corredato delle sue circonvoluzioni non mica in rudimento, ma bell' e formate, nè così disordinate ed irregolari, come alcuno potrebbe a prima giunta ritenere, da non potersene distinguere o riconoscere il tipo. Ciò m' avea fatto aperto e manifesto un esempio che eramene occorso, ed erami confermato da molte osservazioni registrate dallo Spring nella sua classica Monografia dell' ernia cerebrale (3): le quali osservazioni saranno certamente avute in maggior pregio che la mia, essendo ch' egli narrandole non guardò nulla nulla all' argomento di cui qui si ragiona. Laonde la parte meccanica che vuolsi attribuire al cranio nel producimento delle circonvoluzioni, o vero l' occasione da lui data agli emisferi di comporsi in circonvoluzioni pel discorde incremento sopradetto, non è che una ipotesi fondata sopra una non retta interpretazione dei fatti. L' incremento del cranio e del cervello vanno di pari passo, nè questo può essere costretto da quello, essendo per le sinimensi cedevolissimo, nè le parti dure valgono davanti la forza vegetante e 'l crescere delle parti molli, ed essendo inferiori, posto che fossero anche durissime e grossissime, per la efficacia premente di quelle sono sforzate a ricessarsi, ad assottigliarsi ed eziandio ad ammorbidarsi. A conforto de' quali placiti, del primo in ispecie, produrrò la regola generale che le parti contenenti seguono l' incremento e l' ampliamento delle parti contenute e da queste s' informano. Così veggiamo al torace, così all' addome, così agli organi o visceri compresi dalle loro capsule, così all' esterno ambito del corpo invaginato della pelle, e così è senza fallo rispetto al cranio ed al cervello, il primo crescendo ed ampliandosi ed informandosi dal secondo. Ognor concorde e simultaneo è lo svolgimento e l' incremento d' ambidue, la grandezza ed ampiezza del contenente addattandosi continua alla mole o al volume del contenuto. Il che è sì evidente

(1) Vedi Encyclop. Anat. Tom. VIII. Dévelop. de l' homme et des mammiferes ecc. Paris 1843 pag. 188. Les circonvolutions ne sont comme l' a fait remarquer Bear que l' expression du grand accroissement des vesicules des hémisphéres qui sont obligés de se plisser sur elles mêmes, parce qu' elles ne trouvent pas assez d' espace pour se loger, le crâne ne croissant pas avec une vitesse proportionée à la leur.

(2) Vedi la mia Memoria sul cervello ne' due tipi brachicefalo e dolicocefalo italiani nelle Mem. dell' Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Serie II. Tom. X. pag. 65.

(3) Mém. de l' Acad. royale de Médicine de Belgique, Tome troisième. Bruxelles 1854, vedi le pag. 144, 182-83, 192 ecc.

che non può ammettere verun dubbio. Il contrasto adunque o la differenza tra ambidue non istà in questo, ma nella estensione della superficie; chè la superficie degli emisferi cerebrali è molto più estesa che la superficie interna della cavità craniense. Ma facendo astrazione dalla parte di superficie degli emisferi corrispondente alla falce messoria, alle intercapedini od anfratti ecc. e solo considerando la porzione corrispondente a quella che gli appartiene, della craniense anzidetta, ben è chiaro che la sproporzione scompare. E qui naturalmente siamo condotti a ragionare della parte che abbiamo astratta dell' estensione nella superficie degli emisferi, e sopratutto di quella che riguarda gli anfratti, essendo essa veramente il punto principale. Posto che gli anfratti e le circonvoluzioni avvengano per lo ripiegarsi degli emisferi sopra loro stessi, convien supporre che essi e il cranio che gli corrisponde, fossero più estesi innanzi la loro comparsa, non potendosi immaginare come la membrana sacciforme degli emisferi debba piegarsi senza raccogliersi e restringersi in sè stessa, esibendo al cranio una minore estensione di superficie e senza che quella interna del cranio si accomodi a sì fatto cambiamento. La qual cosa certo non è, e chiunque abbia osservato la prima divisione o il primo solcamento che inizia le circonvoluzioni nella superficie degli emisferi innanzi liscia ed eguale e 'l progredire e perfezionarsi di quelle, sarà alieno, se mal non mi appongo, dal concetto di un ripiegamento della membrana degli emisferi sopra sè stessa per comporle, nè che esse si formino come le pieghe di un sacco vuoto ma disteso, che obbedisca ad una pressione esteriore. L' opera delle circonvoluzioni non comincia se non quando quella membrana ha acquistato sufficiente grossezza come ne' feti di cinque o di sei mesi; e quanto più questa grossezza aumenta, tanto più la detta opera progredisce e s' affretta e compiesi, giunta a quel tanto che dev' essere la grossezza medesima, come ne' feti della fine dell' ottavo mese o del principio del nono. Ben è vero che negli emisferi membraniformi di feti della fine del terzo mese o vero di feti del quarto occorrono molti solchi descritti e dimostrati da F. Tiedemann (1), ma questi solchi non vogliensi confondere come alcuni fecero (2), con quelli delle circonvoluzioni, i quali appariscono più tardi, o dopo che quelli si sono dileguati e la superficie degli emisferi è tornata liscia ed eguale pel maggiore ingrossarsi e distendersi della loro membrana. Il quale maggiore ingrossamento e distendimento non sarebbe poi troppo favorevole al detto ripiegamento di esso lei, e parrebbe ch' ella avesse dovuta essere più acconcia al medesimo, essendo più sottile. Ma lasciando da parte ciò, e divisando più d' appresso il principio e 'l procedimento del lavorio pel quale si operano le circonvoluzioni e la corrispondenza dello stato del cranio con esso, sono d' avviso che il concetto del ripiegamento possa tornare vano. Si contempli la Fig. 10 Tav. III rappresentante la faccia interna dell' emisfero destro

(1) Anatomie du cerveau ecc. trad. de l' Allemend par Jourdan, Paris 1823 pag. 54, 55.
(2) Encyclop. Anat. tom. cit. pag. cit.

di un feto quasi di cinque mesi, e mi si dica se i solchi longitudinali assecondanti l' hilo degli emisferi e le aree che rimangono al di sopra e al di sotto, e tra loro, abbiano somiglianza di pieghe venute per l' azione di una forza operante su quello dall' alto al basso e dal basso all' alto ad un tempo, o valgano a risvegliarne l' idea ? Io mi penso che ognuno risponderà che no ; ma se avesse però alcuno che volesse pur vedervi l' imagine di pieghe prodotte dalla divisata cagione, lo pregherei di dirmi perchè questa operando ha limitato i suoi effetti alla faccia interna, ed ha perdonato all' esteriore, la quale ne' feti di quel tempo è tutta liscia ed eguale, tratto la fessura del Silvio largamente aperta ? Sarà egli perchè il sacco membraniforme dell' emisfero è men grosso nel lato interno che esternamente ? Ma se fosse perciò, ond' è che quando la parete esterna di quel sacco è divenuta anche più grossa, come nel feto di sei mesi, alloraappariscono i solchi nella faccia esterna dell' emisfero, secondo che dimostra la Fig. 11 Tav. III ? E si noti che qui la forza cui s' attribuisce il potere di solcare e disporre a pieghe il sopradetto sacco membranoso, dovrebbe agire non solo in direzione diversa dalla prefata, ma in due direzioni diverse contemporanee, cioè dalle due estremità anteriore e posteriore dell' emisfero verso il mezzo od il centro, e nella doppia direzione designata nella faccia esterna, essendo che hannovi solchi trasversali all' asse dell' emisfero, e indizii di solchi paralleli a quest' asse consistenti in fossettine angolose, che di poi nel settimo mese si allungano, com' è manifesto per le fig. 12-13 Tav. cit., ed eziandio si uniscono : la qual cosa accade altresì nella faccia interna, secondo che ne dice la fig. 14 ibid. E le aree che i solchi circoscrivono, non sono ancora circonvoluzioni bell' e formate, ma informi e in più luoghi eziandio indistinte, o vero a frammenti o discontinue, richiedendosi in molte aree novelli solchi, i quali appariscono nell' ottavo mese, in cui le circonvoluzioni ti s' appresentano meglio disegnate Fig. 15 Tav. III, e crescono e si perfezionano, trovandosi già perfette, come fu detto, al principio del nono. Il descritto solcamento è da principio di solchi molto superficiali, e le aree pressochè piane, ma a poco a poco esse elevansi e crescono dallo interno allo esterno, aumentando così la grossezza della massa midollare del centro degli emisferi pel fatto de' vasi sanguigni che vi penetrano dalla pia meninge esteriore e forse anche dai plessi coroidei in quel tempo enormi e non ben separati ancora dalla superficie ventricolare, secondo che Tiedemann ha significato (1); e per tale elevamento i solchi riescono più profondi, cotal che se da prima poteva credersi si fossero formati dallo esterno allo interno, apparisce di poi ch' essi formansi dallo interno allo esterno. Lo che tutto mal si confà colla ipotesi che i solchi od anfratti e le circonvoluzioni na-

(1) Op. cit. pag. 87, 98, 99; ed a pag. 96 scrive che escivano dagli enormi plessi coroidei di un feto quinquemestre piccole ramificazioni vascolari « qui allaient gagner les parois du ventricule » e che sono cagione dell' aumento della sostanza bianca del centro ovale. Anche Demoulins professa un' opinione che differisce ben poco da questa: Journal de Physique, de Chimie et d' Histoire naturelle, Tome XCII. Paris 1821 pag. 167-68 — Vedi pure Manual d' Anat. gener. descrit. e pat. del corpo umano di G. F. Meckel, tradotto da G. B. Caimi, Tomo terzo. Milano 1826 pag. 439.

scano pel ripiegarsi sopra sè stessa la membrana sacciforme degli emisferi, e che le circonvoluzioni sieno pieghe; chè per l' esposto son' elleno piuttosto escrescenze o prominenze od allungamenti della sostanza midollare centrale suddetta, o meglio delle sue irradiazioni alla superficie coperte dalla sostanza corticale, come è stato detto di sopra. Per la qual cosa certi fra' moderni, quasi disobbligati dalla proprietà del linguaggio, chiamano pieghe le circonvoluzioni; chè ad esse piuttosto si conviene la denominazione di processi che applicaronle Malacarne e Rolando, e di processi intestinuliformi o enteroidei per la somiglianza che avvisaronvi colle anse intestinali. Ma discendendo allo stato del cranio per vedere s' egli abbia potuto costringere la membrana sacciforme degli emisferi a ripiegarsi sopra sè stessa per formare le circonvoluzioni, è chiaro per le cose dette che non l' ha potuto. Ma presupposto pure il contrario, sarebbegliene mancata l' occasione, poichè non aveva una parte più ampia o più estesa da costringere, ma una parte a lui proporzionata; chè quella che avrebbe tolta la proporzione, non eragli in contatto, nè appartenevagli. E l' appartenentegli svolgendosi e crescendo, ei non la poteva impedire per la sua mollezza e distendibilità e per un' incremento consenziente, di qualità ch' egli cresceva di pari, e se n' accomodava all' interiore impulso verso di lui : accomodamento che non gli era malagevole per la detta natura, la quale non viengli meno neppure allora quando le circonvoluzioni sono già perfette, come al principio del nono mese, in cui le sinimensi sono tuttavia larghe e cedevoli, le ossa sottili e tenere, e prive nella loro interna superficie delle impronte delle circonvoluzioni; le quali impronte avrebbero dovuto esserci, se il cranio avesse operato una coazione sul cervello, o questo su quello. Io adunque concludo che le circonvoluzioni si formano per lo svolgimento ed incremento soli del cervello, ed in ispecie pel vegetare e lussureggiare delle irradiazioni midollari alla superficie degli emisferi: ch' esse non sono pieghe della loro sacciforme membrana venute dal crescere men velocemente del cranio che dal crescere più veloce di essa; chè per contrario sono escrescenze, o prominenze, o gioghi, o processi che dir vogliansi, della esterna superficie della medesima, amplianti di molto colle faccie rispondenti a' solchi od anfratti essa superficie; al qual fine son' elleno date (1): che il cranio non ha parte alcuna nel determinarle o produrle, essendo stile della natura qualor voglia ampliare la superficie di una parte, non ampliando concordemente lo spazio entro cui è quella circoscritta, l' adoperare con simile magistero senza chiamare in aiuto la parte contenente, anzi questa essendo per sè impotente, secondo ogni apparenza, a concorrere all'operazione, siccome veggiamo p. e. alla membrana mucosa dell' intestino tenue, alle laminette branchiali dei pesci. Che se fosse altrimenti, noi dovremo avere nei cranj precocemente sinostotici non solo numerose circonvoluzioni, ma circonvoluzioni eziandio più torte, più spesseggiate di pieghe. La

(1) Così dicendo non intendo già porre che le circonvoluzioni siano date solamente a fin di aumentare la estensione della superficie cerebrale, quantunque questo anatomicamente apparisca come principale ufficio.

qual cosa è ampiamente contraddetta dalla nostra Microcefala, in cui le circonvoluzioni sono scarse e semplicissime.

Le quali circonvoluzioni facendomi ora a considerare e generalmente e particolarmente ne' varii lobi, dico che le tre grandi circonvoluzioni principali o maestre che io altrove contrassegnai coll' epiteto di marginali (1), cioè la marginale della fessura del Silvio o marginale esterna, la marginale del corpo calloso e della grande fessura cerebrale del Bischat, od hilo degli emisferi, o vero circonvoluzione marginale interna, e la grande marginale, o marginale dell' emisfero, sono perfettamente distinte (Fig. 16-18-19, Tav. IV) e poco o punto incise e torte, e la prima ha la sua porzione superiore o parietale, che costituisce principalmente l'*operculum* d' Arnold (2), molto elevata e lontana dalla temporale, non essendo cresciuta e calata a formare quell' opercolo; ond' è largamente aperta la fessura o fossa del Silvio, e l' isola allo scoperto, come già fu notato. Forse alcuno maraviglierà che io persista nell' ammettere queste tre circonvoluzioni come principali o maestre, dappoichè sonosi levate dal novero delle circonvoluzioni e rigettate; e fattosene strazio nelle novelle descrizioni, le sparte lor membra si sono assegnate a questo e a quel lobo cerebrale, trattone però la marginale interna cui s' è perdonato, concedendole grazia di vivere di sua vita. Ma io non intendo come si possano rigettar cose per sè naturalissime, e rigettarle in modo sì incompiuto. Le ragioni che si producono di tale rifiuto, sono che esse circonvoluzioni appartengono a' diversi lobi cerebrali; che descrivendole generalmente, si cade in ripetizioni inutili e fors' anche possevoli ad ingenerare confusione, avendosene a descrivere sott' altri nomi le porzioni spettanti a ciascun lobo nella descrizione particolare di quelle che ciascun lobo compongono; e che infine vuolsi che le circonvoluzioni dei singoli lobi siano tutte subordinate a questi medesimi. Affè che elle sono ragioni di molta efficacia a persuadere ! E vaglia il vero. Se la grande marginale e la marginale esterna per-

(1) Vedi la citata mia Memoria pag. 69-70.

(2) *Icones cerebri et medullae spinalis.* Tab. VI, Fig 1 δ *operculum lobi superioris.* Ho detto principalmente, poichè nella Fig. 2 della medesima Tavola l' Arnold per mettere in vista l' isola da lui chiamata « *lobus opertus* » ha tagliato via non solo la porzione parietale della circonvoluzione marginale in discorso, ma la parte esterna eziandio della sua porzione frontale, ed alquanto abbassato il lobo temporale; donde s'argomenta essere l' opercolo d'Arnold esteso anche alle due ultime parti divisate, o in altri termini a tutta la detta circonvoluzione marginale, divenuta così tutta opercolare. Alcuni tacciano d' impropria questa denominazione di Arnold, e dicono ch' ella genera confusione, essendo che il Gratiolet l' ha di poi applicata al margine posteriore esterno della fessura occipito-parietale, che in molte scimmie copre e nasconde certe circonvoluzioni profonde che passano dal lobo occipitale al lobo parietale e sono chiamate circonvoluzioni di passaggio. Ma con loro buona pace, cotale taccia vuol ritorcersi; chè la confusione non l' ha fatta l'Arnold, ma sì l'autore Francese, il quale ha voluto con un nome, già consacrato a significare una cosa, nominarne un'altra, che in anatomia umana mal sarebbe così contrassegnata, non essendo ella data a quell'ufficio. Ma non è malagevole togliere l' inconveniente, chiamando il primo « *operculum insulae seu lobi centralis, seu operti* » ed il secondo « *operculum occipito-parietale seu transitivum* » siccome quello che copre circonvoluzioni di passaggio.

corrono diversi lobi, e noi le scompartiamo artificialmente in altrettanti parti, quanti sono i lobi da esse percorsi, non altrimenti adopera la marginale interna, che distingueremo in porzione frontale, parietale e temporale; essendo i tre lobi a' quali essa appartiene nel suo corso intorno al corpo calloso ed all' hilo dell' emisfero. Ma questa circonvoluzione marginale interna mantiensi, dicono, per esser' ella termine della corteccia cerebrale. E non sono forse termini, e termini non meno importanti, anche le altre due, quella della fessura del Silvio e quella posta a distinzione delle due faccie di ciascun emisfero? Non essendo dunque sufficienti queste ragioni, rimangono tutt' e tre le dette circonvoluzioni principali, o maestre, subordinate all' emisfero cui appartengono; comuni però a que' lobi, della composizione dei quali elle partecipano. Ma abbastanza di ciò, passiamo alla distinzione degli emisferi in lobi.

Un tempo non furono negli emisferi cerebrali contemplati che tre lobi, frontale, temporale ed occipitale, i quali si dissero solo distinti alla base del cervello, ed accolti nella fossa anteriore, e media della base craniense, e l' ultimo si disse giacere sopra il tentorio e corrispondere alle fosse superiori o cerebrali della faccia interna del lambda occipitale. Appresso si aggiunsero due altri lobi, l' *Insula* del Reil e il lobo superiore o parietale di Arnold; e l' isola si trovò corrispondente al corpo striato, e gli altri quattro alla cavità media ed ai processi o corna dei ventricoli laterali. Ultimamente si sono voluti limitare i detti lobi pei solchi della superficie degli emisferi, e cioè pel solco o fessura del Silvio, pel solco occipito-parietale, o parietale posteriore, pel solco o fessura del Rolando, e pel solco fronte-parietale, tolte le linee date ad artificiarne i confini, e dico artificiarne, poichè la divisione degli emisferi in lobi è fatto più d' arte o di scienza che di natura. L' ultima maniera della detta divisione è l' usitata d' oggidì, e parmi che sola sia troppo esclusiva, e facile a trarre in errore. La fessura del Silvio, dicono, separa il lobo temporale o temporo-sfenoidale dal parietale e dal frontale, ma divide in un medesimo l' emisfero in due piani, uno superiore maggiore, l' altro inferiore minore, confusi posteriormente tra loro: la fessura del Rolando divide, dicono, il lobo frontale dal parietale, ma in pari tempo separa il piano superiore degli emisferi in due parti pressochè eguali, anteriore l' una, posteriore l' altra: il solco che io chiamai parietale posteriore, ora denominato occipito-parietale, distingue il lobo occipitale dal parietale. Ma esteriormente dove questo solco nell' uomo è pochissimo esteso, come se ne completa la distinzione? E più, da quale solco è determinata la distinzione del lobo temporale dall' occipitale? Da nessuno. Ora in questo caso e nel primo a che cosa ricorrere per la bisogna se non a qual cosa di fattizio, all' artificio di linee? E linee artificiali pur si adoperano. Proprio qui si attaglia quel notissimo adagio *incidit in Scyllam qui vult vitare Charybdim.* La fessura del Rolando poi recata a distinzione di lobi ha l' inconveniente di formare un lobo frontale stragrande ed un lobo parietale piccolissimo. Ma considerando che il lobo frontale appartiene naturalmente alla fronte da cui si denomina; considerando che

la fronte è quella parte nuda del cranio confinata superiormente dal capillizio, inferiormente dai sopracigli e dalla radice del naso; considerando infine che il lobo frontale come segmento dell' asse nervoso, non ha da trapassare i termini della parte data a contenerlo, formata dalla vertebra o zona anteriore o frontale, egli è chiaro che esso lobo non può avere per confine la fessura del Rolando, siccome quella che non è nella compresa di quella vertebra o zona, ma sì della vertebra o zona media o parietale. Ben è vero che la topografia de' lobi, come delle circonvoluzioni del cervello vuol trarsi dal cervello medesimo; ma non è necessario estendere per ciò il lobo frontale fuor misura. Nella superficie esterna degli emisferi cerebrali ha un altro solco situato in corrispondenza dell' estremità esterna del margine posteriore della regione inferiore od orbitale del lobo frontale e della estremità anteriore della porzione orizzontale superiore della circonvoluzione marginale della fessura del Silvio, o vero della estremità anteriore dell' opercolo insulare di Arnold, il quale solco è sì costante quanto quello del Rolando, ed apparisce nel medesimo tempo, secondo che dimostra la Fig. 11-15 *G*, Tav. III. Questo solco che fu da me denominato solco fronto-parietale (1), si presta, unito però ad una linea artificiale, a limitare mirabilmente il lobo frontale all' esterno in una maniera confacente colle suesposte considerazioni, nè discordante con veruna delle tre seguite dagli anatomici a distinguere gli emisferi in lobi. Che se questo solco per anomalia o difettiva formazione mancasse, come pur avviene in qualche raro caso della fessura del Rolando, potrebbero supplirne la mancanza le parti divisate aventi relazione con esso lui. Ma, dicono, così definito il lobo frontale riesce troppo piccolo; e poi le circonvoluzioni longitudinali che gli spettano, convien spezzarle e chiamarle di un nome composto, cioè parieto-frontali o fronto-parietali. E non si spezzano e chiamano di un nome composto le circonvoluzioni del lobo temporale continuantisi con quelle dell' occipitale, dicendole temporo-occipitali? Perchè tanta ripugnanza nel primo caso e nulla nel secondo? E il lobo frontale circoscritto, come vedemmo, entro a' suoi naturali confini potrà egli dirsi piccolo? Ma passiamo avanti e diciamo del lobo parietale.

Questo lobo, ammesso dall' Arnold sotto il nome di lobo superiore, non è stato da lui veramente descritto ne' suoi termini. Nondimeno dalle Fig. 1-2 della Tav. IV del suo fascicolo intitolato *Icones cerebri et medullae spinalis*, s' argomenta l' estensione ch' esso ha inferiormente, rappresentata dall' *operculum*, il quale comincia dal primo processo verticale di Rolando, situato subito al di dietro del solco fronto-parietale, e termina all' angolo od estremità posteriore della fessura del Silvio. Non occorre dire che il solco poc' anzi nominato e la linea artificiale sopradetta lo distinguono dal lobo frontale, ed una linea pur artificiale discendente dal solco parieto-occipitale all' angolo di quella fessura lo distinguono dall' occipitale. E qui si dirà che questo lobo così determinato è troppo esteso; ma è proporzionato alla

(1) Mem. cit. pag. 83, δ. Tav. IV, V e VI.

regione ch' egli occupa od alla vertebra o zona craniense cui appartiene e corrisponde alla cella o cavità media de' ventricoli laterali, ed è infine sovrapposto alla fossa media della base del cranio tenuta dal lobo temporale: le quali tutte circostanze giovano assaissimo a render vera la mia determinazione. Finalmente rispetto agli altri lobi nulla ho da annotare, accettando pienamente quanto da lunga pezza è stato stabilito ed accolto dagli anatomici.

Nel cervello della Microcefala non ha meno certamente la sopradetta distinzione degli emisferi in piano superiore ed inferiore, e quella similmente del primo in due parti anteriore e posteriore pressochè eguali, posto però ch' elle si misurino poco sopra l'origine della fessura del Rolando; chè misurandolene alla terminazione riesce del doppio più lunga l' anteriore, Fig. 16-18, Tav. IV. Ma i due piani per incompiuta formazione, o per difetto d' accrescimento non si sono prolungati l' un verso l'altro ed osculati come di solito, ma rimasti molto lontani: ondechè sì ampia ed oscilante è la fessura del Silvio *B*, *B B*, da ricordar quella di un feto quadrimestre, come già fu addietro notato, (Fig. 18, Tav. IV — Fig. 10, Tav. III). Il labbro superiore b, c di questa fessura formato dalla porzione parietale della circonvoluzione marginale di essa, di poco monta recandosi posteriormente, o vero non scostasi molto dall' orizzontale, e guarda inferiormente e alquanto posteriormente; il labbro inferiore c, d formato dalla porzione temporale della circonvoluzione medesima è di un poco più breve del precedente, e discende obliquo dall' alto al basso e dallo indietro in avanti e guarda anteriormente. Le due labbra si uniscono posteriormente formando un angolo di 14°. La fessura poi del Rolando *H*, (Fig. 16-18, Tav. IV), data, conforme è stato detto, alla divisione del piano superiore in due parti, anteriore e posteriore, ascende obliquando posteriormente, e descrive con la grande circonvoluzione marginale un angolo di 32°.

Rispetto agli altri solchi disegnati per distinzioni dei lobi e lobuli degli emisferi, apparisce innanzi tratto nelle Fig. 16-19 Tav. IV il solco parietale posteriore *C*, che qui vuolsi chiamare occipito-parietale, o parieto-occipitale, non essendoci il solco parietale anteriore, già manifesto nel feto settimestre Fig. 14, *D* Tav. III, rimasto del formarsi il lobulo quadrilatero Fig. 19 Tav. IV. Il detto solco occipito-parietale *C*, qualora si confronti col rappresentato dalle Fig. 12-13-15 Tav. III pertinente ad emisferi cerebrali di feti settimestri e di un feto ottimestre, riesce esternamente molto esteso Fig. 16 Tav. IV. Come manca il solco parietale anteriore, manca pure la distinzione del lobulo, non sempre però divisato, che occorre nella faccia interna degli emisferi corrispondente alla estremità superiore del secondo e terzo processo verticale del Rolando; il quale lobulo non importa dire esso altresì manca Fig. 19 Tav. IV. E neppur trovasi il solco che separa posteriormente il lobulo triangolare del lobo occipitale; in luogo del quale solco ha poi una depressione od avvallamento arcato ibid. All' ultimo il solco fronto-parietale, già bell' e formato nel feto di sei mesi Fig. 11, *G* Tav. 3, e costituito nel feto ottimestre come nell' adulto Fig. 15 ibid., sembra nella Microcefala mancare:

onde a distinzione del lobo frontale dal parietale esternamente giova più in lei l' estremità esterna del margine posteriore della faccia orbitale di esso o il limite anteriore della porzione parietale della circonvoluzione marginale della fessura del Silvio, che qualunque altra cosa.

I lobi sono tutti piccoli ed imperfetti: l' isola λ, però Fig. 18, Tav. IV apparisce proporzionatamente voluminosa, ed è lunga 16 millim., alta 10, e larga altrettanto, ma va senza circonvoluzioni; salvo che non se ne vogliano avere per inizii i due tubercoli o digitazioni μ, μ, ibid., come già fu indicato. Le imperfezioni del soprapposto lobo, o lobo parietale, sonosi già discorse parlando dei solchi che ne dovrebbero divisare i lobuli. Quegli anatomici, che vorrebbero circoscritto anteriormente questo lobo dalla fessura del Rolando, lo ridurrebbero entro sì angusti confini da essere quasi niente. Piccolissimo fuor misura è il lobo frontale, e questa sua estrema picciolezza non pare semplicemente prodotta da sospeso incremento, ma ancora da atrofia per compressione sopra lui esercitata dall' edema dell' aracnoide e della pia madre corrispondente, secondo che fu detto di sopra. Questo lobo poi non è alto che 22 millim., lungo 18, e largo nella maggior larghezza 20. Le dimensioni del lobo occipitale sono anch' esse scarse, essendone la lunghezza appena 16 millim., l' altezza massima 21 e la maggiore larghezza 22, di qualità che essendo un emisfero lungo 65 millim., il lobo parietale ne occupa 31. È poi alto circa 15 millim., e grosso intorno a 23. Finalmente il lobo temporale è lungo 27 millim., ed ha la sua larghezza massima un po' maggiore a sinistra, essendo quivi intorno a 23 millim., laddove a destra la detta larghezza non aggiunge a 21: l' altezza infine misurata dall' apice dell' angolo della fessura del Silvio al suo margine inferiore è di 23 millim.

Le circonvoluzioni ne' lobi si ritrovano così: o son' elleno separate per solchi e formate, ovvero sono mal distinte od anche indistinte ed informi. Offrono il primo aspetto nei lobi parietali, frontali, e temporali, il secondo nella parte interna od inferiore di questi ultimi lobi, massime certune, nei lobi occipitali e nelle isole (Vedi Tav. IV). Ne' lobi parietali s' appresentano le due circonvoluzioni ascendenti o trasverse all' asse degli emisferi segnate q, q, r Fig. 16-18 Tav. cit., le quali hanno un incesso tortuoso a larghe curve e circoscrivono la fessura del Rolando *H*. La posteriore r di queste circonvoluzioni non si produce in quel circonvolgimento che Gratiolet ha chiamato lobulo parietale, ed altri circonvoluzione parietale superiore. Questo difetto conviene col sunnotato del lobulo quadrilatero. Si vede poi la circonvoluzione curva t Fig. 18, semplicissima, continua con la seconda circonvoluzione temporale esterna δ. Dalla circonvoluzione ascendente anteriore q, q partono poi le due circonvoluzioni parieto-frontali u. v, Fig. 16, 18, la superiore delle quali a sinistra dopo breve tragitto s' incorpora colla grande marginale dell' emisfero; a destra con questa semplicemente s' anastomizza, e poi segue suo corso in avanti, e discende allo esterno, ove incontra la porzione parietale della circonvoluzione marginale del Silvio, colla quale si anastomizza, o più esattamente con la radice

della circonvoluzione donde mosse. Ma a sinistra dalla radice anteriore della detta circonvoluzione ascendente anteriore viene la circonvoluzione v, Fig. 16-18, la quale compensa la brevità di quella. Nella faccia interna a' lobi parietali corrisponde la porzione f, g Fig. 19, Tav. IV della circonvoluzione marginale del corpo calloso e la maggior parte della circonvoluzione soprapposta estesa da α a β, indistinta dalla grande circonvoluzione marginale.

I lobi frontali offrono nella loro faccia orbitale, che è piccolissima Fig. 17, Tav. IV, la circonvoluzione & del medesimo nome, nel mezzo della quale ha il solco crociato *K*. La parte interna z di questa circonvoluzione circoscrive il solco olfattorio *L*, che è brevissimo, e forma la circonvoluzione retta esterna z: la circonvoluzione retta interna y circoscrivelo internamente, ed essa altro non è che la porzione terminale anteriore della grande circonvoluzione marginale. Nella faccia esterna le circonvoluzioni frontali non sono pur tortuose, ma pressochè dritte e cortissime Fig. 16-18-20, Tav. IV. A sinistra appena si possono noverare le tre assegnate a ciascuno dei lobi in discorso: la superiore delle quali circonvoluzioni sarebbe formata dalla porzione k, l, della grande marginale, la media dalla v̇, e la inferiore dalla x. Qualora fosse propriamente vero che la facoltà della parola, o come dicono del linguaggio articolato, risiedesse ne' lobi frontali, e precisamente nella circonvoluzione frontale inferiore x, potrebbe dirsi securamente che la Microcefala l' avrebbe avuta in grado minimissimo, o non l' avrebbe avuta affatto. Ne' lobi temporali Fig. 18 Tav. IV la prima circonvoluzione esterna, che altro non è che la porzione temporale c, d, della circonvoluzione marginale esterna, o della fessura del Silvio, e la seconda δ, sono distintissime per un bel solco parallelo *P*, non interrotto da anastomosi Fig. cit.; ma non troppo distinta n' è la terza ε ibid. Nella faccia inferiore o interna è abbastanza individuata la circonvoluzione del grande hippocampo o porzione temporale h, i, della circonvoluzione del corpo calloso e dell' hilo degli emisferi Fig. 17-19 Tav. IV. Le altre ι $\varkappa$ appena possono scernersi, non essendo divisate veramente da solchi. All' ultimo quanto a' lobi occipitali, la loro faccia inferiore nulla offre di circonvoluzioni, e l' interna ha due eminenze soltanto Fig. 19 Tav. IV, l' anteriore delle quali segnata θ rappresenta il lobulo triangolare. La loro esterna faccia semplicemente ne fa di qualche guisa facoltà d' ammettere de' rudimenti di circonvoluzioni contrassegnati nelle Fig. 16-18 Tav. IV da o, che sarebbe la porzione occipitale della grande circonvoluzione marginale, porzione considerata come prima occipitale, e da ζ, η, che sarebbero la seconda e terza occipitale distinte da due piccoli solchi superficialissimi.

Tutte le noverate anomalie delle circonvoluzioni, non altrimenti che le altre del cervello della Microcefala, rappresentano altrettante forme transitorie o fasi di formazione divenute permanenti. Di che chiunque conosca le apparenze che gli emisferi del cervello presentano ne' varii periodi di loro formazione e nel perfezionarsi, non può avere alcun dubbio. Ma si domanderà donde ciò? Confesso inge-

nuamente non saper dirlo. Forse alcuni ne vorranno accagionare la piccolezza e lo stato sinostotico ed anche morboso del cranio. Se non che tutti sanno informarsi le parti contenenti dallo stato delle contenute, e le sinostosi avvenire nel cranio, allora quando il cervello ha finito il suo crescimento; lo che posto, convien credere che nella Microcefala l' abbia già compiuto, tutto che egli sia così imperfetto. E l' ipertrofia delle ossa del cranio, di quelle della volta in ispecie, e l' iperemia loro potrebbero significare che la quantità del sangue che va normalmente al cervello, divenuta soverchia per lui, è stata costretta a deviare con la parte sua soprabbondante, la quale entrata ne' vasi nutrizii delle ossa craniensi ed aumentato avendone naturalmente quel tanto ch' essi conducevano, ha fatto sì che elle siano divenute fuor misura ipertrofiche e grosse, e abbiano assai più presto dell' usato compiuto la loro formazione, e siansi alla perfine poste nelle condizioni più opportune alla sinostosi sopradetta. E se così fosse stato, non perciò sarebbe aperto, anzi chiuso tuttavia, perchè il cervello è restato tanto imperfetto nella sua formazione, quà trovandosi nelle condizioni di un cervello quadrimestre, là di un cervello di sei o sette mesi, e per altri rispetti di un cervello ottimestre, nè gioverebbe ricorrere, come un tempo facevasi, allo stato de' vasi sanguigni che gli recano il nudrimento, essendo consaputo che la capacità delle arterie è generalmente proporzionata alla mole ed alla funzione di un organo, e dovendosi qui presupporre che una parte delle sue diramazioni fosse stata nulla, un' altra quasi nulla o scarsissima, ed una terza infine appena sufficiente: lo che poi potrebbe anche essere stato anzi effetto che cagione. Io dunque non ho donde spiegare nella nostra bambina la produzione della Microcefalia, non trovando nelle particolarità in esso lei osservate e intorno ad esso lei raccontatemi alcun buon fondamento per farlo. Del resto io non mi proposi già d' investigare la genesi di quest' affezione, ma di esporre il più accuratamente che per me si è saputo e potuto, l'anatomia della piccola Microcefala; sulla quale anatomia il Filosofo potrà fare le sue speculazioni e salire alle cagioni. Io non mi arrogo titolo di Filosofo, nè l' ambisco (1), nè poggio: volo rasente terra, ma volo, secondo che è dato all' anatomico, il quale narra quello che è, essendo suo uffizio dire semplicemente come sono le cose, senza punto brigarsi de' concetti, che può farne la nostra mente.

(1) *Ego phylosophi nomen non ambio* così Thom. Sydenam in Op. med. Tom. Prim. Genevae MDCCXXIII pag. 47.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1ª — Testa con porzione di tronco di una Bambina Microcefalica novimestre ritratta di faccia.

Fig. 2ª — Profilo della testa medesima. Lato sinistro.

Tavola II.

Fig. 3ª — Regione anteriore o facciale del teschio osseo della suddetta Microcefala.

Fig. 4ª — Profilo del teschio medesimo.

Fig. 5ª — Il medesimo teschio rappresentato dalla regione posteriore od occipitale.

Fig. 6ª — Faccia esterna o convessa della volta craniense di esso teschio.

Fig. 7ª — Regione inferiore o basilare del teschio predetto.

Tavola III.

Fig. 8ª — Concavità della volta craniense.

Fig. 9ª — Base ritratta dalla faccia interna.

Fig. 10ª — Emisfero cerebrale destro di un feto quinquemestre veduto dalla faccia interna.

Fig. 11ª — Emisfero cerebrale sinistro di un feto di sei mesi veduto dalla faccia esterna.

Fig. 12ª — Emisfero cerebrale sinistro di un feto settimestre.

Fig. 13ª — Emisfero cerebrale sinistro di un feto settimestre un po' più attempato.

Fig. 14ª — Emisfero cerebrale destro di un feto settimestre, rappresentato dalla faccia interna.

Queste cinque Figure appartengono all' anatomia del cervello di C. B. Reichert.

Fig. 15ª — Emisfero cerebrale sinistro di un feto ottimestre feminino, ritratto dalla faccia esterna.

Tavola IV.

Fig. 16ª — Cervello della Microcefala veduto dalla faccia superiore.
Fig. 17ª — Lo stesso cervello veduto dalla base.
Fig. 18ª — Lo stesso veduto dal lato sinistro.
Fig. 19ª — Faccia interna o sezione verticale del cervello medesimo. Lato sinistro.
Fig. 20ª — Regione frontale del medesimo cervello.

Le Figure di queste quattro Tavole sono tutte di grandezza naturale, ed in esse le medesime lettere indicano i medesimi oggetti.

Teschio osseo.

1, 1, Falde ossee aliformi o triangolari di colore rosso cupo soprapposte alla porzione nasale dell' osso frontale, separate la destra dalla sinistra per un residuo della sutura frontale di già obliterata al di sopra del detto residuo, e nel luogo della obliterazione ha una leggier cresta o carena.

2, Altra falda ossea similmente colorata, soprapposta alla parte superiore della porzione frontale dell' osso frontale, in corrispondenza della fontanella anteriore scomparsa, e finitima alla sutura coronale non più dentata, ma armonica.

3, 3, Altra falda ossea della medesima tinta, situata a lati della sutura sagittale, la quale sutura ha un aspetto poco diverso da quello della coronale, con questo ch' ella è molto meno manifesta e in via di obliterazione.

4, 4, Due processi della falda ossea predetta, i quali corrono all' esterno da ogni lato lungo la parte posteriore della sutura coronale, e vanno ad unirsi con la falda ossea 6, 6, 6.

5, 5, Altri due processi posteriori della falda 3, 3, situati da ciascun lato al davanti della sutura lambdoidea neppur essa dentata, ma armonica, i quali processi corrono all' esterno e discendono alla falda 6, 6, 6, con la quale si uniscono.

6, 6, 6, Altra falda ossea del medesimo colore situata al di sopra delle suture temporo-parietali, sfeno-parietali e fronto-zigomatiche.

* Piccolo ossetto longitudinale intercalato al residuo della sutura frontale altrove obliterata.

7, Grossezza di questa falda ossea apparente nel taglio orizzontale del cranio, ritratto dalle Fig. 8-9, Tav. III.

8, 8, 9, 9, 10, 10, Macchia rossa tendente al giallo, la quale ritrae molto dell'aspetto delle falde indicate, situata sopra le piccole ale o processi Ingrassiali dello sfenoide.

11, 11, Sinostosi completa in corrispondenza della sutura frontale e sagittale

nel lato interno, e grande moltitudine di forellini occupanti la doccia data alla porzione corrispondente del seno longitudinale superiore della dura madre.

12, Prolungamento dei forellini anzidetti lungo la faccia interna della sutura coronale tendente ad obliterarsi in corrispondenza del luogo della fontanella anteriore.

13, Prolungamento di quei forellini lungo la sutura lambdoidea obliterata in corrispondenza dell' angolo.

14, Epifisi dell' apofisi *cristagalli.*

15, Cartilagine del *clivus sphenoidalis*, la quale va a formare l' epifisi de' processi clinoidei posteriori, ed è continua con quella della sincondrosi sfeno-occipitale.

16, Vestigio dell' ossetto della sinfisi del mento o sinfisi mandibolare, il quale ossetto trovasi incuneato fra le due metà della mascella inferiore.

17, Piccolo solco nel lato interno della sinfisi, il quale solco è situato nella parte media posterior-superiore del processo alveolare, ed è un residuo della disgiunzione delle due metà della mandibola o mascella inferiore.

Cervello.

A, Fessura interemisferica.

B, *B*, *B*, Fessura o fossa del Silvio.

C, Fessura parietale posteriore od occipito-parietale.

D, Fessura parietale anteriore.

E, Solco o fessura che limiterà posteriormente il lobulo triangolare del lobo occipitale.

F, Solco o fessura dell' hippocampo, all' estremità posteriore della quale unisconsi ad angolo acuto i solchi *C*, *E*, che n' appariscono come ramificazioni.

G, Solco fronto-parietale.

H, Solco o fessura del Rolando.

K, Solco crociato che qui a destra rassembra la lettera *H*, a sinistra una *L*.

L, Solco olfattorio.

M, Solchi trasversali secondari segnati nelle Fig. 10 a 13, Tav. III.

N, Solchi longitudinali nelle medesime Figure della Tav. III.

P, Solco parallelo.

O, Solco longitudinale secondario interno, Fig. 10-14, Tav. III — Fig. 19, Tav. IV.

a, b, c, d, Circonvoluzione marginale della fessura del Silvio, o marginale esterna, divisa in tre porzioni, cioè a, b, porzione frontale od orbitale; b, c, porzione parietale; c, d, porzione temporale.

e, f, g, h, i, Circonvoluzione marginale del corpo calloso e dell' hippocampo, o dell' hilo degli emisferi cerebrali, o circonvoluzione marginale interna pre-

F 1
F. 2.
C. Bettini dis.°
Lit. G. Wenk

C. Bettini dis°

Lit. G. Wenk.

F. 8.

F. 9.

F. 10.

F. 11.

F. 12.

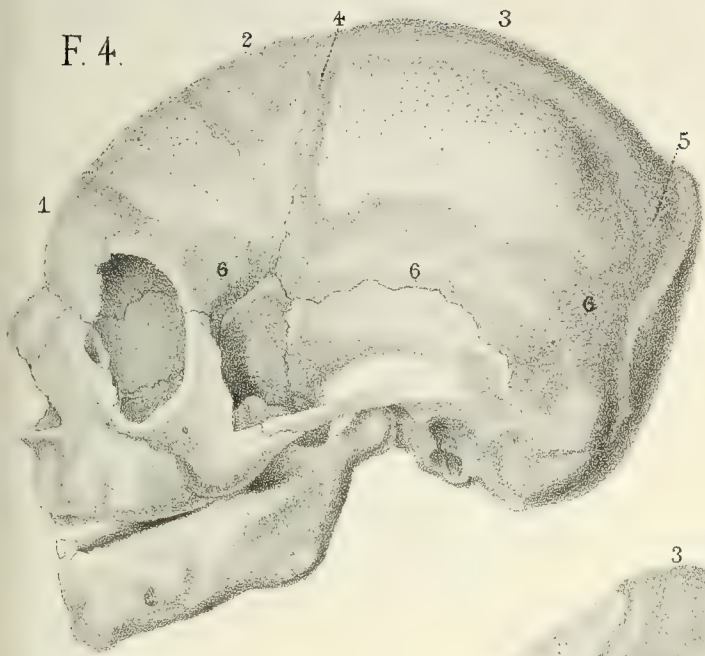
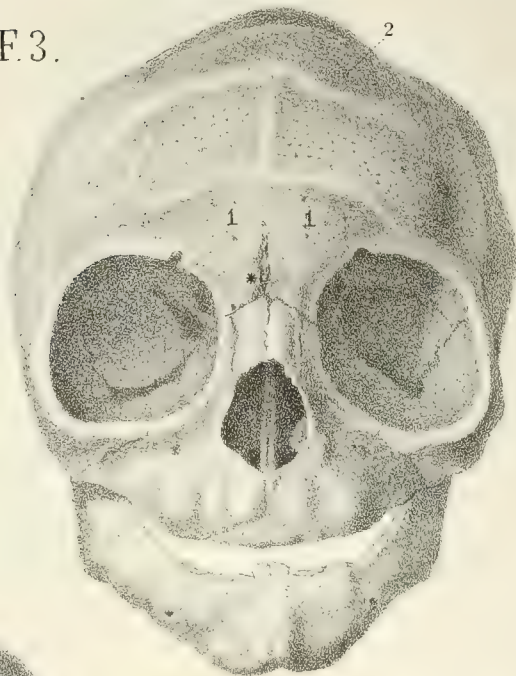
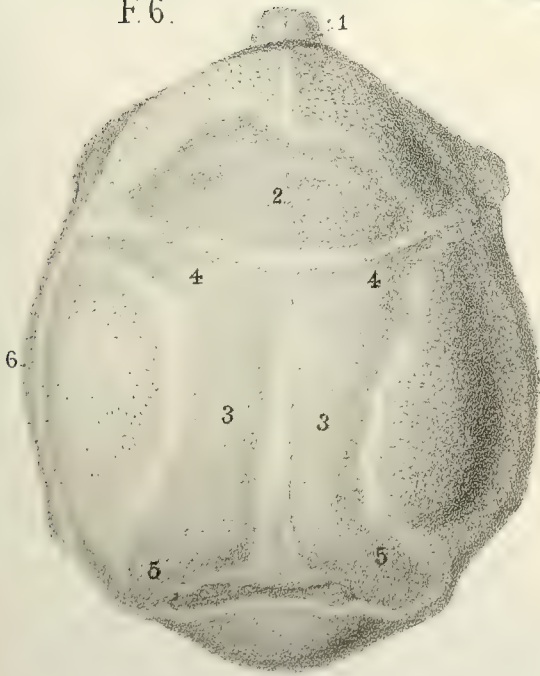
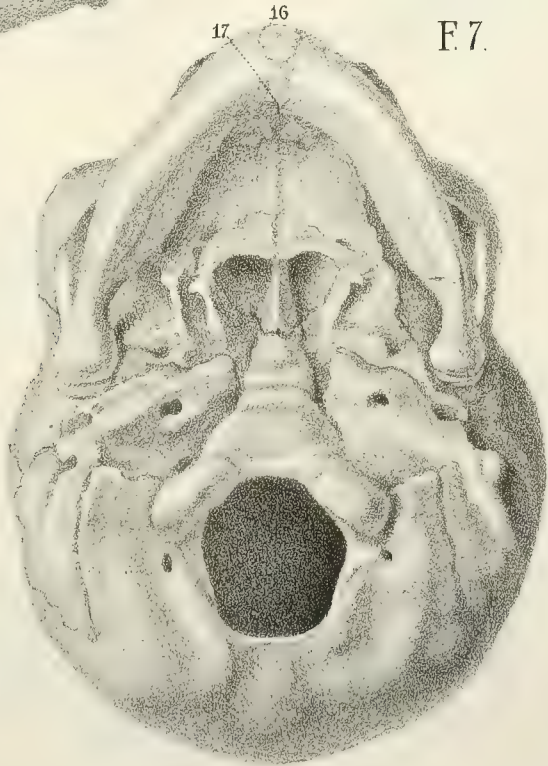
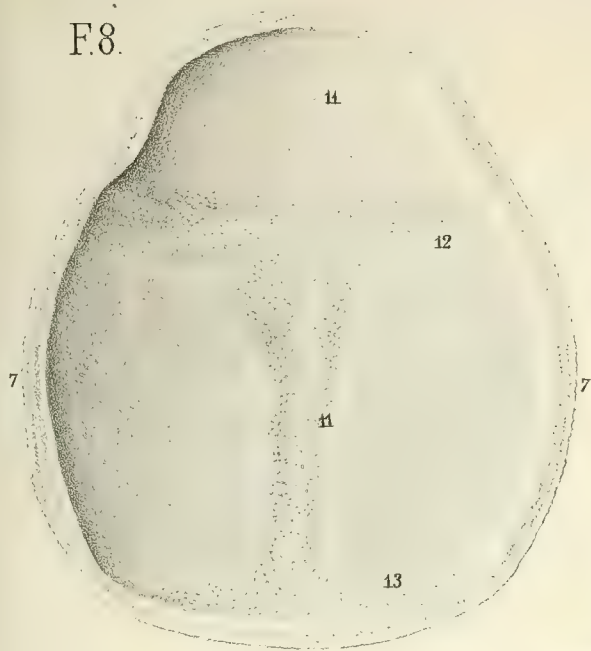
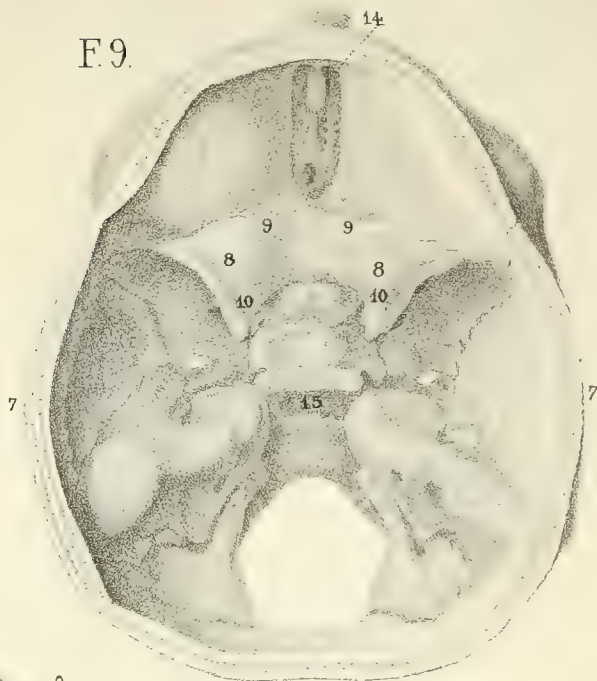
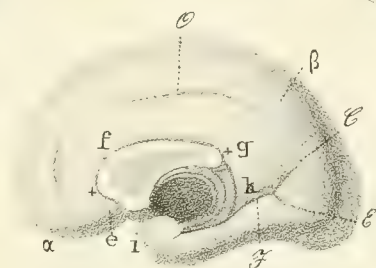
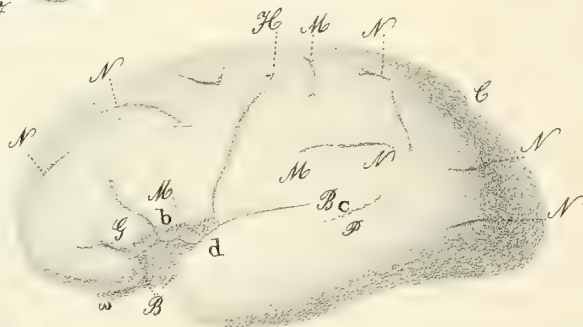
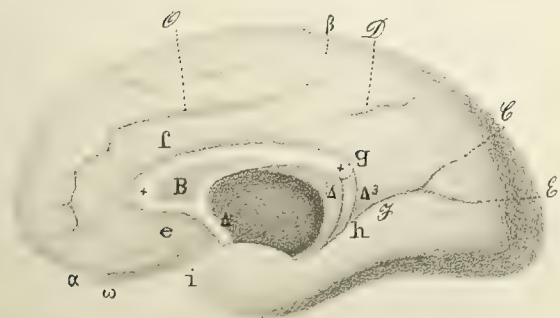
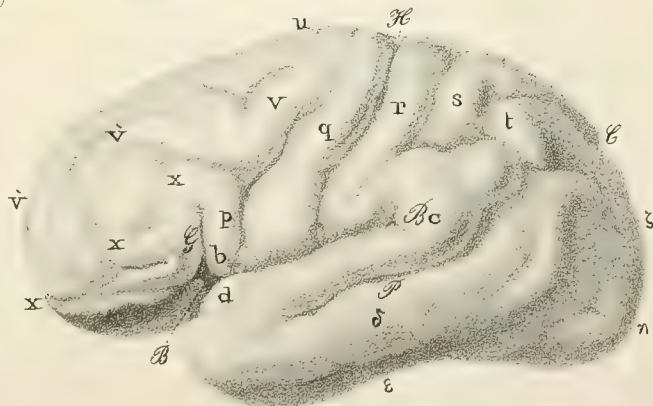
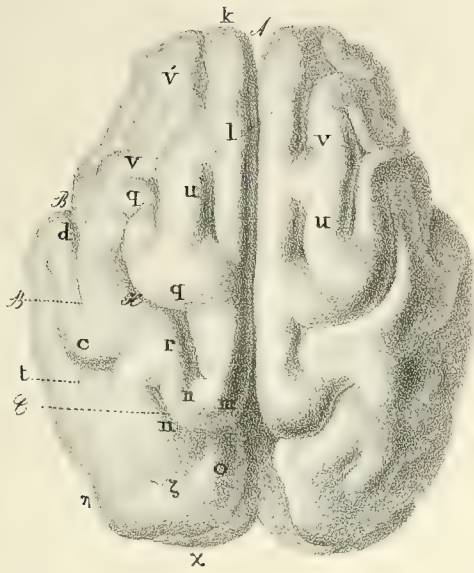
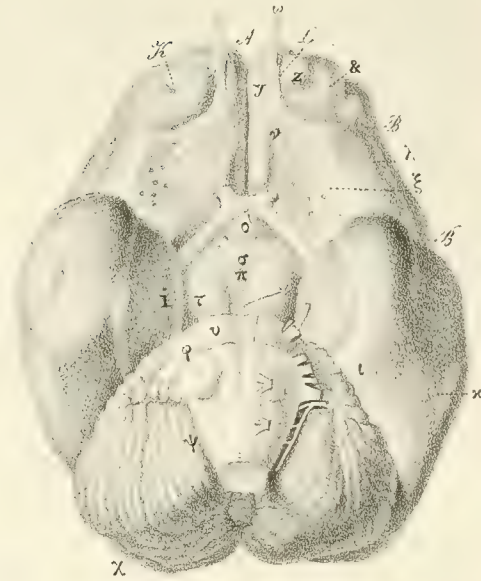
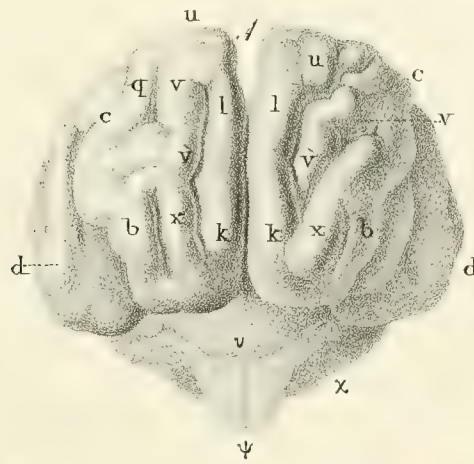
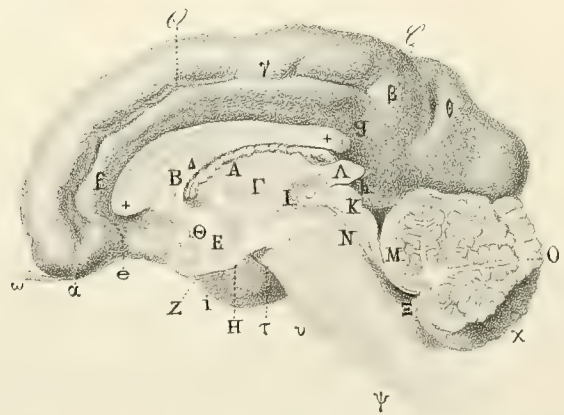
F. 13.

F. 14.

F. 15.

C. Bettini dis. in pietra

Lit. G. Wenk.

C. Bettini dis. in pietra   Lit. G. Wenk

sentante da e a f, la sua porzione frontale, da f a g la sua porzione parietale, da h ad i la sua porzione temporale, o circonvoluzione dell' hippocampo.

k, l, m, n, n, o, Grande circonvoluzione marginale dell'emisfero cerebrale, la quale offre da k a l la sua porzione frontale, da m a l la sua porzione parietale, la quale forma l' ansa n, n comprendente la fessura occipito-parietale, o parietale posteriore *C*, e poscia continuantesi nella porzione occipitale o non bene distinta.

p, Prima circonvoluzione parietale o primo processo verticale di Rolando.

q, q, Seconda circonvoluzione parietale o secondo processo verticale di Rolando.

r, Terza circonvoluzione parietale o terzo processo verticale di Rolando.

s, Quarta circonvoluzione parietale o quarto processo verticale di Rolando.

t, Circonvoluzione curva di Gratiolet.

u, Circonvoluzione proveniente dalla seconda parietale q, q, la quale circonvoluzione u a sinistra s' anastomizza ed incorpora con la porzione k, l, della grande circonvoluzione marginale, laddove a destra dopo l'anastomosi si continua nella circonvoluzione v, la quale va a terminare nella circonvoluzione marginale della fessura del Silvio. A sinistra questa circonvoluzione v nasce dalla radice anteriore della circonvoluzione q q.

v, v, La detta circonvoluzione che è la seconda parieto-frontale che in v̇, v̇ offre la sua porzione frontale.

x, x, x, Terza circonvoluzione frontale, o circonvoluzione sopraciliare.

y, Circonvoluzione retta interna continua con la grande marginale dell' emisfero, anzi porzione orbitale di questa circonvoluzione.

z, Circonvoluzione retta esterna. Queste due circonvoluzioni rette circoscrivono il solco olfattorio L.

&, Circonvoluzione orbitale.

α, β, Circonvoluzione fronto-parietale interna indistinta dalla grande marginale dell' emisfero; la quale circonvoluzione è semplicissima, anastomizzata ai suoi due estremi colla marginale del corpo calloso e in γ con la porzione f, g, di questa medesima circonvoluzione.

δ, Seconda circonvoluzione temporale, essendo la prima rappresentata dalla porzione c, d della marginale della fessura del Silvio, o marginale esterna.

ε, Terza circonvoluzione temporale.

ζ, Seconda circonvoluzione occipitale, essendo la prima rappresentata da o che è la porzione occipitale della grande marginale dell' emisfero.

η, Terza circonvoluzione occipitale.

θ, Prominenza rappresentante il lobulo triangolare del lobo occipitale.

ι, $\varkappa$, Circonvoluzioni occipito-temporali esterna ed interna informi o non bene distinte.

μ, μ, Due digitazioni o tubercoli digitali dell' isola λ, le quali sembrano due indizi delle sue circonvoluzioni.

ν, Campo olfattorio.

ξ, Sostanza perforata anteriore.

ο, *Tuber cinereum* ed infundibolo.

σ, Prominenza dei tubercoli mammillari o candicanti.

π, Sostanza perforata media o posteriore.

τ, Gambe del cervello.

υ, Protuberanza anulare o ponte del Varolio.

φ, Gambe o processi del cervelletto *ad pontem*.

χ, Cervelletto.

ψ, Midolla allungata.

ω, Nervo olfattorio, molto lungo a rispetto del lobo frontale, siccome quello che d' assai lo sorpassa.

Non ho contraddistinti gli altri nervi, semplicemente delineati, salvo l' ottico, a sinistra, nulla essi offrendo fuori dell' ordinario.

-+-, -+-, Corpo calloso, la cui estremità posteriore manca del *tuber* o *splenium*.

A, Plesso coroideo del ventricolo laterale sinistro.

B, Setto lucido.

Γ, Terzo ventricolo o sua parete laterale sinistra, in cui non apparisce vestigio di commessura molle.

Δ, Δ, Fornice o trigono cerebrale, e sua fimbria a sinistra.

Δ 3, Fascia dentata di Tarin.

E, Porzione inferiore del terzo ventricolo, corrispondente al *tuber cinereum* ed alla sostanza perforata posteriore.

Z, Luogo dell' infundibolo che si è guastato per la dissezione.

H, Prominenza corrispondente alla *σ* della Fig. 17 Tav. IV, appartenente ai tubercoli mammillari o candicanti.

Θ, Commessura anteriore.

I, Commessura posteriore.

K, Tubercoli quadrigemini.

M, Velo midollare anteriore.

Λ, Glandula pineale unita pel suo peduncolo al talamo ottico, e per fascettini filamentosi alla commessura posteriore.

N, Acquedotto del Silvio.

Ξ, Quarto ventricolo, dal quale è stato levato un enorme plesso coroideo.

O, Albero della vita.

SOPRA ALCUNE FORMOLE

DELLA

RESISTENZA DEI MATERIALI

MEMORIA

DELL' ING. SILVIO CANEVAZZI

(Letta nella Sessione ordinaria delli 22 Aprile 1880)

In questi ultimi anni per opera principalmente di Mohr, di Winkler e di Culmann si è sparsa fra i cultori della Scienza delle costruzioni la teoria delle travi ad asse rettilineo, sollecitate da carichi diretti normalmente al medesimo, dedotta dai principì e dai metodi della statica grafica. D'altra parte alcuni autori tedeschi hanno introdotto l' uso di esprimere le reazioni ed i momenti sugli appoggi in funzione dei carichi che gravitano sulla trave e degli angoli che l' asse neutro longitudinale deformato forma coll' orizzontale nei punti d' appoggio del solido che si considera. In questa nota ci proponiamo di sviluppare alcune considerazioni, coll' aiuto delle quali si possono facilmente scrivere le espressioni dei momenti sugli appoggi e le reazioni, e di porre in evidenza la relazione che esiste fra la teoria ordinaria delle travature e le costruzioni del Sig. Mohr. Per brevità di esposizione conveniamo d' indicare con

A e B i due appoggi della trave

v, v_1, v_2, le sezioni normali all' asse della travatura

ψ l' angolo compreso da due tronchi successivi della trave

M, il momento flettente in un punto qualunque, e M_v quello nella sezione generica v

M_a, M_{va} il momento di tutte le forze poste alla sinistra del punto o della sezione che si considera

M_b, M_{vb} il momento di tutte le forze poste alla destra del punto o della sezione v, in guisa che sia $M_a = - M_b$ $M_{va} = - M_{vb}$

E il modulo d' elasticità della materia della quale è composta la trave

I il momento d' inerzia della sezione trasversale della trave, che supporremo costante.

Inoltre conveniamo (Vedi Grashof theorie der Elasticität und Festigkeit) di prendere AB come asse delle x quando l' origine delle misure è in A, come asse dell' y invece quando l' origine suddetta è in B, assumendo come positivo per le x il senso AB e per le y il senso BA. Per asse delle z si prenderà una retta normale all' asse della trave nell' origine delle x o delle y secondochè si contano le ascisse da A o da B.

Consideriamo il tronco di trave compreso fra le due sezioni v e v_1, se supponiamo per un momento la trave divenuta rigida ad eccezione di un tratto infinitamente corto dx, sotto l' influenza di uno o più carichi il solido sarà deformato, ed i due tronchi rigidi formeranno fra loro un angolo $\psi = \frac{Mdx}{EI}$ (Bresse. Cours. de mécanique app.). Per costruire quest' angolo basterà condurre un' orizzontale (supponendo orizzontale l' asse della trave prima della deformazione) prendere su di essa un segmento OO_1 proporzionale ad EI, e fatto centro in O con raggio uguale ad OO_1 descrivere un arco di circolo; a partire da O_1 si prende $O_1\,1 = \chi_1$ proporzionale ad Mdx, sarà $O_1\,O1 = \psi$, e se per B si conduce BC_1 parallela ad O_1, ABC_1 sarà la forma assunta dall' asse della trave deformata. Se si immagina ora che in un altro punto D venga resa alla trave la sua elasticità, per costruire la nuova deformazione che si produce sarà necessario prendere $\chi_2 = 12$ proporzionale ad $M_D dx$ e condurre D_1C_2 parallela a 20; per gli altri punti $C, E, F,\ldots$ si procederebbe in modo analogo. Se la somma dei segmenti χ proporzionali ad Mdx è una grandezza dello stesso ordine che OO_1 non si può introdurre semplificazione alcuna nella costruzione, ma se OO_1 è molto grande in confronto di $\Sigma\chi$ è chiaro che i segmenti χ possono senza errore sensibile esser presi sulla tangente condotta per O_1 al circolo di centro O, l' asse neutro longitudinale del solido deformato può allora considerarsi come coincidente colla funiculare, che si ottiene qualora s' immagini esistente sulla trave un carico distribuito in modo continuo, proporzionale in ogni sezione all' ordinata corrispondente del diagramma dei momenti flettenti, poichè le due costruzioni coincidono in tutti i loro particolari. Come conseguenza immediata abbiamo che tutte le proprietà dei poligoni funiculari e dalle forze possono essere applicate alla ricerca delle deformazioni delle travi per le quali E è grandissimo (Ferro, Ghisa, Legno ....) che è quanto dire per tutte quelle, che s' impiegano nelle ordinarie costruzioni. Se non che volendo applicare questo procedimento geometrico alla risoluzione grafica del problema delle travature le ordinate del poligono funiculare riescono piccolissime, perchè tali appunto sono le deformazioni; inoltre il polo del poligono delle forze in causa del valore di E sorte dal foglio del disegno, quindi una grande difficoltà nell' eseguire la costruzione geometrica e spesso anche l' impossibilità pratica di

tracciare distintamente le due figure. Questo inconveniente può esser tolto con molta facilità: è noto che il prodotto delle ordinate del poligono funiculare per la base del poligono delle forze è una costante, se prenderemo OO_1 proporzionale ad $\frac{EI}{n}$ le ordinate del poligono funiculare diventeranno n volte più grandi, e le due figure potranno essere agevolmente disegnate.

Rappresenti la retta AB l' asse di una trave fissata a due appoggi A e B. Siano

l la sua lunghezza
μ il momento sull' appoggio A
σ id. id. id. B
μ_1 e σ_1 i momenti sugli appoggi A e B quando la trave è incastrata orizzontalmente
X_a la reazione sull' appoggio A
Y_b id. id. id. B
X_a' ed Y_b' le reazioni in A ed in B quando la trave riposa liberamente sugli appoggi
P un peso isolato distante a dall' appoggio A, e b dall' appoggio B
α e β gli angoli che l' asse neutro deformato forma coll' orizzonte in A ed in B
X_v la somma di tutte le forze a sinistra della sezione v
Y_v id. id. id. a destra della sezione v.

Si prendano AA' BB' proporzionali rispettivamente a μ ed a σ, e si tracci il diagramma dei momenti flettenti, fig. 4ª, questo risulta evidentemente composto di tre figure, due triangoli $AA'B = F_1$ $BB'A' = F_3$ che corrispondono ai due momenti sugli appoggi, ed $A'C'B' = F_2$ che dipende dalla variazione del momento delle forze esterne nell' ipotesi che la trave riposi liberamente in A ed in B. Siano f_1' f_2' f_3' i centri di gravità delle tre figure ed f_1, f_2, f_3 le verticali passanti pei medesimi; essendo le aree F_1 ed F_3 triangolari f_1 ed f_3 divideranno l' asse BA della trave in tre parti uguali e possono per questo distinguersi col nome di verticali trisettrici. Finalmente indichiamo con M_m una lunghezza tale che sia $M_m l$ $=$ aerea $A'C'B' = F_2$. Nel calcolo delle travi interessano specialmente le reazioni, i momenti e gli angoli sugli appoggi; sarà quindi inutile cercare la posizione dei lati intermedi del poligono funiculare costruito ritenendo nelle diverse sezioni i pesi proporzionali ai momenti, e basterà avere la posizione del primo e dell' ultimo lato. A questo scopo è indifferente l' ordine col quale si scelgono le forze, il modo nel quale esse vengono aggruppate, e si potranno considerare come agenti sulla trave solamente tre carichi proporzionali alle aree F_1 F_2 F_3, applicati ai loro centri di gravità, e col mezzo di esse avere la direzione dei lati estremi. Sia λ

una base costante di riduzione per le aree, a cui le forze sono proporzionali, si costruisca il poligono delle forze prendendo in una scala conveniente

$$01 = \frac{F_1}{\lambda} = \frac{\mu}{2\lambda}$$

$$12 = \frac{F_2}{\lambda} = \frac{Mml}{\lambda}$$

$$23 = \frac{F_3}{\lambda} = \frac{\sigma l}{2\lambda}$$

$$OO_1 = b = \frac{EI}{n\lambda}$$

e da esso si deduca il poligono funiculare. Quest' ultimo poligono può essere tracciato indipendentemente dal primo quando siano note le direzioni del primo e dell' ultimo lato; infatti: in direzione normale alla f_2 si prendano a destra ed a sinistra della medesima due segmenti ξ_1 e ξ_2 uguali a b, dall' estremità di questi si conducono due rette parallele ad f_2, e sopra di esse si misurino due lunghezze

$$w_1 w' = ww' = 12 = \frac{F}{\lambda} = \frac{Mml}{\lambda}$$

e si uniscano w' con w_1 e w con w_1'; ww_1' $w'w_1$ rappresentano i raggi del poligono delle forze, e possono essere indicati col nome di linee diagonali. Se si tracciano i lati estremi del poligono funiculare ad incontrare in U ed in V le trisettrici, e se si prende

$$UU' = UU_1' \qquad VV' = V_1 V_1'$$

le UV' e VU' completano il poligono che suolsi indicare col nome di 2° poligono funiculare, perchè per costruirlo è necessario aver già disegnato il diagramma dei momenti, che è esso pure un poligono funiculare.

Se si prolungano SU ed SV ad intersecare in A_2 e B_2 le verticali degli appoggi, si ottengono i due segmenti $A_1A_2 = v'$ e $B_1B_2 = v''$ che sono proporzionali ai momenti μ e σ; infatti dai triangoli simili $O01$. UA_1A_2 e $O23$, VB_1B_2 si ricava

$$b : \frac{l}{3} : : 01 : v'$$

$$b : \frac{l}{3} : : 23 : v''$$

da cui

$$v' = \frac{l}{3}\frac{01}{b} = \frac{l}{3}\frac{\mu l}{2b\lambda} = \frac{\mu l^2}{6b\lambda} \qquad (1)$$

$$v'' = \frac{l}{3}\frac{23}{b} = \frac{l}{3}\frac{\sigma l}{2b\lambda} = \frac{\sigma l^2}{6b\lambda} \qquad (2)$$

Se si assume $b = \frac{\lambda}{b}$

$$v' = \mu \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad (3)$$

$$v'' = \sigma \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad (4)$$

Finalmente prendendo $\lambda = l$

$$v' = \mu \qquad (5)$$

$$v'' = \sigma \qquad (6)$$

Se la trave è incastrata orizzontalmente in A ed B, il primo e l' ultimo lato del secondo poligono funiculare sono orizzontali, ed esso assume la forma della fig. 5ª, se si indicano con γ_1 γ_2 le distanze della f_2 dalle verticali trisettrici f_1 ed f_2, con v_1' e v_1'' i segmenti A_1A_2 B_1B_2 intercettati in questo caso particolare dai lati del poligono funiculare sulle verticali degli appoggi

$$v_1' = VV' = V_1V_1'$$

$$v_1'' = UU' = U_1U_1'$$

quindi

$$v_1' : ww_1 :: \gamma_2 : b$$

$$v_1'' : w_1w_1' :: \gamma_1 : b$$

e sostituendo a $v_1' . v_1''$ a ww' w_1w_1' i loro valori

$$\frac{\mu_1 l^2}{6b\lambda} : \frac{Mml}{\lambda} :: \gamma_2 : b$$

$$\frac{\sigma_1 l^2}{6b\lambda} :: \frac{Mml}{\lambda} :: \gamma_1 : b$$

da cui

$$\mu_1 = \frac{\sigma Mm}{l} \gamma_2$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma Mm}{l} \gamma_1$$

Nel caso di un carico p distribuito uniformemente per metro corrente di trave

$$Mm = \frac{pl^2}{12}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{l}{6}$$

$$\mu_1 = \sigma_1 = \frac{pl^2}{12}$$

Nel caso di un carico isolato P

$$Mm = \frac{Pab}{2l}$$

$$\gamma_1 = \frac{3a}{3} + \frac{b - a}{3} - \frac{a + b}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\gamma_2 = \frac{3b}{3} - \frac{b - a}{3} - \frac{a + b}{3} = \frac{b}{3}$$

Consideriamo ora il caso di una trave AB in cui μ e σ oppure α e β hanno valori determinati scelti ad arbitrio fig. 6, si costruisca il secondo poligono funiculare, e si conduca la UV a segare in A_3 e B_3 le verticali degli appoggi ; dalla figura appare che

$$A_2A_3 = VV' = V_1V_1' = v_1'$$
$$B_2B_3 = UU' = U_1U_1' = v_1''$$

se si pone

$$A_1A_3 = v_2'$$
$$B_1B_3 = v_2''$$

si ottiene

$$v' = v_1' - v_2'$$
$$v'' = v_1'' - v_2''$$
$$v_2' = VV_3 = \frac{2l}{3} \operatorname{tg} \alpha - \frac{l}{3} \operatorname{tg} \beta = \frac{l}{3} (2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$
$$v_2'' = UU_3 = -\frac{l}{3} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2l}{3} \operatorname{tg} \beta = \frac{l}{3} (- \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta)$$

sostituendo nelle (1) e (2) a v' e v'' questi valori si ricava

$$\mu = \frac{6b\lambda}{l^2} v' = \frac{6b\lambda}{l^2} (v_1' - v_2') = \frac{6EI}{l^2} v_1' - \frac{6EI}{l^2} \frac{l}{3} (2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

$$\sigma = \frac{6b\lambda}{l^2} v'' = \frac{6b\lambda}{l^2} (v_1'' - v_2'') = \frac{6EI}{l^2} v_1'' - \frac{6EI}{l^2} \frac{l}{3} (- \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta)$$

ma

$$\frac{6EI}{l^2} v_1' = \mu_1 \ ; \qquad \frac{6EI}{l^2} v_1'' = \sigma_1$$

dunque

$$\mu = \mu_1 - \frac{2EI}{l} (2 \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \beta)$$

$$\sigma = \sigma_1 - \frac{2EI}{l} (- \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$$

e sostituendo a μ_1 e σ_1 i loro valori nell' ipotesi che sulla trave esista un carico isolato P ed uno p uniformemente distribuito per metro corrente si hanno le formule generali

$$\mu = \frac{pl^2}{12} + \frac{Pab^2}{l^2} - \frac{2EI}{l} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

$$\sigma = \frac{pl^2}{12} + \frac{Pa^2b}{l^2} - \frac{2EI}{l} (-2 \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta)$$

Le formule antecedenti dànno il valore assoluto di μ e di σ, Se si ammette la convenzione ordinaria, cioè di prendere come positivo il senso di rotazione prodotto dal momento delle forze esterne sopra una porzione di travatura isolata mediante una sezione v, fig. 7, allora μ e σ sono negativi, e le loro espressioni divengono

$$\mu = -\frac{pl^2}{12} - \frac{Pab^2}{l^2} + \frac{2EI}{l}(2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \tag{7}$$

$$\sigma = -\frac{pl^2}{12} - \frac{Pa^2b}{l^2} + \frac{2EI}{l}(-\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta) \tag{8}$$

che corrispondono a quelle date da Grashof (Vedi Theorie der Elasticität und Festigkeit pag. 78).

Si può dare a queste formule una maggiore generalità: supponiamo che l' appoggio A si elevi sopra B in guisa che fra i medesimi siavi un dislivello ε, indichiamo con h_a ed h_b le ordinate dei punti A e B rispetto ad una retta orizzontale fissa, allora $h_a - h_b = \varepsilon$. Se si costruisce il secondo poligono funiculare, il primo lato resta invariato, i punti V e V' si abbassano di una quantità ε, e vengono in $(V)(V')$, l' ultimo lato si trasporta parallelamente a sè stesso in $(V)(B_1)$ la UV e la US ruotano intorno al punto U. Poniamo per questo caso particolare $A_1(A_3) = (v_2')$ $(B_1)(B_3) = (v_2'')$, dalla figura si ricava

$$(v_2') = v_2' - \varepsilon$$
$$(v_2'') = v_2'' + \varepsilon$$

quindi

$$v' = v_1' - v_2' + \varepsilon$$
$$v'' = v_1'' - v_2'' - \varepsilon$$

e sostituendo nelle (1) e (2)

$$\mu = \mu_1 - \frac{2EI}{l}(2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) + \frac{6EI}{l^2}\varepsilon$$

$$\sigma = \sigma_1 - \frac{2EI}{l}(-\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta) - \frac{6EI}{l^2}\varepsilon$$

se si ammette la convenzione poco sopra indicata relativamente ai segni, e se si suppone che esista sulla trave un carico p per metro corrente uniformemente distribuito ed un peso P isolato, le formule diventano

$$\mu = -\frac{pl^2}{12} - \frac{Pab^2}{l^2} + \frac{2EI}{l}(2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - \frac{6EI}{l^2}(h_a - h_b) \tag{9}$$

$$\sigma = -\frac{pl^2}{12} - \frac{Pa^2b}{l^2} + \frac{2EI}{l}(-\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta) + \frac{6EI}{l^2}(h_a - h_b) \tag{10}$$

Sia ora la trave AB fig. 8, incastrata solamente ad un estremo A, e riposi liberamente in B, allora $\sigma = 0$ $F_3 = 0$ ed il secondo poligono funiculare si compone solo di tre lati, fig. 8 e fig. 9, Se si suppone la trave incastrata orizzontalmente in A, AU coincide coll' asse AB prima della deformazione, e ricordando che le verticali trisettrici dividono il solido in tre parti uguali si ricava dalla figura

$$v_1' = A_1A_2 = VV' + \tfrac{1}{2}\, UU'$$

quindi

$$\mu_1 = \frac{6b\lambda}{l^2}\, v_1' = \frac{6b\lambda}{l^2}(VV' + \tfrac{1}{2}\, UU')$$

impiegando le stesse indicazioni usate superiormente avremo

$$VV' = V_1V_1' \qquad UU' = U_1U_1'$$

$$VV' : \frac{Mml}{\lambda} :: \gamma_2 : b$$

$$UU' : \frac{Mml}{\lambda} :: \gamma_1 : b$$

da cui

$$VV' = \frac{Mml}{6\lambda}\gamma_2$$

$$UU' = \frac{Mml}{6\lambda}\gamma_1$$

e finalmente

$$\mu_1 = \frac{6Mm}{l}(\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_1)$$

se sulla trave esiste un carico p distribuito in modo uniforme per metro corrente

$$M_m = \frac{pl^2}{12}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 = \frac{l}{6}$$

$$\mu_1' = \frac{pl^2}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{pl^2}{8}$$

se sulla trave gravita soltanto un carico isolato P

$$M_m = \frac{Pab}{2l}, \quad \gamma_1 = \frac{a}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{b}{3}$$

$$\mu_1 = \frac{3\,Pab}{l^2}\left(\frac{b}{3} + \frac{a}{6}\right) = \frac{Pab}{2l^2}(a + 2b)$$

Se la trave è incastrata in A ma non orizzontalmente allora le formule si modificano come segue: il secondo poligono funiculare non ha che tre lati ed il quarto vertice invece di cadere sulla f_3 cade in B_1, la VU diventa la B_1U, fig. 9,

$$v_2' = \frac{1}{3}\, l \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{6}\, l \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\, l \operatorname{tg} \alpha$$

$$v' = v_1' - v_2' = v_1' - \frac{1}{2}\, l \operatorname{tg} \alpha$$

e sostituendo nella (1)

$$\mu = \frac{6EI}{l^2}\, v_1' - \frac{3EI}{l} \operatorname{tg} \alpha = \mu_1 - \frac{3EI}{l} \operatorname{tg} \alpha$$

Nel caso generale che sulla trave esista un peso p uniformemente distribuito per metro corrente ed un carico isolato P, ammettendo relativamente al segno la convenzione ordinaria si ottiene

$$\mu = -\frac{pl^2}{8} - \frac{Pab}{2l^2}(a + 2b) + \frac{3EI}{l} \operatorname{tg} \alpha$$

Siano come sopra h_a ed h_b le ordinate dei punti A e B relativamente ad una

retta orizzontale fissa fig. 9, se $h_a - h_b = \varepsilon$ il secondo poligono funiculare subisce le seguenti modificazioni: $B_1 V$ ruota intorno ad U', SU intorno ad U, ed i punti B_1, V, V', A_2, A_3 vengono rispettivamente in (B_1), (V), (V'), (A_2), (A_3). Dalla figura si ricava che

$$B_1 (B_1) = \varepsilon$$

$$V (V) = V' (V') = A_2 (A_2) = A_3 (A_3) = \frac{\varepsilon}{2}$$

quindi

$$(v_2') = v_2' - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$v' = v' - (v_2') = v_1' - v_2' + \frac{\varepsilon}{2}$$

e sostituendo nella formula, che dà il valore di μ con riguardo al segno del momento, si ottiene

$$\mu = -\frac{pl^2}{8} - \frac{Pab}{2l^2} + \frac{3EI}{l} \operatorname{tg} \alpha - \frac{3FI}{l^2} (h_a - h_b)$$

Quando sono noti i momenti sugli appoggi è facile dedurre il valore delle reazioni: si costruisca il poligono funiculare che collega le forze esterne, e si conduca la retta $A_1 B_1$ di chiusura, fig. 10, che determina le reazioni nel poligono delle forze. In seguito si compongano colle forze che agiscono sulla trave i due momenti μ e σ, che è quanto dire si sposti, la retta di chiusura in $A' B'$ se i due segmenti $A_1 A'$ e $B_1 B'$ sono proporzionali rispettivamente a μ ed a σ. Nel primo caso le reazioni sono

$$X_a' = O_1\, 1 \;, \qquad X_b' = O_1\, n$$

nel secondo invece

$$X_a = O_1'\, 1 = O_1\, 1 - O_1 O_1' = X_a' - O_1 O_1'$$

$$X_b = O_1'\, n = O_1\, n + O_1 O_1' = X_b' + O_1 O_1'$$

dalla figura si ricava

$$O_1 O_1' = \frac{b\,(AA' - BB')}{l} = \frac{\mu - \sigma}{l}$$

quindi

$$X_a = X_a' - \frac{\mu - \sigma}{l}$$

$$X_b = X_b' + \frac{\mu - \sigma}{l}$$

Per un carico p uniformemente distribuito per un metro corrente di trave

$$X_a' = Y_b' = \frac{pl}{2}$$

Per un carico isolato P

$$X_a' = P \frac{b}{l}$$

$$Y_b' = P \frac{a}{l}$$

Se applichiamo il teorema antecedente ad una trave AB caricata di un peso p uniformemente distribuito per metro corrente e di un peso isolato P si ottiene: (Vedi Grashof opera cit. pag. 78 ed 83).

a) Se la trave è incastrata alle due estremità

$$X_a = P \frac{(3a + b)\, b^2}{l^3} + \frac{pl}{2} + \frac{6EI}{l^2} (- \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$$

$$Y_b = P \frac{a^2\, (a + 3b)}{l^3} + \frac{pl}{2} + \frac{6EI}{l^2} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

b) Se la trave è incastrata ad un estremo e riposa liberamente su un punto fisso all' altro

$$X_a = P \frac{(3a^2 + 6ab - 2b^2)}{2l^3} + \frac{5}{8} pl - \frac{3EI}{l^2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$Y_b = P \frac{(2a + 3b)\, a^2}{2l^3} + \frac{3}{8} pl - \frac{3EI}{l^2} \operatorname{tg} \alpha$$

Se $h_a - h_b = \varepsilon$

nel primo caso

al valore di X_a bisogna aggiungere
al valore di Y_b bisogna sottrarre $\Bigg\} \; 12 \frac{EI}{l_3} (h_a - h_b)$

nel secondo caso

al valore di X_a bisogna aggiungere
al valore di Y_b bisogna sottrarre $\Bigg\} \; 3 \frac{EI}{l^3} (h_a - h_b)$

c) Se la trave riposa liberamente sugli appoggi

$$\mu = \sigma = 0$$

$$X_a = X_a' = \frac{pl}{2} + \frac{Pb}{l}$$

$$Y_b = Y_b' = \frac{pl}{2} + \frac{Pa}{l}$$

Di una travatura riposante sopra n appoggi consideriamo due campate successive AB e BC; siano fig. 11

l_1 ed l_2 le lunghezze delle due campate

h_a, h_b, h_c ordinatamente le altezze dei punti A, B, C sopra una orizzontale fissa

p_1 e p_2 i pesi unitari uniformemente distribuiti per metro corrente rispettivamente sui tratti AB e BC

μ, σ, τ i momenti sugli appoggi

α, β, γ gli angoli dell' asse neutro longitudinale del solido deformato nei punti A, B, C; applicando le formule (9) e (10) abbiamo

$$\mu = -\frac{p_1 l_1}{12} + \frac{2EI}{l_1} (2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - \frac{6EI}{l_1^2} (h_a - h_b)$$

$$\sigma = -\frac{p_1 l_1}{12} + \frac{2EI}{l_1} (- \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \beta) + \frac{6EI}{l_1^2} (h_a - h_b)$$

eliminando tg α fra le due espressioni che dànno μ e σ si ricava

$$\mu + 2\sigma = -\frac{1}{4} p_1 l_1 + \frac{6EI}{l_1} \operatorname{tg} \beta + \frac{6EI}{l_1^2} (h_a - h_b)$$

per analogia

$$\tau + 2\sigma = -\,{}^1\!/_4\, p_2\, l_2 + \frac{6EI}{l^2}(-\,\mathrm{tg}\ \beta) + \frac{6EI}{l_2^{\,2}}(h_c - h_b)$$

e finalmente eliminando tg β fra le due ultime equazioni si ottiene

$$\mu l_1 + 2\sigma\,(l_1 + l_2) + \tau l_2 = -\,{}^1\!/_4\,(p_1\, l_1^{\,3} + p_2\, l_2^{\,3}) + 6EI\left(\frac{h_a - h_b}{l_1} + \frac{h_c - h_b}{l_2}\right)$$

relazione che costituisce il noto teorema dei tre momenti.

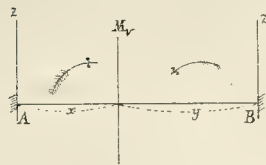
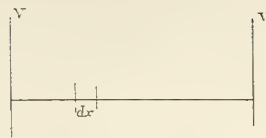
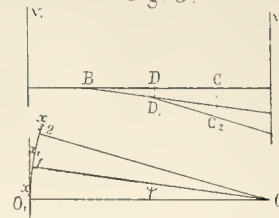
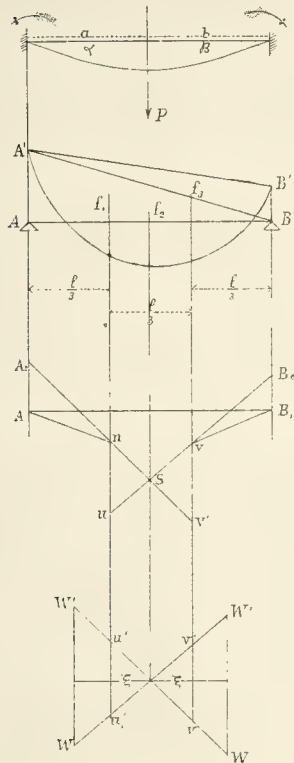
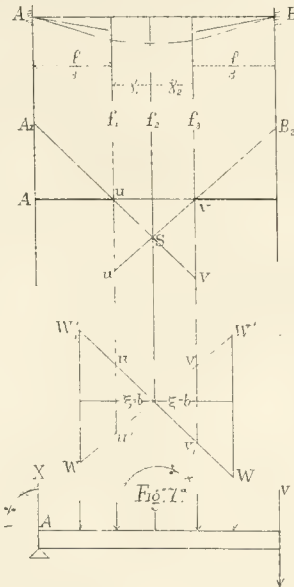
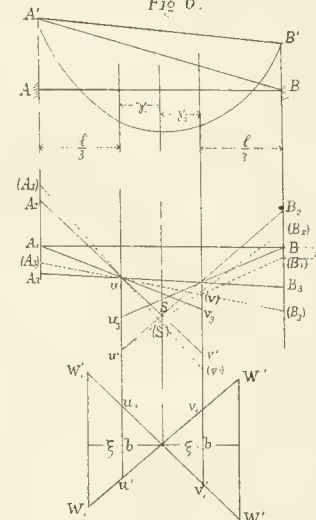
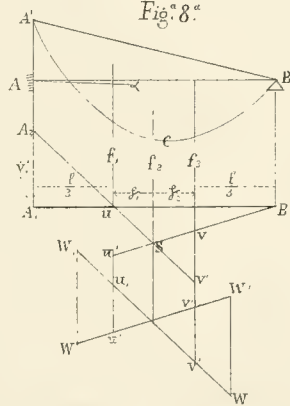
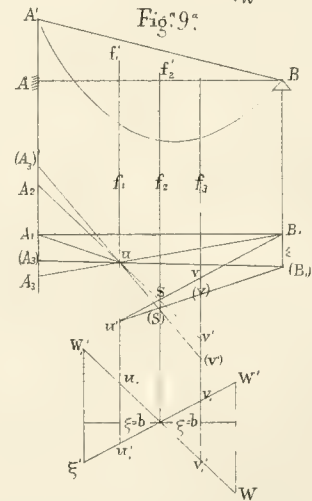
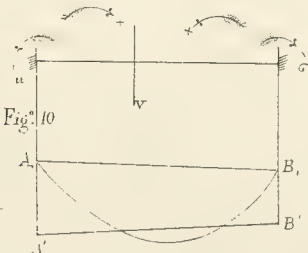
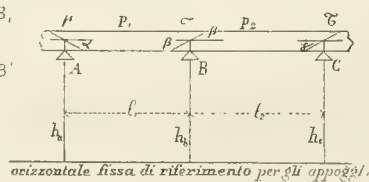



Fig.ª 1ª
Fig.ª 2ª
Fig.ª 3ª
Fig.ª 4ª
Fig.ª 5ª
Fig.ª 6ª
Fig.ª 7ª
Fig.ª 8ª
Fig.ª 9ª
Fig.ª 10
Fig.ª 11ª
orizzontale fissa di riferimento per gli appoggi.

L'AZIONE DELL'ACIDO OSMICO
SULLE CELLULE VEGETALI

NOTA

Del Dott. AGOSTINO ROSSI

(Letta all'Accademia delle Scienze nella Sessione del 22 Aprile 1880)

Ora, che la tecnica microscopica si arrichì di un prezioso reagente adoperato finora, per quanto io sappia, soltanto nello studio dei tessuti animali, pensai di vedere come si comportassero quelli delle piante qualora fossero influenzati dall'acido osmico. Le osservazioni si limitarono all' esame delle cellule epidermiche di due Tradescanzie, la Virginica cioè, e la Discolor, osservazioni, che dirò comparative per la ragione, che stimai fare uso di liquidi di diversa natura allo scopo di rilevarne la differenza dei risultati. Nella Fig. 1ª è rappresentata una cellula epidermica del Caule della Trad. Virgin. esaminata freschissima nel liquido spremuto dalla pianta istessa, e a colpo d'occhio ne emerge la costituzione. La parete presenta delle strozzature, che si succedono ad intervalli regolari a modo di coroncina. L' utricolo primitivo comunemente è segnato da limiti ben netti. Il protoplasma si addimostra ora pressochè diffuso in tutto l' ambito della cellula, ora ratratto verso un lato della medesima. In mezzo al protoplasma finamente granoso si veggono granuli più grossi rotondi, e vi si presentano pure dei vacuoli dovuti al diverso modo di atteggiarsi del protoplasma istesso nei suoi movimenti. In posizione per lo più eccentrica giace il nucleo con nucleolo, e qualche volta con nucleoletto.

Dal fin quì detto risulta, che se anche in questo modo può aversi un' idea abbastanza esatta della costituzione della cellula vegetale, vi mancano però quelle particolarità che sono dovute all' azione diretta dell' acido osmico.

Per le ricerche fu adoperato questo acido in soluzione all' $^1/_{100}$ immergendovi l' epidermide della pianta appena staccata, ed ivi lasciata per più o meno tempo, da pochi minuti ad un' ora.

I preparati si osservarono nella glicerina diluita coll' acqua distillata. Le diverse figure rappresentano le particolarità più salienti risguardanti le parti che costituiscono la cellula. E prima di tutto dirò, che nella membrana sono scomparse que le strozzature, che vedemmo allo stato fresco. Il protoplasma costituito da una sostanza di aspetto nettamente granoso, ora è diffuso per tutta la cellula, ora si atteggia in modo da costituire una specie di forma raggiata. Questo aspetto dipende da che il protoplasma manda da un punto in cui è maggiormente accumulato, e che può essere centrale, od eccentrico, una quantità di filamenti, che vanno ad inserirsi alla parte interna dell' utricolo. In tal modo, ognun vede, che l' aspetto della cellula può cambiare a seconda che questi filamenti sieno più o meno abbondanti, e diversamente disposti. Havvene di quelli talmente sottili da essere costituiti esclusivamente di alcuni granuli, partono dal centro con una specie di base a modo di triangolo, si assottigliano vieppiù nel loro cammino e terminano alla parete o in punte esilissime, o riprendendo la forma triangolare si confondono con lo strato protoplasmatico parietale. Nel protoplasma inoltre osservasi un' altra particolarità, e questa si è, che si rendono molto visibili certi globettini sferici, i quali in alcune cellule sono sparsi irregolarmente, in altre tendono verso il nucleo, ed in alcune questo è od in parte, o del tutto coperto. In questo ultimo caso i globettini si dispongono regolarmente sul nucleo, direi quasi a modo di rosetta, e lo nascondono all' osservatore. Quando non avviene questo fatto il nucleo esiste sempre provvisto di nucleolo, e molte volte anche di nucleoletto. In una cellula rappresentata nella Fig. 5, chiaro apparisce il nucleo circondato da una membranella.

Per l' azione dell' acido osmico adunque resterebbe svelata nel protoplasma in modo evidente l' esistenza di globettini, che dapprima dispersi tenderebbero man mano a recarsi sul nucleo. Oltre a ciò questo reattivo, colla facoltà che possiede di paralizzare e di uccidere il protoplasma, arrestandolo o fissandolo nei suoi movimenti, ci porge favorevole occasione di potere osservare già spente quelle correnti vitali protoplasmatiche, che appunto descrisse il Kühne nelle cellule vive dei vegetali, e che gli fecero paragonare per l' analogo comportarsi, il protoplasma di queste, a quello dell' *Amoeba porrecta*.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1ª — Una cellula epidemica del caule della Tradescantia Virginica. Osservata freschissima nel liquido spremuto dalla pianta istessa.

a, parete della cellula la quale ad intervalli mostra delle strozzature.

b, contenuto della cellula che è ratratto dalla parete.

c, limite del contenuto protoplasmatico della cellula (utricolo primordiale della più parte dei botanici).

d, grossi granuli rotondi che si veggono in mezzo al protoplasma cellulare.

e, vacuetti di diverse figure, e grandezze che appariscono durante la vita nella massa protoplasmatica, e a lor volta scompaiono.

f nucleo rotondo, granoso, e senza nucleolo.

$\frac{H.\ 3}{V.\ 8}$ tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 2ª — Parte di una cellula come sopra.

a, parete colle solite strozzature.

b, protoplasma che si è ritirato da uno dei lati della cellula.

c, nucleo con nucleolo, e nucleoletto.

$\frac{H.\ 3}{V.\ 12}$ immers. tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 3ª — Cellula epidermica della Tradescantia discolor trattata con una soluzione di A. osmico all' 1 % e poi osservata nella glicerina.

a, parete della cellula senza strozzature.

b, contenuto protoplasmatico sparso quasi egualmente per tutto il vano della cellula.

c, nucleo cosparso di parecchi globettini i quali si colorano in nero col mezzo dell' acido osmico.

$\frac{H.\ 2}{V.\ 8}$ tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 4ª — Un' altra consimile cellula e similmente trattata, il cui protoplasma contraendosi lascia parecchi fili che dall' interno della parete della cellula si distendono e si attaccano al nucleo, il quale presenta la medesima apparenza morata che quello della Fig. 3ª.

$\frac{H.\ 2}{V.\ 8}$ tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 5ª — Altra consimile cellula la quale mostra questo di particolare, che cioè il nucleo dá a vedere una manifestissima membranella, ed oltre a ciò dentro esso un nucleolo, e nucleoletto.

$\frac{H.\ 2}{V.\ 8}$ tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 6ª — Un nucleo con dei globettini che regolarmente l' attorniano e con dentrovi un nucleolo e nucleoletto.

$\frac{H.\ 3}{V.\ 8}$ tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 7ª — Altro nucleo provveduto di nucleolo e nucleoletto, e con del protoplasma attornogli il quale si dispone a rapprendersi in forma di minuti globetti.

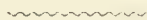
$\frac{H.\ 3}{V.\ 8}$ tubo del microscopio niente allungato.

Fig. 8ª — Altro nucleo con nucleolo e nucleoletto e con dei globetti di protoplasma i quali sono in via di aggrupparsi sopra e attorno ad esso.

SUL MODO
DI TERMINARE DEI NERVI
NEI MUSCOLI DELL' ORGANO SONORO DELLA CICALA COMUNE

NOTA

del Dott. AGOSTINO ROSSI

(Letta nella Sessione ordinaria delli 22 Aprile 1880)

I muscoli di cui mi servii per queste ricerche, furono quelli del timpano o timballo dell' organo sonoro della Cicala comune (Cicada plebeja. Lat.) Riguardo al numero di questi muscoli non sono d' accordo quelli che li studiarono, quali il Dugés che ne ammette due, ed il Carlet uno solo. Io non saprei decidermi su questo, non avendo fatte ricerche in proposito, solo dirò, che mi occupai di tutta quella parte di sostanza muscolare, che è certamente la principale nel produrre nella membrana del timballo le modificazioni atte ad ottenere il suono. Tale sostanza musculare è costituita da fibre parallele le une alle altre, lassamente riunite fra di loro, che partendo dall' entogastro si diriggono obbliquamente dall' interno all' esterno, e vanno ad aderire alla superficie interna rugosa di un dischetto chitinico che trovasi sul davanti della membrana del timballo. Alla superficie esterna poi di questo dischetto havvi uua specie di solco centrale, che serve a a dare attacco ad un processo parimenti chitinico triangolare, che funziona da tendine, e che si inserisce sulla membrana del timballo in alto. Questa membrana è di forma ovale, concava dalla parte interna, convessa dalla parte esterna in istato di quiete, ed è circondata da una specie di cornice o quadrante. In seguito della contrazione muscolare, avviene un cambiamento nella disposizione della membrana istessa, per cui da convessa si fa concava per ritornare convessa cessata la contrazione. Solo a questi cambiamenti, che avvengono nella membrana del timballo è dovuta la produzione del suono della Cicala rafforzato dalle membrane appellate specchio, dalla membrana pieghettata, e dalla cavità addominale, .

parti tutte che funzionano come camera di risonanza. La membrana del timpano o timballo è esilissimo, trasparente e dà a vedere dei tratti più oscuri che la percorrono in senso longitudinale, tratti che rappresentano altrettanti archi chitinici, che valgono a renderla maggiormente elastica. Avrei molto volontieri letto il lavoro del Prof. Carlet „ Sur l' apparcil musicale de la Cigale „ ma non potei procurarmelo, quindi dovetti cercare da me di acquistare cognizioni sulla disposizione anatomiea di questo ingegnoso organo di suono speciale.

Ed ora che ho esposte queste poche cose riguardo alla parte macroscopica, dirò quanto mi fece vedere l' osservazione microscopica.

I muscoli tinti colla soluzione Ammoniacale di Carmino ed osservati per disgregamento nella Glicerina, mostrano distinte tanto le strie longitudinali, quanto le trasverse, i nuclei abbondanti aventi forme diverse sono situati irregolarmente fra il sarcolemma e la sostanza contrattile; sulle fibre si osservano numerosi ramuscelli tracheali, Fig. 1ª. Le sezioni trasversali poi mostrano parimenti i nuclei disposti irregolarmente fra il sarcolemma e la sostanza contrattile, la quale si presenta come divisa in compartimenti per mezzo di setti, che partendo dalla periferia ora convergono verso il centro, ora tenendo un andamento pressocchè orizzontale si uniscono con quelli del lato opposto, ora si perdono nella sostanza contrattile istessa, Fig. 2ª.

In quanto poi alle ricerche sui nervi di cui sono provviste le fibre muscolari, mi servii del metodo che usò il Ranvier per lo studio delle terminazioni nervose nei muscoli lisci e striati, vale a dire del trattamento del succo di limone fresco, spremuto e filtrato susseguito da quello del Cloruro di Oro all' $^1/_{100}$. I preparati furono osservati nella glicerina acidulata con acido Acetico. In tale ricerca mi era proposto di non trascurare nell' esame neppure una fibra, onde potermi rendere conto esatto del modo come si comportassero i nervi, e le mie osservazioni erano pressochè giunte a termine senza risultato, quando solo nelle estremità di quelle fibre muscolari che aderiscono al dischetto o punto mobile mi fu dato riscontrare terminazioni nervose sotto un aspetto che credo almeno, non ancora designato.

La Fig. 3ª rappresenta alcune fibre muscolari, nelle quali le terminazioni nervose sono molto abbondanti, e derivano da due sole fibre, delle quali una cammina in senso trasversale, l' altra in senso obbliquo alle fibre muscolari. In esse chiaramente appariscono il cilindro assile, e la guaina esterna fornita di nuclei ovali.

La fibra si divide e suddivide conservando sempre la guaina, senonchè giunta verso il termine, questa si perde, e persiste il solo cilindro assile, il quale vieppiù si assottiglia per finire in una specie di espansione. Queste terminazioni oltre all' essere molto numerose, possono assumere forme diverse, quali la clavata, la triangolare, hanno contorni ora netti, ora varicosi, e presentano un aspetto granoso.

Che se si fa uso di ingrandimenti forti come si fece per la Fig. 5ª rappresen-

tante un pezzetto di fibra muscolare in sezione, chiaro apparisce come la guaina del ramuscello nervoso si continui col sarcolemma, e come la porzione terminale si trovi circondata da nuclei. Questi nuclei possono mancare, e la terminazione nervosa in allora può essere attorniata da sola sostanza granosa, e contemporaneamente da sostanza granosa e da nuclei, Fig. 4ª.

Dalle quali cose, parmi potersi dedurre: che ciascuna terminazione nervosa nei muscoli dell' organo sonoro della Cicala, altro non sia che il rappresentante della piastra motrice dei muscoli dei vertebrati, e ciò perchè tanto in quella come in questa vi sono compresi gli stessi elementi, vale a dire porzione terminale assile, sostanza granosa, e nuclei. La sola differenza adunque starebbe nel grande numero di queste terminazioni o piastre motrici, numero, che del resto non deve recare meraviglia quando si pensi a quale attività sieno obbligate le fibre muscolari che devono indurre nella membrana del timpano quelle modificazioni atte a produrre l' assordante suono della Cicala. Non vorrei cadere in errore, ma parmi che natura disponesse in modo le cose da far sì, che nei muscoli dell' organo sonoro della Cicala, le piastre motrici riescissero più semplici e più numerose, ravvisando in questo fatto una specie di divisione di lavoro cui ogni fibra dovrebbe prestarsi ad ottenere l' effetto utile.

A convalidare il quale concetto ben m' accorgo, sarebbe stato necessario vedere, se questo modo di terminare delle fibre nervose sia solo proprio dei muscoli dell' organo sonoro, o se si verifichi anche negli altri muscoli della Cicala, converebbero in una parola osservazioni comparative, che mi propongo eseguire a tempo opportuno.

NOTA — Nel giorno istesso in cui feci questa comunicazione, gl' Ill.mi SS.ri Prof. Calori e Dott. Predieri, mi dissero, avere l' Illustre Medici fatto argomento di una sua Memoria l' apparecchio sonoro della Cicala. In questo lavoro, che mi venne gentilmente offerto dal Sig. Prof. Ercolani, trovai, che quanto disse il Medici sulle parti essenziali costituenti il detto apparecchio, coincideva perfettamente con quello, che a me pure fu dato osservare.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Le Figure 1ª e 5ª sono state ricavate dal muscolo tensore del timballo dell'organo sonoro della Cicala comune.

Fig. 1ª — Pezzo di fibra muscolare colorato prima col carminio e poi immersa nella glicerina leggermente acidula.

a, sarcolemma.

b, nuclei proprii della fibra muscolare i quali si trovano irregolarmente sparsi fra la sostanza contrattile ed il sarcolemma.

c, ramuscoli tracheali che si distribuisono alla superficie della fibra.

$\frac{H.\ 2}{V.\ 8}$ tubo del microscopio non allungato.

Fig. 2ª — Due fibre muscolari tagliate per traverso. Medesimo trattamento che la fibra della figura prima.

a, sarcolemma.

b, nuclei muscolari.

c, tramezzi che partiscono la sostanza contrattile della fibra muscolare.

$\frac{H.\ 2}{V.\ 8}$ tubo del microseopio non allungato.

Fig. 3ª — Parecchie fibre muscolari con delle fibre nervose distribuite in esse. Trattamento con succo di limone e cloruro di oro, $1/_{100}$.

a, fibre nervee.

b, guaina.

c, nuclei appartenenti alla guaina.

d, cilindro assile.

e, terminazioni di esse fibre nervee.

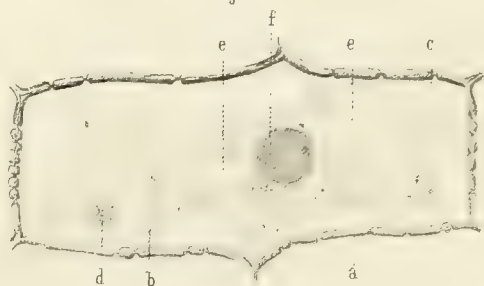
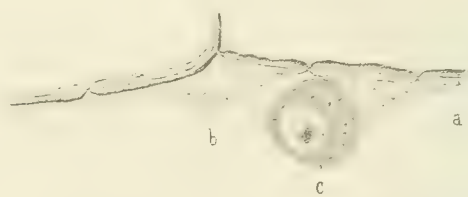
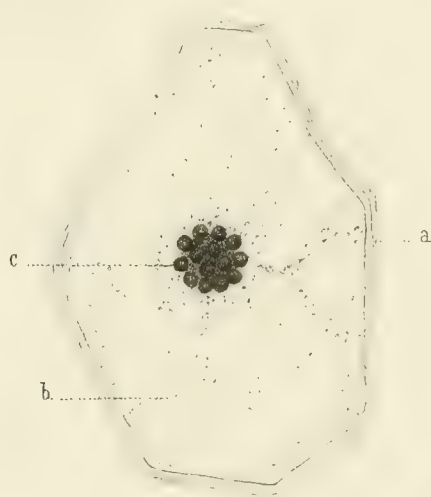
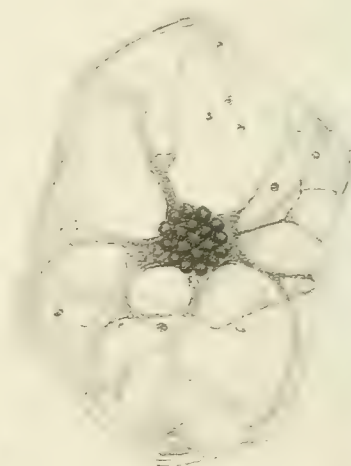
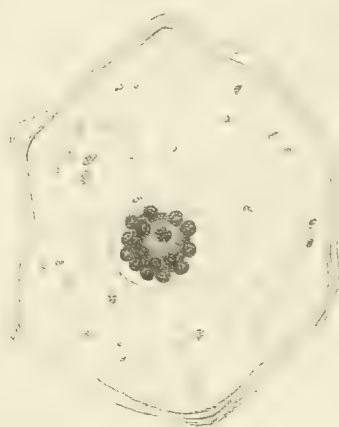
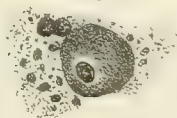
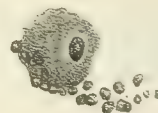
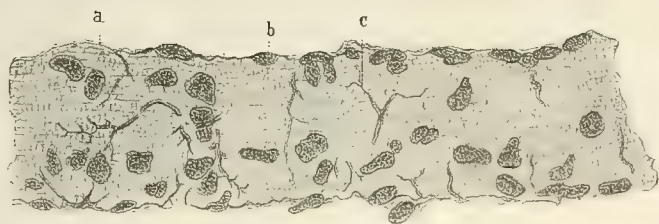
$\frac{H.\ 3}{V.\ 6}$ tubo non allungato.

Fig. 4ª — Pezzetto di fibra muscolare con quattro diramazioni di fibre nervee che in essa terminano.

a, ramuscoli nervosi terminali.

b, sostanza granosa che attornia la parte terminale di dette fibre.

Pio P.e Gregori dis. dal vero ed in pietra.

Bologna, Lit. G. Wenk.

c, nuclei che talvolta si veggono stare attorno ad essa parte terminale.

d, nuclei appartenenti alla fibra muscolare. Lo stesso trattamento che quello della Fig. 3ª

$\frac{H.\ 3}{V.\ 7}$ nuovo modello, tubo niente allungato.

Fig. 5ª — Altro pezzetto di fibra muscolare trattata come sopra.

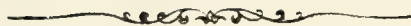
$\frac{H.\ 3}{V.\ 8}$ tubo non allungato.

a, guaina del ramuscolo nervoso che si continua al sarcolemma della fibra muscolare.

b, parte terminale di esso ramuscolo.

c, nuclei che attorniano essa parte terminale.

DETERMINAZIONE DELL'OSSIGENE ATTIVO

NEL

BIOSSIDO DI BARIO COMMERCIALE

MEMORIA

Del Dott. Ing. CAVAZZI ALFREDO

(Letta nella Sessione ordinaria delli 20 Maggio 1880)

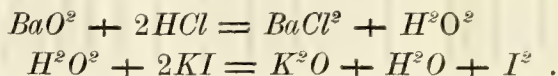
Quel Biossido di bario che volgarmente è chiamato *Barite ossigenata*, è un prodotto chimico che acquista ogni giorno maggiore importanza. In passato serviva quasi esclusivamente alla preparazione dell'acqua ossigenata, alla fabbricazione economica dell' ossigene secondo il processo di Boussingault e a produrre l' ozono; oggi l' uso di esso si è grandemente esteso da che l' industria trae largo profitto della barite ossigenata nell' imbianchimento della seta e per il decoloramento dei capelli.

L' attività chimica di questo ossido nelle varie sue applicazioni risiede nella facilità colla quale può cedere direttamente, o indirettamente passando prima allo stato di acqua ossigenata, la metà del suo ossigene ai corpi atti a subire dei fenomeni di ossidazione e che perciò prende il nome di *ossigene attivo*. Egli è perciò che il valore intrinseco del prodotto che si vende in commercio sta in proporzione diretta colla quantità di ossigeno attivo che esso può somministrare e quindi colla quantità del composto BaO^2 che ne costituisce il principio utile nelle applicazioni.

Io ho avuto occasione di studiare un saggio di barite ossigenata proveniente da una fabbrica estera, che conteneva soltanto 29,08 % di biossido e 70,92 di protossido. Nelle migliori qualità si trova in media l' 82 % di sostanza attiva. Questa grande variabilità di composizione deriva in parte da difetto di preparazione e di conservazione, e spesso ancora dall' aggiunta dolosa di sostanze minerali pulverulenti al biossido somiglianti, come sarebbero ad esempio la polvere di certi calcari, il fosfato di calcio, il gesso, il solfato, il carbonato e il fosfato

di bario e di stronzio, la silice, l' argilla, la dolomite, la calce, l'ossido e carbonato di magnesio ecc.

Nel Bollettino della Società Chimica di Parigi del 20 Febbraio 1880, pag. 148, il chimico Armando Bertrand ha descritto un metodo volumetrico sul dosamento dell' ossigene attivo nella barite e nell' acqua ossigenata fondato sulle note reazioni espresse nelle seguenti equazioni chimiche

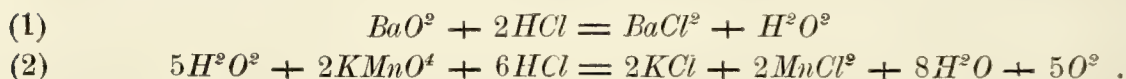
$$BaO^2 + 2HCl = BaCl^2 + H^2O^2$$
$$H^2O^2 + 2KI = K^2O + H^2O + I^2 \ .$$

Dalle quali si rileva che 254 parti in peso di iodio che resta isolato corrispondono a 16 di ossigene attivo e quindi a 169 di puro biossido BaO^2. L' autore determina la quantità del iodio messo in libertà dall' acqua ossigenata col mezzo di una soluzione titolata di iposolfito di sodio.

La preparazione dei liquidi titolati richiede del ioduro di potassio privo di iodato e del iodio purissimo.

Di qui mi è sorto il pensiero di studiare i metodi più acconci a svelare la ricchezza di biossido nella barite ossigenata e specialmente poi di trovare un processo volumetrico che fosse preferibile per semplicità e speditezza.

1. Processo volumetrico.

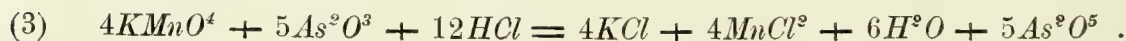
Questo processo è fondato sulla nota proprietà che ha l' acqua ossigenata di decolorare immediatamente la soluzione di permanganato di potassio in presenza di una quantità relativamente forte di acido cloridrico. Ecco le reazioni fondamentali

$$(1) \qquad BaO^2 + 2HCl = BaCl^2 + H^2O^2$$
$$(2) \qquad 5H^2O^2 + 2KMnO^4 + 6HCl = 2KCl + 2MnCl^2 + 8H^2O + 5O^2 \ .$$

La quantità di soluzione titolata di permanganato che occorre per ottenere il coloramento roseo caratteristico di questo composto, è esattamente proporzionale alla quantità di acqua ossigenata che si trova in soluzione.

Soluzione titolata di permanganato.

Per titolare la soluzione di permanganato si presta molto bene l' anidride arseniosa, che si può felicemente avere pura e secca col mezzo della sublimazione.

L' azione chimica corrisponde alla seguente equazione

$$(3) \qquad 4KMnO^4 + 5As^2O^3 + 12HCl = 4KCl + 4MnCl^2 + 6H^2O + 5As^2O^5 \ .$$

In fatti gr. 0,50 di anidride arseniosa sciolti in 5 cent. cub. di acido cloridrico

fumante e misti con 30 a 50 cent. cubi. di acqua distillata bollente, decolorano esattamente 50 cent. cub. di una soluzione di permanganato contenente gr. 0,3193 di questo composto puro e diseccato a 100° centigradi. E ciò corrisponde al rapporto in peso che passa fra 4 molecole di permanganato e 5 molecole di anidride arseniosa. Nella reazione non accade svolgimento di ossigene e il manganese si converte tutto in cloruro manganoso.

Il Bussy aveva proposto di dosare l'acido arsenioso e gli arseniti sciolti in acido cloridrico diluito, con una soluzione titolata di permanganato. (Comptes rendus t. XXIV, pag. 774). Il processo non fu accolto favorevolmente e si preferisce in generale di determinare l'acido arsenioso con una soluzione titolata di iodio. Dopo le numerose esperienze da me istituite in proposito ho potuto convincermi che i risultati sono esatti anche nel primo caso, quando si abbia cura di eseguire queste operazioni in soluzioni *non troppo diluite* e ad una temperatura *prossima all'ebollizione*. Di fatti 5 decigrammi di anidride arseniosa sciolti a caldo in 5 cent. cub. di acido cloridrico fumante e misti ad acqua, richiedono per convertirsi in acido arsenico uno stesso volume di soluzione titolata di permanganato tanto se la reazione avviene in 40 cent. cub. di liquido, quanto in 150; a condizione però che si operi alla temperatura già indicata. Questa condizione che non venne raccomandata dal Bussy è essenziale all' esattezza dei risultati quanto l'evitare una eccessiva diluzione dello sciolto arsenioso in cui si effettua la reazione.

Onde per titolare la soluzione di permanganato si sciolgono 5 decigrammi di anidride arseniosa, recentemente sublimato, in 5 cent. cub. di acido cloridrico fumante e quasi bollente: avvenuta la soluzione completa si aggiungono 50 cent. cubi circa di acqua distillata bollente e si mantiene il liquido ad una temperatura poco lontana ai 100.°

D' altra parte si sciolgono gr. 6,386 di permanganato puro e diseccato a 100°, in 1 litro di acqua. In queste condizioni per trasformare 5 decigrammi di anidride arseniosa in anidride arsenica occorrono 50 cent. cub. di detta soluzione. Se il permanganato non è di totale purezza se ne impiega in tale quantità da poter trasformare con 50 cent. cub. di soluzione, 5 decigrammi di anidride arseniosa, sciolti come sopra fu detto, in anidride arsenica.

Ora con una buretta di Gay-Lussac si fa cadere a goccie la soluzione di permanganato nella soluzione cloridrica quasi bollente dei 5 decigrammi di anidride arseniosa. Quando si è vicino al momento della trasformazione completa, non si fanno cadere che due o tre goccie per volta coll' avvertenza di aspettare che il liquido sia divenuto completamente *scolorato* prima di aggiungerne altre: e ciò accade in pochi secondi. Operando con diligenza il coloramento roseo chiaramente e sempre si manifesta al momento che tutto l'acido arsenioso si è convertito in acido arsenico. Ma se per inavvertenza sfuggisse il momento della reazione finale indicata dalla colorazione rosea, il liquido in cui si fossero versate anche poche goccie in eccesso di permanganato non diventa più scolorato come l' acqua, ma assume e conserva una tinta leggermente gialla verdastra pure sensibilissima.

È facile trovare con semplici calcoli che 50 cent. cub. di questa soluzione di permanganato, decolorati da acqua ossigenata, corrispondono a

$0^{gr},0808$ di ossigene attivo ed a
$0^{gr},8535$ di puro Biossido BaO^2.

Con questi dati si può facilmente calcolare la quantità di ossigene attivo o di puro biossido contenuto nei vari saggi di barite ossigenata del commercio, conoscendo il numero dei cent. cub. di soluzione titolata che sono stati impiegati per un dato peso del biossido in esame per arrivare al coloramento roseo che permane non pochi minuti.

Dal confronto delle equazioni chimiche (2) e (3) si rileva manifestamente che la stessa quantità di permanganato decomposto corrisponde alla medesima quantità di ossigene attivo, sia che la reazione venga determinata dall' acqua ossigenata o dall' anidride arseniosa. Difatti 4 molecole di permanganato decomposto, tanto nell' un caso come nell' altro corrispondono a 5 molecole di ossigene attivo. Nella reazione espressa nell' equazione (2) con 4 molecole di permanganato si hanno bensì 10 molecole di ossigene che si svolge, ma la metà di questo elemento proviene dal permanganato e non dall' acqua ossigenata, per cui la metà soltanto opera come ossigene attivo sul permanganato in azione.

Pratica dell' analisi.

Si prendono 5 decigrammi di barite ossigenata finamente polverizzata oppure 1 grammo se il biossido BaO^2 è in scarsa quantità. Si stempera la materia pulverulenta in 100 cent. cub. di acqua distillata entro un bicchiere da precipitato, che si tiene immerso nell' acqua fredda. In un altro bicchiere si prepara una soluzione con 5 cent. cub. di acido cloridrico fumante e 50 cent. cub. di acqua distillata fredda. La soluzione acida diluita si fa cadere a goccia a goccia sulla soluzione baritica agitando blandemente con cannellino di vetro. Sul liquido così ottenuto, sia perfettamente limpido o no, si lascia cadere a goccia a goccia la soluzione titolata di permanganato sino a che si ottiene il coloramento roseo che apparisce quando tutta l' acqua ossigenata, che si era formata nell' azione dell'acido cloridrico sul biossido di bario, sia stata distrutta dal permanganato. Moltiplicando il numero dei cent. cub. di soluzione di permanganato che sono stati all' uopo impiegati per Gr. 0,001616 si ha la quantità di ossigene attivo contenuto nel peso di barite ossigenata sottoposto all' esperimento : moltiplicandolo invece per Gr. 0,01707 si ha la quantità di vero biossido BaO^2.

Applicando questo processo ad un saggio di barite ossigenata ho trovato che conteneva 29,08 % di puro biossido : il rimanente era costituito da protossido di bario.

Questo processo razionale, semplice, spedito ed esatto dà risultati concordanti anche quando si aumenta notevolmente la quantità di acido cloridrico che agisce sulla barite ossigenata; ma per maggiore sicurezza e rapidità di azione non consiglierei di impiegare meno di 5 cent. cub. di acido cloridrico fumante per mezzo grammo o per 1 grammo di polvere baritica.

Non voglio passare sotto silenzio un fatto singolare e del quale non è facile rendersi ragione: e cioè che le prime goccie di soluzione di permanganato che si versano sulla soluzione cloridrica di barite ossigenata non si scolorano immediatamente, come invece accade in seguito una volta che il fenomeno ha avuto principio.

II. Processo a peso.

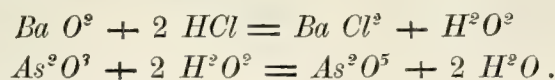
Questo processo è fondato sulla proprietà che ha l' acqua ossigenata di trasformare l' acido arsenioso in acido arsenico. È noto ancora che l' acido arsenico, alla stessa maniera dell' acido fosforico viene precipitato dal reattivo triplo ($Cl\ AzH^4$, $MgCl^2$, AzH^3) sotto forma di arseniato ammonico magnesiaco che disseccato fra 105° e 110° ha la seguente composizione

$$\begin{aligned} 2\,MgO &= 80 \\ (AzH^4)^2O &= 52 \\ As^2O^5 &= 230 \\ H^2O &= 18 \\ \hline & 380 \end{aligned}$$

Invece l' acido arsenioso non è precipitato dal reattivo triplo anche in una soluzione fortemente ammoniacale.

Pratica dell' analisi.

Si fa una soluzione a caldo di Gr. 1,50 di anidride arseniosa in 10 cent. cub. di acido cloridrico fumante: si aggiunge acqua tanto da formare 100 cent. cub. circa e si lascia raffreddare. Grammi 2 di barite ossigenata vengono stemperati in 25 cent. cub. di acqua agitando con cannellino di vetro e si fa cadere il liquido torbido a goccia a goccia nella soluzione cloridrica agitando di continuo. Sulla polvere che rimane nel bicchierino si versano altri 25 cent. cub. di acqua e si opera come sopra, finalmente quel poco di barite ossigenata che resta aderente al bicchierino si scioglie in piccola quantità di acido cloridrico diluitissimo e si unisce questo al liquido primo. Allora avvengono successivamente e immediatamente le due seguenti reazioni

$$Ba\ O^2 + 2\ HCl = Ba\ Cl^2 + H^2O^2$$
$$As^2O^3 + 2\ H^2O^2 = As^2O^5 + 2\ H^2O\,.$$

È meglio versare il liquido torbido contenente il biossido sulla soluzione cloridrica di acido arsenioso che fare l'inverso.

Dopo mezz'ora circa di riposo si aggiunge una soluzione satura di solfato di potassio in quantità sufficiente per precipitare tutto il bario. Dopo 2 ore si feltra e sul liquido feltrato (A) si aggiunge ammoniaca sino a reazione fortemente alcalina. Se il biossido è di buona qualità e non sia misto che a protossido di bario la soluzione *deve rimanere limpida.* Allora si aggiunge a poco a poco reattivo triplo avendo cura di non metterne in troppo eccesso. Dopo aver agitato la massa con un cannellino di vetro si lascia in riposo per 2 ore almeno. Si raccoglie l'arseniato ammonico magnesiaco su feltro di carta Berzelius, si lava con acqua fredda fortemente ammoniacale per diseccarlo poscia entro stufa durante 3 ore alla temperatura di 105 a 110° e finalmente si pesa.

100 parti in peso di arseniato ammonico magnesiaco così condizionato corrispondono a 8,421 di ossigene attivo e quindi ad 88,946 di puro biossido. Chiamando con x ed y le quantità di ossigene attivo e di biossido di bario corrispondenti ad una quantità q di arseniato ammoniaco magnesiaco avremo

$$\text{Ossigene attivo } x = \frac{q \times 8,421}{100}$$

$$\text{Biossido di bario } y = \frac{q \times 88,946}{100} .$$

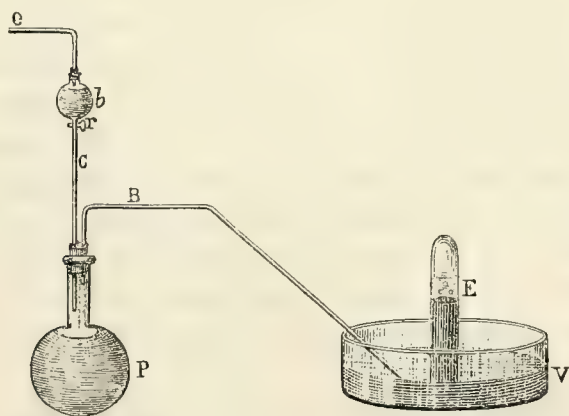
Applicando questo processo al saggio di barite ossigenata che era stato analizzato colla soluzione titolata di permanganato, da gr. 3 di sostanza ho ricavato in media Gr. 0,982 di arseniato ammonico magnesiaco corrispondente a 28,97 % di puro biossido invece di 29,08 trovato col metodo precedente.

Questo processo è abbastanza esatto, semplicissimo e spedito. Non è applicabile tutte le volte che l'aggiunta dell'eccesso di ammoniaca nella soluzione cloridrica (A) dia luogo alla produzione di un precipitato il quale potrà specialmente contenere acido arsenioso, acido arsenico e anche acido fosforico, uniti agli ossidi di ferro di alluminio di calcio e di magnesio. La soluzione ammoniacale (A) potrebbe ancora rimanere limpida e contenere ad un tempo acido fosforico che precipita col reattivo triplo alla stessa maniera dell'acido arsenico. Occorre quindi mettere prima in chiaro la presenza o no dei fosfati nella barite ossigenata nel modo seguente: sciogliernc un poco in acido cloridrico diluito, evaporare a secco a non meno di 100°, aggiungere al residuo un poco d'acqua leggermente acidulata con acido cloridrico: precipitare il bario con solfato di potassio e feltrare. Dopo aver neutralizzato il liquido feltrato con ammoniaca si aggiunge reattivo triplo. Se si forma un precipitato bisogna raccoglierlo su feltro, scioglierlo in poche goccie di acido nitrico e assaggiarlo col molibdato di ammonio sciolto pure in acido nitrico. Non ottenendo un precipitato giallo il processo si può applicare con profitto. Se

poi neutralizzando la soluzione cloridrica (A) si ottiene un precipitato abbondante o che la barite ossigenata contenga acido fosforico, val meglio praticare il processo volumetrico precedente o quello che descriverò fra breve.

III. Determinare il volume dell'ossigene attivo.

L'acqua ossigenata pura od in soluzione, col riscaldamento si sdoppia in acqua ed in ossigene ordinari. Questa proprietà fu messa a profitto all'intento di determinare la composizione dell'acqua ossigenata e la quantità di questo composto esistente in una soluzione. Volendo applicare il medesimo fenomeno alla determinazione esatta dell'ossigene attivo della barite ossigenata del commercio, fa d'uopo eseguire l'operazione con mezzi e con avvertenze che il chimico può avere interesse di conoscere nei più minuti particolari.

L'apparecchio che io adopero si compone di un palloncino P di vetro della capacità di 350 cent. cub. circa, con un collo lungo 8 cent. e avente un diametro interno di 2 centimetri e mezzo. Al palloncino si può applicare un tappo di gomma elastica che porta due tubi; l'uno B che va a pescare nel mercurio della vasca V, l'altro C ad imbuto e munito di una chiavetta di vetro r. L'estremità inferiore del tubo C deve trovarsi a $\frac{2}{3}$ circa della lunghezza del collo del palloncino e non toccare mai il liquido che verrà introdotto nel recipiente, quand'anche sia in piena ebollizione. Il tubo B esce appena alla base inferiore del tappo. Tolto questo coi due tubi, si empie quasi per intero il recipiente P con acqua distillata che si fa bollire alcuni minuti all'intento di scacciare i gas sciolti; e quando è pieno di vapor d'acqua bollente si chiude ermeticamente con un tappo

in modo da impedire l'entrata dell'aria durante il raffreddamento completo del liquido. Allora col mezzo di un piccolo sifone si estraggono dal palloncino senza agitazione 100 cent. cub. di acqua fredda a cui si aggiungono 15 cent. cub. di

acido cloridrico fumante. Rimangono 250 cent. cub. circa di acqua nel recipiente *P* nel quale vengono introdotti Gr. 2 di barite ossigenata o Gr. 4 se il biossido BaO^2 è in scarsa quantità, raddoppiando in questo caso la quantità dell' acido cloridrico. Si agita la polvere introdotta nel palloncino con cannellino di vetro e poscia vi si aggiunge a poco a poco la soluzione acida facendola scorrere sul cannellino medesimo onde evitare per quanto è possibile l' agitazione delle due soluzioni e quindi l' assorbimento dei gas dell' atmosfera. Dopo aver versato nel palloncino la soluzione cloridrica deve rimanere libero il collo, più una piccola parte del pallone com' è indicata nella figura. Se lo spazio libero fosse maggiore occorrerebbe prolungare troppo l' ebollizione per far passare tutto l' ossigene, che si svolge dall' acqua ossigenata, sotto il recipiente destinato a riceverlo. Rimesso il tappo che porta i due tubi *B* e *C*, si apre la chiavetta *r* e si fa passare per il tubo *d* una corrente di acido carbonico che scaccia l'aria dall' apparecchio. Quando dall' estremità del tubo abduttore escono soltanto delle bolle gassose completamente assorbite dalla potassa, si chiude la chiavetta *r* e si empie la bolla *b* con acqua distillata priva di gas: applicando di nuovo il tubo *d* e soffiando all' estremità *e* si fa in modo che aprendo con precauzione la chiavetta *r* l' acqua in parte discenda quanto basta per riempire il tubo *C*, il quale resta pieno di liquido finchè dura l' esperienza, purchè, come già dissi, il liquido del palloncino non giunga a toccare la estremità inferiore del tubo medesimo. Ciò ottenuto bisogna chiudere subito la chiavetta *r*. All' estremità ricurva del tubo abduttore che sta immersa nel mercurio si sovrappone una campana *E* piena di mercurio avente un diametro di 4 cent. ed alla sommità 15 cent. cub. circa di una soluzione concentratissima di potassa caustica fatta prima bollire a fine di espellere le materie gassose. Dopo avere così disposto l' apparecchio si comincia a riscaldare a poco a poco il palloncino sino alla temperatura della ebollizione che in principio si mantiene non tumultuosa non meno di 30 minuti: poi si dà un colpo di fuoco maggiore affinchè lo sviluppo rapido del vapor d' acqua spinga tutto l' ossigene svoltosi dall' acqua ossigenata sotto la campana *E*. Ciò raggiunto si toglie la campana dalla vasca, si agita il gas raccolto per far assorbire tutto l' acido carbonico e si lascia raffreddare alla temperatura ordinaria. Aprendo poscia la campana sott' acqua, il mercurio discende; si travasa il gas sotto campana graduata di diametro minore e si legge il volume gassoso, notando con precisione la temperatura e la pressione atmosferica.

Da 4 grammi del saggio di barite ossigenata analizzata coi due precedenti metodi ho ricavato $76^{c.c}$, 79 di ossigene supposto secco a 0^0 ed alla pressione di 760^{mm}. Fatti i debiti calcoli risulta che il saggio in discorso contiene 29,08 % di puro biossido.

Questo processo è semplice, spedito ed esatto e sarebbe da preferirsi agli altri due nel caso che si avesse da praticare una simile ricerca sopra un saggio solo.

Prolungando molto la ebollizione l' errore proveniente dalla relativa stabilità dell' acqua ossigenata in un mezzo acido è sempre piccolissimo; e quella parte

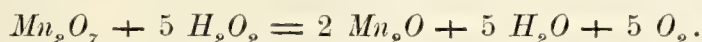
che potesse volatilizzarsi inalterata per distillazione si scomporrebbe al contatto della soluzione alcalina contenuta nella campana *E* e che si riscalda nel corso dell' esperimento.

In mancanza di mercurio si può adoperare per vasca una capsula con acqua di recente bollita e che per maggiore garanzia di buon risultato sarebbe opportuno di mantenere calda durante l' esperimento. Allora la campana avrà una capacità sufficiente per accogliere l' acido carbonico che resta nell' apparecchio non che l' ossigene che si svolgerà dall' acqua ossigenata. Colla potassa viene assorbito l' acido carbonico e si misura colle solite avvertenze l' ossigene raccolto. I risultati sono ancora soddisfacenti.

Osservazione sulla equazione chimica.

$$(R) \quad 5\ H^2O_2 + 2\ KMnO^4 + 6\ HCl = 2\ KCl + 2\ MnCl^2 + 8\ H^2O + 5\ O^2$$

L' azione del permanganato sull' acqua ossigenata in soluzione acida fu studiata dal Brodie nel 1861. Una nota relativa a questo lavoro venne pubblicata nel „ Proceedings of the Royal Society of London „ Volume XI (1860-1862) e riportata negli „ Annales de Chimie et de Physique „ LXV-III serie (1851-63). In quella nota è detto soltanto che una soluzione acida di acido permanganico decompone l' acqua ossigenata e che la decomposizione si fa in proporzioni atomiche secondo l' equazione seguente

$$Mn_2O_7 + 5\ H_2O_2 = 2\ Mn_2O + 5\ H_2O + 5\ O_2 .$$

Molto probabilmente il Brodie nelle sue esperienze sarà partito direttamente dall' acqua ossigenata. Io sono arrivato al medesimo risultato ed alle medesime conclusioni operando sopra il saggio di barite ossigenata precedentemente analizzato e che mi risultava contenere 29,08 % di puro Biossido. Per cui 4 grammi di detta sostanza stemperati in acqua e trattati con acido cloridrico diluito in eccesso fornivano una soluzione contenente Gr. 0,2342 di acqua ossigenata, per decomporre la quale occorrevano 68 cent. cub, della soluzione titolata di permanganato. Questi 68 cent. cub. contenevano Gr. 0,4322 di permanganato. Ora

$$\begin{array}{l} 5\ H^2O_2 \quad 2\ KMnO^4 \\ 170 : 316,2 :: 0,2342 : 0,4355. \end{array}$$

La differenza fra 0,4322 e 0,4355 è abbastanza piccola per doverla attribuire agli errori inevitabili di codeste esperienze.

Inoltre se la equazione (*R*) esprime con esattezza la reazione del permanganato sulla soluzione acida di acqua ossigenata, la quantità in volume di ossigene

che si ottiene da un dato peso di biossido trattato con acido cloridrico e poscia colla quantità di permanganato necessario per decomporre *esattamente* l' acqua ossigenata prodottasi, deve essere *doppia* della quantità di ossigene che si ottiene dal medesimo peso di barite ossigenata trattata solo con acido cloridrico e sotto l' influenza del riscaldamento.

A confermare questo fatto mi sono valso dell' apparecchio rappresentato nella figura precedente. Ho introdotto nel palloncino *P* acqua distillata priva di gas, Gr. 2 di barite ossigenata, poi 15 cent. cub. di acido cloridrico fumante stemperati in molt' acqua, usando le avvertenze e gli artifizi descritti nel 3° processo. Dopo aver fatto passare per l' apparecchio una corrente di acido carbonico ho chiuso la chiavetta *r* e introdotta nella bolla *b* la quantità di soluzione di permanganato necessaria per decomporre esattamente l' acqua ossigenata formatasi nel liquido del palloncino. Soffiando colle solite avvertenze all' estremità del tubo *a* ho fatto discendere la soluzione di permanganato aprendo debitamente la chiavetta *r*. Non fa d' uopo dire che una piccola parte di liquido deve sempre rimanere nella bolla *b*. Aggiungendo più volte acqua nella bolla tutto il permanganato si fa cadere entro il palloncino. In seguito condussi il riscaldamento come fu detto più sopra, avvertendo che in questo caso l' ebollizione non doveva essere tanto rapida da cacciare il liquido del palloncino che contiene cloruro manganoso sotto la campana *E*, poichè al contatto della potassa che deve trovarsi alla sommità della campana medesima si formerebbe dell' idrato manganoso il quale si ossiderebbe a spese dell' ossigene in essa raccolto.

Procedendo in questo modo da Gr. 2 di barite ossigenata ho ottenuto precisamente la stessa quantità di ossigene che io aveva in precedenza ricavata da Gr. 4 della stessa sostanza ma trattati soltanto con acido cloridrico.

Trovato il rapporto fra il numero delle molecole che prendono parte alla reazione si vede che la equazione (*R*) ammette questa interpretazione: in presenza dell' acqua ossigenata e del permanganato, il cloro dell' acido cloridrico converte il potassio e il manganese in cloruro di potassio e cloruro manganoso; i 6 atomi di idrogene dell' acido cloridrico si uniscono con 3 atomi di ossigene delle 2 molecole di permanganato per formare dell' acqua: i 5 atomi rimanenti del permanganato si uniscono alla metà dell' ossigene dell' acqua ossigenata disossidandola per produrre 5 molecole di ossigene ordinario.

Io ho stimato opportuno di dare queste indicazioni intorno alle esperienze da me fatte per giungere ai medesimi risultati ottenuti dal Brodie, forse con metodo analogo, nella speranza che ciò possa tornare di qualche giovamento e servire di indirizzo allo studio dell' azione del permanganato sopra molti altri corpi.

SUL MOTO DELL' ACQUA
PER ALVEI A FONDO ORIZZONTALE

MEMORIA

DEL PROF. CESARE RAZZABONI

(Letta nella Sessione Ordinaria delli 20 Maggio 1880)

1°. Le resistenze uniformi che le acque scorrenti per gli alvei debbono continuamente superare si conviene ormai da tutti, che abbiansi a considerare proporzionali direttamente alla velocità media della sezione, ed inversamente al raggio medio. Indicando quindi con gF questa forza con v la velocità media, con R il raggio medio della sezione si suppone

$$gF = f\frac{v^2}{R}.$$

La f è una quantità che per molto tempo si è ritenuta costante, e che successivamente si è trovato più conforme al vero supponendola variabile. Così il Prony e più tardi l' Eytelwein attribuirono ad f la forma

$$f = \alpha + \frac{\beta}{v}$$

α e β essendo due costanti. Il Bazin invece pone

$$f = \alpha + \frac{\beta}{R}$$

e ad α e β assegna valori variabili colla scabrosità dell' alveo. Gli ingegneri americani Humphreys ed Abbot assumono

$$f = 8{,}29\,\beta\sqrt{R_1}\sqrt[4]{i}$$

essendo $R_1 =$ al raggio medio principale, ed i la pendenza superficiale della corrente; con la quale formola alla f si attribuiscono condizioni di variabilità dipendenti dal raggio medio principale, e dalla pendenza della corrente. Finalmente il Kutter sulla base delle esperienze del Bazin e delle americane ha composto una formola per la quale si fa

$$f = \frac{(\sqrt{R} + b)^2}{a^2 R}$$

dove a è un numero fisso, e b varia colla scabrosità dell' alveo.

2°. Queste, per tacere delle altre, sono le forme diverse attribuite alla f; si comprende quindi quali influenze esse debbono avere sulle formole del moto delle acque correnti, ed a quali risultamenti analitici tutti differenti esse abbiano a condurre. Un saggio di cotali diversità ho pensato di mostrare in questa Memoria dove limito la questione al movimento delle acque per alvei a fondo orizzontale.

3°. Suppongasi quindi un tronco d' alveo rettilineo di sezione pressochè rettangola colla lunghezza notabilmente maggiore dell' altezza. Sia Q la portata della corrente, l la larghezza costante dell' alveo, y l' altezza dell' acqua nella sezione distante x da quello di origine in a-monte (la x misurata sul fondo dell' alveo) l' equazione del moto permanente è

$$g\,(i - F)\,dx = vdv \tag{1}$$

Ora se chiamiamo i' la pendenza del fondo dell' alveo sarà $i = \frac{dx}{dy} - i'$, per cui la precedente equazione diverrà

$$g\left(\frac{dy}{dx} - i' - \frac{v^2}{R} f\right) dx = vdv \tag{2}$$

e per il caso dell' alveo orizzontale essendo $i' = 0$

$$g\left(\frac{dy}{dx} - \frac{v^2}{R} f\right) dx = vdv\,. \tag{3}$$

4°. Preparata così l' equazione fondamentale del moto per gli alvei orizzontali passiamo a determinare la curva del pelo d' acqua. A tal fine, attesa la prevalenza della larghezza dell' alveo sull' altezza si potrà prossimamente porre $R = y$; inoltre essendo $v = \frac{Q}{ly}$, e $vdv = -\frac{Q^2}{l^2}\frac{dy}{y^3}$ la (3) diverrà

$$dy - \frac{Q^2}{l^2 y^3} f\,dx = -\frac{Q^2}{gl^2}\frac{dy}{y^3}$$

onde la

$$dy\left(y^3+\frac{Q^2}{gl^2}\right)=f\frac{Q^2}{l^2}\,dx \tag{4}$$

che rappresenterà l' equazione differenziale della curva richiesta.

Detta v_0 la velocità nella sezione di origine, ed h_0 l' altezza dovuta; posta pure y_0 l'altezza dell' acqua nella medesima sezione, sarà $Q=lv_0y_0$, e quindi la (4) diverrà

$$dy\left(\frac{y^3}{y_0^{\,2}}+2h_0\right)=2fgh_0dx\,. \tag{5}$$

Da questa poi si ricava

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2gh_0y_0^{\,2}\,\frac{(y^3+2h_0y_0^{\,2})\dfrac{df}{dy}-3fy^2}{(y^3+2h_0y_0^{\,2})}\,\frac{dy}{dx} \tag{6}$$

la quale servirà a riconoscere se la curva del pelo d' acqua volge la concavità o la convessità al fondo dell' alveo.

5°. Premesse queste formole generali passeremo ad applicarle nel caso di f costante, e di f variabile secondo Prony, Bazin, e Kutter. Incominciamo dal 1° caso e cioè da $f=a$, essendo a costante.

Osserveremo intanto che nella (6) il segno di $\frac{d^2y}{dx^2}$ dipende da quello del trinomio che è nel numeratore. Ora questo trinomio, essendo $f=a$, riducesi all' ultimo termine $-3ay^2$ per cui $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, e quindi la curva del pelo d' acqua in questo caso sarà concava verso il fondo dell' alveo. L' equazione poi finita di questa curva si avrà integrando la (5), locchè da.

$$\frac{y^4-y_0^{\,4}}{4\,y_0^{\,2}}+2h_0\,(y-y_0)=2agh_0x\,. \tag{7}$$

Se per x grande la differenza $y-y_0$ si mantiene assai piccola in allora sostituendo nella (7) alla $y-y_0$ la variabile z, e tenendo conto dei termini in z che contengono le potenze 2^e, si avrà l' altra equazione approssimata del pelo d' acqua, che sarà la seguente

$$z^2+\frac{2}{3}(y_0+2h_0)\,z=+\frac{3}{4}\,agh_0x \tag{8}$$

dalla quale si ricava

$$(9) \qquad z = -\frac{1}{3}\left\{(y_o + 2h_o) - \sqrt{(y_o + 2h_o)^2 + 12agh_o x}\right\}$$

dove non si è tennto conto nel radicale del segno $+$ perchè per $v = 0$ dev' essere $z = 0$.

6°. Poniamo per 2° caso $f = \alpha + \frac{\beta}{v}$ secondo il Prony e l' Eytelwein, essendo $v = \frac{v_o y_o}{y}$ sarà $f = \frac{v_o y_o}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + y\right)$, e $\frac{df}{dy} = \frac{v_o y_o}{\beta}$. Il trinomio della formola (6) si ridurrà alla espressione

$$\frac{v_o y_o}{\beta}\left\{-2y^3 + 2h_o y_o^2 - \frac{\alpha}{\beta} y^2\right\}.$$

Ora poichè secondo Eytelwein $\frac{\alpha}{\beta} = 15$, e che nelle grandi velocità è tutto al più $h_o = 0{,}50$; e di più perchè y_o è poco diverso da y, ne segue che il segno del trinomio sarà negativo, e quindi anche in questo caso $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, e per conseguenza la curva concava al fondo dell' alveo.

L' equazione finita di queste curve in questo caso sarà l' integrale della (5) dopo avere fatta la sostituzione di f, e separate le variabili, con che si avrà

$$(10) \quad \frac{2v_o y_o^3 h_o}{\beta} x = \frac{y^3 - y_o^3}{3} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{y^2 - y_o^2}{2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}(y - y_o) - \left(\frac{\alpha^3}{y_o^2\beta^3} - 2h_o y_o^2\right)\log\frac{y + \frac{\alpha}{\beta}}{y_o + \frac{\alpha}{\beta}}$$

anche in questo caso quando per x grande si ha che la differenza $y - y_o = z$ è piccola si potrà dalla (10) dedurre una relazione più semplice. Infatti, potendosi trascurare l' ultimo termine logaritmico, ne verrà che limitando l' approssimazione alla 2ª potenza di z la (10) si cangerà nella

$$(11) \qquad z^2 - \frac{\left(y_o^2 - \frac{\alpha}{\beta} y_o + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{y_o - \frac{\alpha}{2\beta}} z = \frac{2v_o y_o^3 h}{\beta\left(y_o - \frac{\alpha}{2\beta}\right)} x$$

dalla quale si avrà al solito la z.

7°. Per 3° caso facciamo col Bazin $f = \alpha + \frac{\beta}{R}$ e perchè $R = y$, $f = \alpha + \frac{\beta}{y}$, sarà $\frac{df}{dy} = -\frac{\beta}{y^2}$, e sostituendo nella (6) il trimonio $(y^3 + 2h_o y_o^2)\frac{df}{dy} - 3fy^2$ riuscirà negativo, onde $\frac{dy^2}{dx^2} < 0$, e la curva del pelo d' acqua concava anche in questo caso all' asse delle x ossia al fondo dell' alveo.

La curva del pelo dell' acqua si avrà dalla (5) ponendovi per f il suo valore, e sarà

$$2gh_o y_o^2 dx = \frac{dy}{\alpha} \times \frac{y^4 + 2h_o y}{y + \frac{\alpha}{\beta}}$$

l' integrale della quale esteso ai soliti limiti si esprimerà dalla

$$(12) \quad 2g\alpha h_o y_o^2 x = \frac{y^4 - y_o^4}{4} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{y^3 - y_o^3}{3} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{y^2 - y_o^2}{2} - \left\{ \frac{\beta^3}{\alpha^3} - 2h_o \right\} \left\{ y - y_o \right\} + \\ + \left\{ \frac{\beta^4}{\alpha^4} - 2h_o \right\} \log \frac{y + \frac{\beta}{\alpha}}{y_o + \frac{\beta}{\alpha}}$$

Quì, se come nei casi precedenti supponiamo che la differenza $y - y_o$ per x grande sia piccola, la (12) colle medesime riduzioni trascurando il termine logaritmico si traformerà nella

$$(13) \qquad z^2 + \frac{2\left\{ y^4 - \frac{\beta^4}{\alpha^4} + 2h_o\left(y + \frac{\alpha}{\beta}\right) \right\}}{2y_o^2 + \left(y_o - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2} z = \frac{4g\alpha h_o y_o^2}{2y_o^2 + \left(y_o - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2} x$$

dalla risoluzione della quale si dedurrà il valore approssimato di z.

8°. Come ultimo caso poniamo secondo il Kutter

$$f = \frac{(\sqrt{R} + b)^2}{a^2 R} \qquad \text{ossia} \qquad f = \frac{(\sqrt{y} + b)^2}{a^2 y}$$

perchè $R = y$.

Si avrà $\frac{df}{dy} = -\frac{b(\sqrt{y} + b)}{a^2 y^2}$, onde nella (6) il 2°. membro sarà negativo, e quindi la curva concava al fondo dell' alveo.

Quanto alla curva del pelo d' acqua sostituendo nella (5) il valore di f si ottiene

$$\frac{2gh_o y_o^2}{a^2}\,dx = \frac{dy(y^4 + 2h_o y_o^2 y)}{(\sqrt{y} + b)^2}\,.$$

Si faccia $\sqrt{y} = u$, onde $y = u^2$, $dy = 2udu$, e la precedente relazione si muterà nella seguente

$$\frac{2gh_o y_o^2}{a^2}\,dx = \frac{du(u^9 + 2h_o y_o^2 u^3)}{(u + b)^2}$$

ossia

$$\frac{gh_o y_o^2}{a^2}\,dx = du\left\{u^7 - 2bu^6 + 3b^2u^5 - 4b^3u^4 + 5b^4u^3 - 6b^5u^2 + 7b^6u - 8b^7 + \frac{9b^8u + 8b^9}{(a+b)^2}\right\} +$$
$$+ 2h_o y_o^2\,du\left\{u - 2b + \frac{3b^2u + 2b^3}{(u + b)^2}\right\}$$

integrando, e ponendo $= u_o$ il valore di u corrispondente ad y_o si avrà

$$\frac{gh_o y_o^2}{a^2}\,x = \frac{u^8 - u_o^8}{8} - 2b\,\frac{u^7 - u_o^7}{7} + 3b^2\,\frac{u^6 - u_o^6}{6} - 4b^3\,\frac{u^5 - u_o^5}{5} + 5b^4\,\frac{u^4 - u_o^4}{4}$$
$$- 6b^5\,\frac{u^3 - u_o^3}{3} + 7b^6\,\frac{u^2 - u_o^2}{2} - 8b^7\,(u - u_o)$$
$$+ \left\{\frac{b^9}{(u+b)} - \frac{b^9}{(u_o+b)}\right\} + 8b^9 \log\frac{u+b}{u_o+b}$$
$$+ 2h_o y_o^2\left\{\frac{u^2 - u_o^2}{2} - 2b(u - u_o) + \left\{\frac{b^3}{u+b} - \frac{b^3}{u_o+b}\right\} + 2b^3 \log\frac{u+b}{u_o+b}\right\}$$

ossia

$$(14)\quad \frac{gh_o y_o^2}{a^2}\,x = \frac{u^8 - u_o^8}{8} - 2b\,\frac{u^7 - u_o^7}{7} + 3b^2\,\frac{u^6 - u_o^6}{6} - 4b^3\,\frac{u^5 - u_o^5}{5} + 5b^4\,\frac{u^4 - u_o^4}{4}$$
$$- 6b^5\,\frac{u^3 - u_o^3}{3} + \left\{7b^6 + 2h_o y_o^2\right\}\frac{u^2 - u_o^2}{2} -$$
$$- \left\{8b^7 + 4h_o y_o^2 b\right\}(u - u_o) - \left\{\left\{b^9 + 2h_o y_o^2 b^3\right\}\right\}\frac{u - u_o}{(u+b)(u_o+b)}\left\{\right.$$
$$+ \left\{8b^9 + 2b^3\right\}\log\frac{u+b}{u_o+b}\,.$$

In questa formola abbiamo, come in altri casi la u vincolata da operazioni algebriche e trascendenti, quindi la risoluzione di tale equazione rispetto alla stessa variabile non potrà farsi che per tentativi. Quando però la differenza $y - y_o$ è piccola per x grande, lo sarà pure $u - u_o$, e ponendo questa $= z$ si avrà

$$u - u_o = z$$

e sostituita nella precedente formola, limitando gli sviluppi alle 2.^{e} potenze di z, e ponendo il logaritmo $= 0$, col porre $u = u_o$ dà l' equazione di 2° grado in z espressa dalla seguente

$$z^2 + Az = Bx$$

dove

$$A = \frac{u_o^9 - \frac{gb^8 u_o + 8b^9}{(u_o + b)^2} + 2h_o y_o^2 (u_o - 2b) - \frac{b^3 (b^6 + 2h_o y_o^2)}{(u_o + b)^2}}{\frac{1}{2} \left\{ 7u_o^6 - 12bu_o^5 + 15b^2 u_o^4 - 16b^3 u_o^3 + 15b^4 u_o^2 - 12b^5 u_o + 7b^6 + 2h_o y_o^2 \right\}}$$

$$B = \frac{gh_o y_o^2}{\frac{a^2}{2} \left\{ 7u_o^6 - 12bu_o^5 + 15b^2 u_o^4 - 16b^3 u_o^3 + 15b^4 u_o^2 - 12b^5 u_o + 7b^6 + 2h_o y_o^2 \right\}}$$

Calcolata la z e quindi $u - u_o$ si conoscerà $\sqrt{y} - \sqrt{y_o}$, onde poi $y = y_o + 2z \sqrt{y_o} + z^2$, ed anche $y - y_o = 2z \sqrt{y_o} + z^2$.

9°. Le formole sin quì determinate suppongono che la pendenza i sia quella superficiale della corrente, ma se per i invece si intende la pendenza ragguagliata del fondo in allora le formole del moto nei casi precedentemente contemplate si semplicano d' assai, ed infatti la (1) nel caso di alvei orizzontali si riduce alla semplicissima forma

$$- gFdx = vdv$$

ossia

$$- g \frac{v^2}{R} fdx = vdv ,$$

e per gli alvei rettangoli di grande larghezza

$$\frac{gf}{y}\,dx = \frac{dy}{y}$$

onde

(15) $$gfdx = dy$$

da cui

(16) $$\frac{d^2y}{dx^2} = g^2 f \frac{df}{dy}\,.$$

10°. Se f è costante ed $= \alpha$ sarà $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, e la (15) integrata darà

(17) $$y - y_o = g\alpha x$$

onde la curva del pelo d' acqua sarà una linea retta inclinata al fondo dell'alveo di un angolo la cui tangente è $= g\alpha$, e taglierà l'asse della y nel punto d'ordinata y_o come deve essere.

11°. Ponendo $f = \alpha + \frac{\beta}{v}$ secondo il Prony, ed essendo $v = \frac{v_o y_o}{y}$ sarà

$$f = \alpha + \frac{\beta y}{v_o y_o}\,, \text{ quindi } \frac{df}{dy} = \frac{\beta}{v_o y_o}\,,$$

e la (16) darà $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, ossia la curva convessa al fondo dell'alveo; mentre al N. 6°. si è trovata concava.

Introducendo ora nella (16) il valore di f si ricava

$$gdx = \frac{v_o y_o}{\beta} \frac{dy}{y + \frac{\alpha v_o y_o}{\beta}}$$

onde integrando si avranno le

(18) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\beta g x}{v_o y_o} &= \log \frac{y + \frac{\alpha v_o y_o}{\beta}}{y_o + \frac{\alpha v_o y_o}{\beta}} \\ y - y_o &= \left\{ y_o + \frac{\alpha v_o y_o}{\beta} \right\} \left\{ e^{\frac{\beta g}{v_o y_o} x} - 1 \right\} \end{aligned} \right.$$

che rappresenteranno il pelo d'acqua, e che si presentano sotto una forma molto più semplice della (10) in cui si risolve la stessa quistione.

12°. Riprendiamo ora per f la forma di Bazin, e facciamo quindi

$$f = \alpha + \frac{\beta}{R} = \alpha + \frac{\beta}{y},$$

sarà per la (16)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g^2\left(\alpha + \frac{\beta}{y}\right)\frac{1}{y^2} < 0$$

e quindi la curva concava al fondo dell'alveo come nel caso 3° al § 7°.

Rispetto alla curva del pelo d'acqua la (15) darà

$$gdx = \frac{ydy}{\alpha y + \beta}$$

di cui l'integrale esteso ai soliti limiti sarà

$$\alpha g x = (y - y_0) - \frac{\beta}{\alpha}\log\frac{\alpha y + \beta}{\alpha y_0 + \beta}. \tag{19}$$

Quando per x sufficientemente grande sia $y - y_0$ piccola si faccia $y - y_0 = z$, e sarà

$$\log\frac{\alpha y + \beta}{\alpha y_0 + \beta} = \log\left\{1 + \frac{z}{\alpha y_0 + \beta}\right\}$$

che fermando lo sviluppo alla seconda potenza di z dà

$$\log\frac{\alpha y + \beta}{\alpha y_0 + \beta} = \frac{z}{\alpha y_0 + \beta} - \frac{z^2}{2(\alpha y_0 + \beta)^2}$$

quindi la (19) diventa

$$\frac{z^2}{(\alpha y_0 + \beta)^2} + \frac{2y_0}{\beta}\,\frac{z}{\alpha y_0 + \beta} = \frac{2gx}{\beta}$$

dalla quale si deduce

$$(20) \qquad z = \frac{\alpha y_o + \beta}{\beta} \left\{ -y_o + \sqrt{y_o^2 + 2\beta g x} \right\}.$$

Le (19) e (20) paragonate colla (12) e (13) mostrano le differenze rimarchevoli che le corrispondenti supposizioni producono nei risultati analitici.

13°. Prendendo infine come ultimo caso in considerazione per f la funzione del Kutter, ossia facendo

$$f = \frac{(\sqrt{y} + b)^2}{a^2 y}$$

la (16) darà

$$\frac{d^2 y}{dx^3} = -\frac{g^2 b}{a^2} \left(\frac{\sqrt{y} + b}{y} \right)^3 < 0$$

e quindi la curva del pelo d'acqua concava verso il fondo dell'alveo risultato conforme a quello trovato nel § 8°.

Posto poi per f il suo valore nella (15) si avrà

$$g dx = \frac{a^2 y dy}{(\sqrt{y} + b)^2}.$$

Fatte in questa $y = u^2$, e quindi $dy = 2u du$ si ha

$$\frac{g dx}{a^2} = \left\{ u - 2b \right\} du - \frac{b^3 du}{(u + b)^2} + 3 \frac{b^2 du}{(u + b)}$$

la quale avrà per integrale ai soliti limiti

$$(21) \qquad \frac{gx}{2a^2} = \frac{u^2 - u_o^2}{2} - 2b(u - u_o) + \frac{b^3 (u - u_o)}{(u + b)(u_o + b)} + 3b^2 \log \frac{u + b}{u_o + b}.$$

Posta in via di ricerche approssimative $u - u_o = z$, e supposta z piccola per x grande, sarà la precedente trasformata nella

$$\frac{z^2}{(u_o + b)^2} + \frac{(u_o^2 - b u_o + b^2 - b^3)}{u_o^2 + 2b u_o - 2b^2} \times \frac{2z}{u_o + b} = \frac{g}{a^2 (u_o^2 + 2b u_o - 2b^2)} x$$

della quale posto

$$\frac{u_o^2 - bu_o + b^2 - b^3}{u_o^2 + 2bu_o - 2b^2} = m \,, \quad \frac{g}{\alpha^2(u_o^2 + 2bu_o - 2b^2)} = n$$

si avrà

$$z = \left\{ -m \pm \sqrt{m^2 + nx} \right\} (u_o + b) \; . \tag{22}$$

Il solo confronto della (21 colla (14) mostra quale complicanza apporti la considerazione della pendenza superficiale variabile nella risoluzione dei problemi idrometrici. Eppure nelle correnti fluviatili mentre a fiume stabilito si può supporre la pendenza ragguagliata del fondo costante, la superficiale invece varia coi differenti stati d' acqua, onde un tale elemento non puossi considerare costante se non in quei tronchi d' alveo in cui il moto si può considerare con grande approssimazione equabile.

È poi da osservarsi che le espressioni empiriche della resistenza degli alvei sono state dedotte da casi di moti uniformi, onde nasce il dubbio se la stessa formola valga nei casi di moto o permanente o vario. A priori il dubbio non puossi risolvere; occorrebbero esperienze a tale scopo ed in grande scala, le quali per ora mancano. In tale stato di cose non eravi altra via a percorrersi all' infuori di quella per cui siamo proceduti, e se i risultati sono riesciti sotto il rapporto analitico troppo complessi, ciò lo si deve attribuire specialmente al maggior numero di elementi variabili, che col perfezionamento dei mezzi di misura si sono introdotti nelle rappresentazioni analitiche della resistenza uniforme.

SUGLI ALCALOIDI CADAVERICI O PTOMAINE
DEL SELMI

PARTE CHIMICA — **CARLO GIANNETTI**

PROF. ORDINARIO DI CHIM., FARM., E TOSSICOL. NELLA R. UNIVERSITÀ DI SASSARI

PARTE FISIOLOGICA — **Dott. AUGUSTO CORONA**

PROF. STRAORDINARIO DI FISIOLOGIA NELLA R. UNIVERSITÀ DI SASSARI

MEMORIA

Letta all'Accademia, XIX Adunanza 1880.

PARTE CHIMICA

Da dopochè il Prof. Francesco Selmi nel 1872 annunziò alla scienza la scoperta dei *veleni cadaverici, o ptomaine (a),* se si fa eccezione ai numorosi, e pregevoli lavori con tanta cura instituiti e pubblicati dallo stesso Professore *(b)*, per tutto ciò che riguarda la *parte chimica* poco o nulla da altri venne detto o fatto, e se fatto, per lo meno i lavori non ebbero il vantaggio della pubblicità. Eppure questa interessantissima scoperta non è più una vana utopia, nè più riposa sul mero campo della ipotesi. La produzione spontanea delle ptomaine nel cadavere dell' uomo e degli animali è un fatto certo, indiscuttibile; ma per la rassomiglianza che tali corpi presentano con molti degli alcaloidi vegetali, o basi organiche, si rileva quale importanza debbano avere acquistato nel campo della Tossicologia Forense; valga a confermarlo l' atto testè pronunziato da S. E. il Ministro Guardasigilli *(c)*.

(a) Sui principî Alcaloidi naturali nei visceri onde può nascere sospetto di Alcaloidi venefici — Memoria del Prof. Francesco Selmi — Bologna, 1872.

(b) Questi lavori sono riuniti e citati in un fascicoletto pubblicato dal Prof. Selmi — Bologna — Zanichelli, 1878, col titolo: *Sulle Ptomaine od Alcaloidi cadaverici e loro importanza in Tossicologia.* L' ultimo lavoro riguardante lo stesso argomento porta il titolo: *Alcaloidi venefici e sostanza Amiloide.* — R. Accademia de' Lincei, anno CCLXXVI, 1879.

(c) Con Regio Decreto del Ministero di Grazia e Giustizia delli 11 Aprile 1880 venne instituita una Commissione per compiere alcuni studi nei reati di veneficio. Vedesi la relazione al Re che precede il Decreto.

Sembra poi che la importanza di questi nuovi e singolari corpi non si limiti a rendere grandi servigi (e qualche volta non lievi imbarazzi) al Chimico, al Fisiologo nell' interesse della Tossicologia, ma che anche altre scienze e specialmente la Patologia, abbiano a ricevere numerosi sussidi dalla loro scoperta, e si ritiene che certi fatti per lo avanti ignoti, inesplicabili, possano ricevere plausibili spiegazioni ammettendo la spontanea e necessaria formazione delle ptomaine specialmente durante i processi putrefattivi delle sostanze animali.

Di fronte dunque a tale stato di cose, e soprattutto in vista delle poche pubblicazioni che riguardano i veleni cadaverici, ho stimato non del tutto inutile, non solo di occuparmene con un certo impegno, ma anco di fare conoscere i diversi lavori da me eseguiti e ricavati da una perizia chimico-legale; che se questi lavori mancheranno di originalità, saranno per lo meno un contributo alla nascente storia delle ptomaine, e un tributo di riconoscenza all'uomo che per il primo arrichì la scienza di sì interessante scoperta.

Nel venire alla descrizione delle non poche operazioni che io ebbi occasione di fare, è mia intenzione di limitarmi alla semplice esposizione dei fatti; tralascio dunque ogni cenno storico, ogni considerazione, ogni riflessione — e ciò non tanto per amor di brevità, quanto anche perchè essendo recentissime le pubblicazioni di due illustri scienziati il Prof. Raffaele di Napoli *(d)* ed il Prof. Th. Husemann di Göttingen *(e)*, nelle medesime vi è ampiamente sviluppata la parte storica, e chiaramente dimostrata la importanza che in questi ultimi tempi le ptomaine hanno assunto nella scienza.

Prima di cominciare è mio debito registrare, che nelle numerose e pazienti ricerche ebbi a compagno l'assistente di Laboratorio Sig. Arturo Soldaini, al quale tributo le più sentite grazie per l' opera zelante e l' impegno instancabile da esso addimostrato.

Nel Marzo del 1875, eseguendo la ricerca degli alcaloidi vegetali sui visceri di un giovane morto per sospetto veneficio, ed impiegando il metodo suggerito da Dragendorff, mi occorse di verificare le reazioni generali delle basi vegetali senza però avere quelle speciali e caratteristiche di qualcuna di esse.

Gli stessi fatti ebbi a constatare in altre due perizie, cioè nel Novembre 1876 e nel Marzo 1879, nelle quali epoche l' estrazione degli alcaloidi la eseguii con il metodo di Stas ed Otto con alcune modificazioni introdottevi da Selmi.

Non ostante che già si conoscessero i lavori dell' illustre Prof. di Bologna, io confesso che in quella circostanza non trassi utile partito per le ptomaine. Riconobbi essermi imbattuto negli alcaloidi cadaverici, che seppi non confonderli con quelli vegetali, ma non instituii tutti quei metodi d' investigazione che il Selmi aveva suggerito.

(d) *Giornale internazionale delle Scienze Mediche* — Nuova Serie, Anno I, Fasc. 10 e 11, pag. 1196. — *I veleni cadaverici e la Tossicologia forense* pel Dott. Antonio Raffaele. Sintesi storica.

(e) Arch. d. Pharm. 216 Bds, 3 Heft 1880. Die Ptomaïne und ihre Bedeutung für die gerichtlich Chemie und Toxicologie, — von Prof. Th. Husemann in Göttingen.

Però non tardò l'occasione sulla quale io potessi estendere le mie ricerche, e sia che i lavori che riguardano le ptomaine li ritenessi necessarii per propria cultura scientifica, sia che il loro argomento presenti un interesse d'attualità, sia infine per rendere più completo il lavoro nell' interesse della Giustizia, lavoro che oggi il trascurarlo sarebbe commettere un grave errore: io quindi non risparmiai cure per devenire a conseguenze di qualche utilità. L'occasione inoltre fu anco favorita da un fatto materiale, cioè dalla quantità relativamente abbondante ottenuta con i diversi metodi di estrazione — Ecco intanto la circostanza a cui alludo.

La mattina del 10 Novembre 1879 venni incaricato dal Giudice Istruttore del Tribunale Correzionale di Sassari di eseguire la perizia chimico-legale dei visceri estratti dal cadavere di un giovanetto morto per sospetto veneficio. Questi visceri, immersi in *acquavite* erano rappresentati dall' intestino crasso, intestini tenui, laringe, esofago e *null' altro;* gli intestini erano affatto vuoti. Il quesito era pressochè generico; cioè riscontrare se esistevano sostanze *acre irritanti* (sic). Nella perizia medica nessun ragguaglio che aiutasse le ricerche. Rilevai in seguito che il giovanetto era morto nella notte delli 4 Agosto 1879; aveva avuto vomiti ed evacuazioni abbondanti; la disumazione era avvenuta il giorno 8 Agosto e la consegna dei visceri venne fatta per conseguenza 3 mesi e 6 giorni dopo la morte.

Stabilito il programma diedi mano alle operazioni che comprendevano la ricerca dei veleni volatili, metallici e alcaloidi.

Per la ricerca di questi ultimi impiegai il metodo suggerito dal Selmi. Le materie a questo fine destinate furono messe a digerire con alcole pure e leggermente acido per acido solforico; separato il primo alcole furono ripetuti altri due trattamenti. I liquidi alcolici riuniti evaporati a consistenza sciropposa in B. M. dettero un abbondante residuo che fu mescolato con barite spenta di recente e ossido di bario in sufficiente quantità da formare una polvere grossolana. Tale polvere fu successivamente trattata con etere, cloroformio ed alcole amilico, e in tempi diversi.

Ptomaine estratte coll' etere.

I liquidi eterei furono filtrati, e parte evaporati spontaneamente, parte nel vuoto pneumatico; il residuo lasciato era relativamente abbondante, colorato in giallognolo e di apparenza quasi densa; aveva un odore speciale che rammentava quello della *sperma umano.* Nessuna somiglianza, rispetto all' odore, vi era con quello della *nicotina* e della *coniina* operando di confronto; nemmeno rammentava le *ammine metiliche* o *etiliche.* Alle carte reattive dava una reazione *fortemente* alcalina; reazione parimenti alcalina si manifestava sulla cartolina rossa tenuta sospesa nella cassuletta di vetro dove era la sostanza. Questa alcalinità si conservò lungamente all' aria. Una bacchetta intrisa in acido cloridrico non manifestò nessun fumo.

All' aria si colorava marcatamente in bruno; nell' acqua non era completamente solubile, ma si scioglieva *totalmente* in acqua acidulata per acido solforico

dando un liquido limpidissimo ma colorato (escluse le materie grasse ed anche la barite). Il solfato (neutro) fu evaporato a B. M. poi in iscatola di vetro smerigliata contenente cloruro di calcio. Il giorno appresso in seno al liquido non intieramente evaporato, si erano formati numerosi cristalli bianchi, visibili al microscopio. Separati per decantazione i cristalli, il liquido molto denso e molto colorato fu assoggettato ad una seconda depurazione con barite.

Ripristinata la base, parte venne condotta allo stato di solfato, parte di acetato, e parte lasciai allo stato libero, e tutte le impiegai e nelle ricerche degli alcaloidi vegetali, e in quelle delle ptomaine ed in esperienze fisiologiche.

Le esperienze fisiologiche le eseguii in unione dell' amico e collega Dott. Augusto Corona Prof. di Fisiologia in questa Università; ed essendosi egli incaricato di farne una dettagliata Relazione, questa farà seguito alla presente Memoria, onde tralascio d' intrattenermi su tale argomento.

Nella ricerca *speciale* degli alcaloidi io non ebbi che risultati negativi; mentre ebbi marcatissime le reazioni generali che sono pure a comune colle ptomaine. Che invece io mi era imbattuto negli alcaloidi cadaverici ne ricevetti conferma dalle seguenti reazioni eseguite sul solfato.

a) L' *acido jodidrico jodurato* dette un precipitato abbondante color chermes, che con la spontanea evaporazione e l' osservazione microscopica resultava formato da masse voluminose cristalline prismatiche color rubino; alcuni cristalli più sottili erano riuniti a gruppi raggiati. Bellissima cristallizzazione che non ottenni mai con nessuna alcaloide vegetale conosciuto. — Col tempo si deformarono e sparirono.

b) L' *acido picrico* determinò un inalbamento, susseguito da un precipitato quasi caseoso color tabacco. Anch' esso con la evaporazione spontanea dette luogo a formazione di cristalli gialli eleganti ramificati, quali non ottenni con gli alcaloidi vegetali.

c) L' *acido tannico* dette un precipitato bianco abbondante.

d) Il *cloruro platinico neutro* dette un precipitato color cannella abbondante, il quale dopo evaporazione spontanea vidi essere constituito di molti ciuffi di cristalli gialli sottilissimi ed assai eleganti.

e) Il *cloruro d'oro*, precipitato color cannella abbondante e più tardi anco la riduzione dell' oro.

i) Il *sublimato*, precipitato bianco.

g) Precipitò in bianco col reattivo del Meyer.

h) Precipitò con l' acido fosfomolibdico.

i) Col *reattivo del Fröhde* versato sul residuo di alcune goccie evaporate, nelle condizioni ordinarie di temperatura non avvenne nessun fenomeno; ma con un lieve riscaldamento apparve una colorazione rosso-violacea distintissima.

k) Sul residuo lasciato dalla evaporazione di alcune goccie fu versato *acido cloridrico*, poi *acido solforico*, ma niente comparve a freddo; una colorazione rosso vio-

lacea manifestissima e persistente apparve con il riscaldamento; il giorno appresso là colorazione era diminuita; riscaldando, imbrunì.

l) Nella ricerca della *morfina* con la elegante *reazione del Pellagri* non ottenni che la prima fase, cioè quella descritta in *k*.

m) L'*acido solforico* solo dette gli stessi resultati che i tre precedenti.

Queste colorazioni non si manifestarono mai in tutta la massa ma ai bordi del liquido e sugli strati più sottili.

n) L'*acido nitrico* colorò in giallo il residuo della evaporazione; colorazione crescente per il riscaldamento e che passò al giallo d' oro per l' ammoniaca.

o) Il residuo della evaporazione trattato prima con *acido solforico*, poi saturando con *bicarbonato di sodio,* dette un odore manifesto di muschio, ma fugace che poi venne susseguito da un altro odore aromatico gradevole non ben definito, ma anche esso fugace.

p) Coll' *acido azotico* a freddo non apparve nessun' odore subito; ma il giorno appresso se ne manifestò uno debolissimo molto grato e persistente.

q) Coll' *acido jodico* e l' *acido solforico*, poi l' aggiunta del bicarbonato di sodio, non ottenni *mai* la colorazione rossa, sebbene ripetessi molte volte l' esperienza e fossero diverse le vie tentate.

I resultati sopraindicati non lasciavano il menomo dubbio; la sostanza estratta con l' etere era constituita dalle ptomaine. Infatti molto concordi furono le reazioni chimiche con quelle indicate dal Selmi, fatta eccezione per quella che si ottiene con l' acido jodico, solforico e bicarbonato di sodio, che il Selmi non sempre constantemente ottenne; discordi furono alcune altre di meno valore che per essere riescite appunto negative ho tralasciato d' indicare.

Le differenze che potrebbero meritare di essere messe in rilievo sono quelle rispetto all' odore. Io ebbi l' odore dello sperma umano nella base libera; il Selmi avrebbe ottenuto in molti casi quello cadaverico. Coll' acido solforico ed il bicarbonato sodico, pel Selmi sarebbesi sviluppato l' odore del bianco spino, o del fior d' arancio; io invece ne avrei ottenuto uno aromatico, ma non ben definito. Costituendo l' odore un carattere tutto relativo, è possibile benissimo che ancor io, se non i medesimi resultati, ne abbia però ottenuti molto vicini a quelli del Selmi e che l' apprezzazione sia stata alquanto diversa. Ma il fatto capitale che è d'uopo tenere in considerazione si è, che questa proprietà la ottenni sempre nelle circostanze che l' aveva ottenuta il Selmi, e ritengo che ciò non sia privo di un certo interesse.

Debbo ora registrare alcuni fatti osservati durante le mie operazioni, che nel Selmi non trovo indicati; è possibile che ad esso non sieno capitati; o capitati abbia creduto non interessante farne menzione.

Io ho riscontrato nelle ptomaine libere, ma molto più nelle salificate, la facilità di assorbire l' umidità e cadere in deliquescenza. In una prova fatta con il solfato della ptomaina eterea colla camera lucida per ricavarne la figura, non ebbi tempo

di terminare. L' acetato era anch' esso deliquescentissimo, e questa proprietà la manifestarono anco le basi libere e i sali delle ptomaine estratte con il cloroformio e con l' alcole amilico.

Un altro fatto che non mi sembra non trascurabile, è quello che presentano le basi libere, di assorbire l' anidride carbonica se abbandonate a se stesse e sopratutto col rinnovamento dell' aria, al tempo stesso che si colorano come si colorano i sali. Io mi accorsi di questo fatto vedendo una vera e propria effervescenza allorchè ne procurava la neutralizzazione con un acido, e constatai colla esperienza di trattarsi di vera anidride carbonica.

Prima di abbandonare l' argomento delle ptomaine eteree, due parole sulla *quantità* che più volte ho accennato essere stata *abbondante.* Io veramente non potrei con certezza precisare il peso di tutte le ptomaine ottenute (ed in questo caso parlo anco di quelle ricavate col cloroformio e coll' alcole amilico) stantechè non prevedendo l' utilità che questo dato mi avrebbe arrecato in seguito, lo trascurai in gran parte. Tuttavia dal peso verificato nel solfato secchissimo della ptomaina eterea (G.[i] 0,105), dal peso dell' acetato della ptomaina cloroformica (G.[i] 0,226), di fronte alle quantità impiegate nelle numerosissime operazioni chimiche e fisiologiche eseguite e ripetutamente eseguite, io non credo di cadere in una esagerazione col ritenere essere asceso il peso totale a circa G.[i] 3 ; cifra che mi sembra meriti la qualifica di *abbondante* in vista dei pochi visceri avuti in consegna, visceri di persona non adulta e che per lo scopo col quale vennero nelle mie mani, non poterono intieramente essere destinati alla estrazione delle ptomaine, ma parte dovettero essere impiegati in altre ricerche, parte conservati per ulteriori operazioni, tale essendo l' ingiunzione del Giudice Istruttore.

Ed il fatto dell' abbondanza ha richiamato alla mia mente una circostanza, che se vera, potrebbe essere interessante ed utile, ma che però espongo con molta riserva. Io rammento che nel 1875, quando appunto facevo le ricerche degli alcaloidi in un sospetto veneficio, ebbi un estratto molto abbondante coi diversi solventi impiegati. Anco allora si trattava di un giovanetto; è egli possibile che nei giovani la formazione delle ptomaine sia maggiore ?

Ptomaine estratte col Cloroformio.

La polvere grossolana esaurita coll' etere venne ripetutamente trattata con cloroformio, che per evaporazione spontanea lasciò un residuo piuttosto abbondante, leggermente colorato in giallo, con odore un po' diverso da quello presentato dalla ptomaina eterea libera, ma molto penetrante e disgustoso che rammentava alquanto quello della ruta *(ruta graveolens).*

Aveva una reazione manifestamente alcalina e le cartoline rosse sospese nella cassolina dove si conservava il residuo dettero segni manifesti che vi si conteneva una parte volatile parimente alcalina.

Coll' acqua non si scioglieva completamente; si scioglieva benissimo in acqua acidulata.

Divisa la massa in quattro porzioni, tre vennero salificate con acido solforico, cloridrico e acetico, ed ebbi a notare che l' odore dei sali formatisi era diverso da quello della base libera. Il primo odore che tramandarono potea dirsi appartenere a quello delle mandorle amare, ma dipoi ne subentrò un altro speciale che col tempo sparì.

Le soluzioni neutre dei sali vennero evaporate nel vuoto della macchina pneumatica e ciascun sale dette forme cristalline differenti; fra queste elegantissime riescirono quelle dell' acetato che raffiguravano dei fusi appianati solcati in tutta la loro lunghezza da una specie di sutûra e lievemente punteggiati.

Base e sali destinai alla ricerca degli alcaloidi vegetali, alla ricerca delle ptomaine, alle esperienze fisiologiche.

La ricerca speciale degli alcaloidi vegetali fu affatto negativa, sebbene le reazioni generali potessero far supporre l' esistenza di qualcuno di essi.

Ebbi invece a convincermi che si trattava anco in questo caso di ptomaine, e a loro favore ebbi presso a poco le stesse reazioni ottenute colle ptomaine estratte coll' etere; quindi i precipitati con l' *acido jodidrico jodurato*, l' *acido picrico*, *tannino*, *sublimato*, *cloruro d' oro*, di *platino;* ebbi inoltre precipitati col *bicromato potassico*, *col doppio cianuro d'argento* e di *potassio*, reazioni che non ottenni colle ptomaine eteree. Non mancò la reazione rosso violacea coll' *acido cloridrico* e *solforico* a caldo; la colorazione giallo d' oro coll' *acido azotico* e la *potassa*, e finalmente apparve un odore speciale aromatico con l' acido solforico ed il bicarbonato di sodio. Anco con queste fu negativa la reazione dell' *acido jodico*, *solforico* e *bicarbonato di sodio;* non riduzione dell' *acido jodico*, nessuna colorazione con *acido solforico* e *acqua di bromo*.

Oltre alle forme cristalline già accennate ebbi pure cristalli con l' *acido jodidrico jodurato* e con l' *acido picrico*, nessuna cristallizzazione col *cloruro platinico,* e tali forme cristalline erano molto diverse da quelle ottenute colle ptomaine eteree nelle stesse circostanze.

Fisiologicamente agirono con energia, sebbene vi si riscontrasse una minore intensità di fronte alle ptomaine eteree; tuttavia i fenomeni furono affatto identici come a suo tempo verrà dimostrato.

Facendo ora un parallelo fra le ptomaine eteree e le cloroformiche ben si vede, che non vi sono nelle reazioni chimiche distinzioni marcate quasi da ritenere essere constituite di una sola sostanza. Le differenze principali sarebbero nell' odore, nelle forme cristalline dei sali, nelle forme cristalline date dall' acido jodidrico jodurato, e dall' acido picrico, finalmente nello aver precipitato con il bicromato potassico e il doppio *cianuro d' argento* e di *potassio*.

Ptomaine estratte con l' Alcole Amilico.

La polvere grossolana che aveva ricevuto prima un trattamento etereo poi quello del cloroformio, venne ripresa con *alcole amilico purissimo* (della casa Tromms-

dorff di Erfurt) e che non lasciava residuo per la evaporazione. Il primo trattamento dell'alcole che soggiornò con la polvere per 48 ore, dette dopo filtrazione un liquido limpido, colorato di un bel giallo verdognolo quasi fluorescente e che rassomigliava una soluzione dilutissima di fluoresceina ammoniacale. La limpidezza non si manteneva che per poco, inquantochè dopo non lungo tempo assumeva un aspetto lattescente che spariva colla filtrazione e si riformava col riposo. La sostanza che intorbidava il liquido amilico aveva un aspetto gelatinoso dopo separazione con filtro ed era in una certa abbondanza.

Stante la facilità di intorbidarsi credetti opportuno eseguire la filtrazione in una atmosfera di *anidride carbonica*, tanto più che ad essa, stando alle prescrizioni del Selmi, doveva ricorrere per la estrazione delle ptomaine amiliche.

La filtrazione (4°) in questa atmosfera artificiale dette un liquido limpidissimo, anco con le porzioni di alcole che ripetutamente erano state affuse sulla polvere grossolana fino ad esaurimento e dopo il primo trattamento. Ottenuta la limpidità costante, addizionai al liquido amilico dell'acqua stillata in quantità presso a poco eguale a quella dell'alcole e vi feci gorgogliare una prolungata corrente di anidride carbonica lavata, e molto rapidamente perchè i due liquidi per il movimento venissero fra di loro in maggior contatto; però l'anidride carbonica non determinò nessun precipitato.

Con imbuto a robinetto separai l'acqua dall'alcole e questo venne dibattuto fortemente con acqua acidulata per acido solforico purissimo e con il solito imbuto a robinetto separai di nuovo l'alcole del liquido acido. Il trattamento con l'acqua acidulata venne ripetuto più volte, e i liquidi resultanti furono riuniti in un solo.

Da tali operazioni io aveva ricavato quattro sostanze diverse che si rendeva necessario esaminare separatamente; queste sostanze erano:

1° Liquido acquoso separato dall'alcole amilico dopo la corrente dell'anidride carbonica;

2° Liquido acido col quale era stato sbattuto l'alcole amilico;

3° Alcole amilico che aveva ricevuto i precedenti trattamenti;

4° Precipitato gelatinoso separato dall'alcole amilico.

1° *Operazioni eseguite sul liquido acquoso separato dall'alcole amilico dopo la corrente di anidride carbonica.*

Questo liquido era limpidissimo, incoloro; l'odore rammentava quello dell'alcole amilico, ma partecipava anco di un altro gradevole. Presentava la singolarità d'intorbidarsi col riscaldamento e r'tornare limpido per raffreddamento. Sulle cartoline la reazione era *neutra*, ma passava alcalina dopo riscaldamento. Fu diviso in due porzioni, delle quali una fu evaporata al B. M. e poi nel vuoto pneumatico. L'altra fu acidulata leggermente con acido acetico ed evaporata nello stesso modo.

La prima porzione di liquido dette un residuo leggermente colorato in giallo che all' aria passava al rossignolo, reazione marcatamente alcalina, ma non sembrava contenere nessuna parte volatile come nei trattamenti eterei e cloroformici.

L' altra porzione dette anch' essa un residuo colorato in giallo con in mezzo dei cristalli aventi la forma di una foglia palmitata e i bordi frastagliati. La reazione era leggermente acida e stando all' aria anco essa si colorava.

Ambedue le soluzioni dettero reazioni con i reattivi generali degli alcaloidi e segnatamente precipitarono con *acido jodidrico jodurato*, *acido picrico*, *acido tannico*, *cloruro d' oro* (senza riduzione), *cloruro platinico, sublimato corrosivo, reattivo del Meyer*. Il precipitato con acido jodidrico fu subito esaminato al microscopio, ma non osservai forme cristalline quali le ha osservate Selmi nelle ptomaine amiliche. Col tempo e la spontanea evaporazione non notai forme cristalline speciali; invece molti aghi sottilissimi e disposti a stella apparvero nel saggio fatto coll' acido picrico.

Ottenni inoltre anco le seguenti reazioni: Colorazione rosso violacea con *acido cloridrico* e *solforico* dopo leggero riscaldamento — Precipitato con *bicromato potassico* — Riduzione del *bicromato potassico* in presenza di *acido solforico* — Colorazione gialla con *acido azotico* e giallo d' oro con *potassa.*

Ebbi per la *prima volta* la riduzione dell' *acido jodico* in presenza di *acido solforico;* riduzione resa manifesta per il colore ametista conferito al cloroformio.

Ebbi pure per la *prima volta*, ma in modo molto fugace, la colorazione rossa coll' *acido solforico* ed il *bicarbonato di sodio.*

Ottenni un precipitato verdognolo con l' acido fosfomolibdico che passò all'azzurro cielo per il riscaldamento a B. M.

Negativa fu la reazione con il reattivo del Fröhde.

Rispetto all' odore non ebbi questa volta nè uno di quei che suol svilupparsi coll' acido solforico ed il bicarbonato di sodio, oppure coll' acido azotico solo; invece se ne appalesò uno, non però gradevole, allorquando riscaldai la sostanza con una miscela di *acido solforico* e *fosforico* fra $+ 65^\circ$ e $+ 70^\circ$.

L' azione fisiologica fu pure sperimentata con la ptomaina libera e i fenomeni di veneficio furono analoghi agli altri, come si rileva dalla relazione del Prof. Corona.

2° *Operazioni eseguite sul liquido acido col quale era stato sbattuto l'alcole amilico.*

Più volte l' alcole amilico fu sbattuto con acqua leggermente acidulata con acido solforico ed i liquidi acidi separati, riuniti e filtrati, furono posti ad evaporare a B. M. Quando furono a consistenza sciropposa, presentando una reazione marcatamente acida, credetti necessario neutralizzare con potassa pura e seguitare l' evaporazione fino a secchezza. Il residuo solido fu ripreso con alcole assoluto per separare il solfato potassico formatosi ed i liquidi alcolici più volte impiegati, dopo

evaporazione, lasciarono un piccolissimo residuo colorato in giallognolo molto alcalino, la di cui alcalinità ignoro se doveasi attribuire alla sostanza, oppure a piccolissima quantità di potassa libera, forse inevitabilmente aggiunta in eccesso nell' atto che eseguii la neutralizzazione. Questo residuo non aveva odore speciale, era solubile nell' acqua e la soluzione acetica dette le seguenti reazioni:

Precipitò in bruno con l' *acido jodidrico jodurato* — Precipitò in giallo con l' *acido picrico* in cui dopo l' evaporazione spontanea e l' osservazione microscopica si videro diverse forme cristalline, fra le quali notavansi quelle caratteristiche del picrato potassico sebbene in piccolissimo numero — Precipitò col *tannino*, coi *cloruri platinico*, d' *oro* e *mercurio* — Coll' *acido fosfomolibdico* precipitò dopo un certo tempo ed in bleu — Coll' *acido azotico* e la *potassa* dette la colorazione gialla.

L'*acido cloridrico* e *solforico* nemmeno a caldo dettero la colorazione rosso violacea.

La piccola quantità di sostanza disponibile non permise altre operazioni.

I resultati starebbero ad indicare qualche ptomaina; però non mi sembrarono affatto decisivi, anzi mi parvero mancanti di alcuni caratteri importanti ottenuti colle altre ptomaine già descritte; inoltre la complicanza della potassa presente può avere avuto influenza sulle reazioni; per cui non potrei coscienziosamente affermare trattarsi di una vera ptomaina. Non pertanto io ho voluto registrare tutte le operazioni eseguite ed i pochi resultati ottenuti, stante che, secondo i suggesimenti del Selmi, questa sarebbe stata la via per ottenere le ptomaine amiliche, via che io non ho voluto trascurare di tenere.

Anco le reazioni ottenute sul residuo lasciato dall' alcole amilico (3°) dopo eseguitane la evaporazione, e nel residuo lasciato dall' etere, col quale più volte fu trattato il precipitato gelatinoso (4°) ridotto a secchezza non furono feconde di conseguenze utili. Tali residui furono pressochè insignificanti; l' uno proveniente dall' alcole amilico, era molto colorato, con odore estrattivo e una nuova depurazione minacciava la perdita di tutta la sostanza. Dalle poche reazioni eseguite constatai che precipitava con *acido jodidrico*, con *tannino*, con *cloruro platinico;* non precipitò col *sublimato*, col *cloruro d' oro*, col *bicromato potassico;* nessuna altra nozione chimica potei eseguire attesa la quantità; tanto meno potei sperimentare l' azione fisiologica.

L' altro residuo, cioè quello lasciato dall' etere con cui era stato messo in fusione il precipitato gelatinoso disseccato, era del pari in quantità lievissima, colorato in giallo, con odore animale e reazione leggermente acida. Presentò reazioni più ravvicinanti alle ptomaine, ma attesa la scarsità della sostanza e il numero limitato delle reazioni non detti troppo valore ai loro resultati.

Dalle operazioni sopra descritte si rileva dunque, che anco l' alcole amilico toglie ai visceri certi corpi aventi i caratteri delle ptomaine e che la maggior quantità, nel caso mio, sarebbe stata allorquando l' alcole, dopo aver soggiornato nella pol-

vere grossolana baritica ed esaurita con etere e cloroformio, veniva di poi mescoscolata ad acqua e trattata la miscela con anidride carbonica. Selmi invece avrebbe ricavata la ptomaina dall' acqua acidulata con la quale aveva sbattuto l' alcole amilico, metodo che io pure misi in azione e riescì come si è veduto, imperfettamente, non già per essere difettoso il metodo, che anzi è razionalissimo, ma forse perchè le condizioni in cui mi trovava io erano un poco diverse.

Le ptomaine amiliche di fronte alle eteree e alle cloroformiche offrirono qualche diversivo dal lato delle proprietà chimiche; mentre furono a comune molte reazioni, ottenni con queste la riduzione dell' acido jodico che mai aveva ottenuta con le altre, ottenni la colorazione rossa coll' acido jodico ed il bicarbonato di sodio che sebbene si dileguasse con prontezza tuttavia concorderebbe con quanto lo stesso Selmi ebbe a riscontrare in alcune da esso studiate. Anco la produzione della sostanza odorante questa volta si formò in circostanze molto diverse che colle precedenti ptomaine. Per il lato fisiologico non pertanto agirono analogamente alle ptomaine eteree e cloformiche, e sotto questo punto di vista si rassomigliano tutte.

Ptomaine estratte da visceri antichi.

Terminati i lavori delle ptomaine sinora descritte, rammentandomi che nel laboratorio esisteva per caso un vaso contenente dei visceri (fegato, reni, intestini ecc.) avanzatimi da una perizia chimico-legale eseguita nel Novembre 1876, mi nacque il desiderio di vedere se durante questo tempo avesse avuto luogo la produzione spontanea degli alcaloidi cadaverici.

Il fatto mi sembrò interessante per molte considerazioni; fra le altre degna di rilievo quella che riguarda il tempo. Secondo alcuni le proprietà delle ptomaine diminuirebbero o cambierebbero o anche sparirebbero coll' invecchiare.

Dalle ricerche del Moriggia risulterebbe che gli alcaloidi cadaverici esisterebbero nel cadavere anco circa due mesi dopo il seppellimento. Schweninger ed Hemmer affermano che dopo mesi 7 1[2, la materia putrefatta non riescì più nociva sugli animali. Le loro esperienze, almeno suppongo, non sarebbero uscite dal campo della fisiologia.

Io veramente, coi visceri che sottoposi alle esperienze non mi trovavo nelle condizioni quali forse si sarebbero richieste; nondimeno erano visceri molto antichi nei quali se si erano precedentemente formate delle ptomaine, queste erano state affatto tolte, stantechè questi visceri destinati nel 1876 alla ricerca degli alcaloidi vegetali erano stati lungamente lavati con alcole acidulato, e fa supporre che ogni base (qualunque fosse stata la sua natura) doveva essere necessariamente asportata col mezzo dei prolungati lavaggi. Posso quindi ritenere certo, che nel Novembre 1876, quando i visceri furono introdotti nel vaso, non potevano contenere alcaloidi cadaverici. In questo vaso è pur vero che fu introdotto dell' alcole, ma, sia per non chiudere esattamente, o per essersi spontaneamente evaporato, una

buona parte dei visceri era rimasta allo scoperto e la putrefazione si era da molto tempo manifestata. Ora il rinvenimento della ptomaine in questi visceri dopo oltre tre anni non mi sembrò un fatto del tutto privo d'interesse; forse sotto tali condizioni nessuno fin qui ebbe occasione di sperimentare ed io credetti un'opera non affatto inutile tentare delle ricerche, e sono lieto che le mie operazioni mi conducessero a felici risultati; ecco dunque le operazioni da me instituite.

Senza stare a farne una dettagliata descrizione dirò, che le operazioni preliminari e preparatorie furono analoghe a quelle da me eseguite per l'estrazione delle ptomaine finora descritte, e che dal trattamento etereo ricavai un residuo non abbondantissimo, ma in sufficiente quantità da permettermi anche qualche saggio fisiologico.

Questo residuo era pressochè incoloro, ma stando all'aria andava mano mano a colorarsi. Presentava un odore speciale disgustoso (cadaverico?); reazione fortemente alcalina; spandeva qualche vapore parimente alcalino; si scioglieva bene nell'acqua sola oppure acidulata senza intorbidarsi. Riscaldato leggermente in tubetto da saggio, emetteva vapori molto alcalini, ma che non davano fumi bianchi esponendovi una bacchetta intrisa in acido cloridrico — intanto l'odore si fece più pronunziato e disgustoso ed il residuo terminò col carbonizzarsi.

Una porzione venne salificata con acido solforico; l'altra con acido acetico; la evaporazione fu fatta entro vaso di vetro smerigliato contenente cloruro di calcio.

L'acetato col tempo fornì dei cristalli piccolissimi visibili al microscopio; dette inoltre le seguenti reazioni:

Precipitò col *solfato di rame* senza dare colorazione — Precipitò con *acido jodidrico jodurato* — con *acido picrico* — con *sublimato* — con *cloruro d'oro* senza riduzione — con *cloruro platinico* — con *tannino*.

Col *bicromato potassico* non dette precipitato, ma una colorazione verde marcatissima per aggiunta di *acido solforico*.

Ridusse l'*acido jodico* in presenza di *acido solforico* diluito e la riduzione fu caratterizzata dal coloramento ametista che assunse il *cloroformio* aggiunto.

Con il *cloruro ferrico neutro* non si manifestò nessuna colorazione, ma era avvenuta una riduzione, stantechè una goccia di *prussiato rosso di potassio* determinò un precipitato bleu.

L'*acido nitrico* posto sul residuo dell'evaporazione di alcune goccie della soluzione acetica si colorò fortemente in giallo anco a temperatura ordinaria, e la colorazione aumentò con il riscaldamento. Però, contrariamente a quanto finora erami avvenuto, l'aggiunta della *potassa* non determinò il color giallo d'oro, ma indebolì quello già esistente.

L'*acido solforico* e *cloridrico* a caldo dettero una colorazione rosso violacea.

L'*acido solforico* solo una colorazione rossastra che non cambiò per l'aggiunta d'*acqua bromata*.

L'*acido jodico*, poi il *solforico*, poi il *bicarbonato di sodio* non dettero nessuna colorazione rossa.

L'*acido solforico* ed il *bicarbonato sodico* svilupparono un leggerissimo odore aromatico non definibile.

Dette inoltre precipitati coll' *acido fosfomolibdico* e col doppio *cianuro d'argento* e di *potassio.*

Eseguii infine il saggio seguente: sul residuo lasciato dalla evaporazione di alcune goccie della soluzione in esame versai due o tre goccie di *acido solforico* ed agitai fino a sciogliere il residuo; di poi versai qualche goccia di *cloruro d'oro* il quale determinò lentamente un tenuissimo precipitato giallo cristallino; il giorno appresso vi era molta riduzione dell' oro metallico.

Tali furono i risultati delle ricerche chimiche che mi sembrano non abbiano bisogno di ulteriori spiegazioni per dimostrare che caratterizzano senza eccezione le ptomaine del Selmi. Una conferma poi che trattavasi di vere ptomaine la ricevetti dall' esperienze fisiologiche, le quali molto chiaramente dimostrarono che la loro azione sulle rane riuscì secondo il solito assai venefica, che i fenomeni di veneficio furono accompagnati dagli stessi sintomi palesatisi colle altre ptomaine, e se la scarsità della sostanza non permise di estendere queste operazioni su animali di più grossa taglia non è men vero che i resultati ottenuti non fossero meno netti e meno decisivi.

Dopo il trattamento etereo che fornì il residuo sopradescritto, volli su i visceri antichi fare un trattamento cloroformico come aveva fatto coi visceri più recenti e con ciò ottenni un piccolissimo residuo a reazione fortemente alcalina con odore penetrante aromatico che non era quella della coniina, nè della nicotina, solubile nell' acqua e che neutralizzato con acido acetico mi permise le seguenti reazioni:

Ebbi precipitati coll' acido *jodidrico jodurato* — col *tannino* — col *cloruro d'oro* — coll' *acido picrico* — con *acido fosfomolibdico;* incerte rimasero le reazioni col *cloruro platinico* ed il *sublimato corrosivo.* Operò riduzioni col *cloruro di ferro* e col *bicromato potassico.* Coll' *acido azotico* e *potassa* dette colorazione gialla — con *acido cloridrico* e *solforico* una colorazione rosso-violacea a caldo — non ridusse l' *acido jodico* — nessuna colorazione con *acido solforico*, *jodico* e *bicarbonato sodico* — nessun odore con *acido solforico.*

Non ostante alcuni risultati negativi, tuttavia gli affermativi dettero indizî sufficienti che anco il cloroformio aveva estratta una sostanza con caratteri specifici delle ptomaine.

Rimaneva a farsi il trattamento amilico, ma da qualche saggio fatto, vedendo che questo alcole non trovava sostanze da sciogliere, rimaneva vana ogni altra operazione.

Durante tutte le operazioni fin qui descritte fui pregato dal Professore di Zoologia ed Anatomia comparata se permettevagli che l' inserviente del Laboratorio ripristinasse colla distillazione l' alcole dai liquidi alcolici che avevano servito a con-

servare animali e pezzi di animali del suo gabinetto e che col tempo si erano colorati; l' alcole poteva essere un 70 o 80 litri. Questa circostanza mi dette motivo di fare qualche ricerca sul residuo lasciato dall' alcole per la distillazione. Presa una piccola porzione di liquido molto concentrato rimasto nell' alambicco, l' evaporai a bagno maria fino a consistenza estrattiva, e, prima di fare la depurazione e qualunque saggio chimico, mi prese vaghezza vedere quale fosse la sua azione fisiologica sulle rane. Non debbo trascurare di dire che tale estratto tramandava l' odore marcatissimo della *metil* e *propilammina*. Io rimasi molto sorpreso nel vedere che poca quantità sciolta nell' acqua ed introdotta sotto la cute di una rana, questa moriva dopo pochi minuti; allora, avendo il residuo molto colorato e mescolato anco a sali inorganici, feci la depurazione con barite idratata e anidra per formare una polvere grossolana. Ripresi più volte con etere la polvere grossolana così preparata e i liquidi eterei riuniti, filtrati ed evaporati spontaneamente, dettero un piccolo residuo leggermente colorato in giallo con odore molto disgustoso, marcante reazione alcalina e la cui soluzione acquosa introdotta sotto la cute di una rana non determinò nessun fenomeno di veneficio contrariamente a quanto aveva fatto la sostanza non depurata; quindi ritenni che la morte della prima rana fosse operata da sostanza che l' etere non aveva estratta. Ciò non ostante con questo residuo depurato feci delle ricerche chimiche, e l' insieme dei resultati mi avrebbero condotto ad ammettere che quivi pure esista qualche ptomaina.

Essendo mia intenzione di proseguire le ricerche su questa stessa sostanza estratta dall' alcole, perchè possessore di una discreta quantità di questo alcole che può facilmente fornirmela, così mi limito a queste poche parole per ciò che riguarda la descrizione delle ptomaine ricavate con questo sistema, e mi riserbo di far conoscere i resultati che sarò per conseguire quando questi meritino qualche considerazione nell' interesse della scienza.

PARTE FISIOLOGICA

Il mio Egregio Collega Prof. Giannetti Carlo avendo potuto ottenere nel suo laboratorio di chimica in seguito, a perizie Medico-legali ed a scopo scientifico, degli *alcaloidi cadaverici*, mi forniva gentilmente l' occasione di esaminare sugli animali il modo d' azione di questi veleni, come già ebbero a sperimentare il Vella, il Ciaccio, il Lussana, l' Albertoni, il Moriggia, il Battistini, ed ultimamente il Dott. Pellacani coll' iniezione di suchi parenchimatosi freschi negli animali.

Assieme pertanto al prefato Collega Prof. Giannetti abbiamo cimentato i detti veleni cadaverici sui Conigli e sulle Rane, nei mesi di Febbraio e Maızo, servendoci quando degli estratti eterei, cloroformici ed amilici, quando dei solfati, cloridrati ed acetati ptomainici.

Gli estratti od i sali in soluzione furono sempre iniettati sotto la cute degli animali in esperimento col sistema ipodermico servendoci della siringa del Pravaz.

Eccone le risultanze sperimentali.

Ptomaine estratte coll' etere — Ptomaina libera.

Esperienza 1ª. Rana esculenta di media taglia, abbastanza vivace. Iniezione sotto la cute del dorso, di una goccia di estratto etereo (ptomaina libera). Dopo cinque minuti nessun fenomeno. Fu iniettata sempre sotto la cute del dorso un' altra goccia di estratto, e dopo cinque minuti di aspettazione nessun fenomeno rimarchevole. Messo allo scoperto il cuore non mostrò anormalità alcuna nè nel ventricolo nè nelle orecchiette.

Esaminata la frequenza dei battiti cardiaci comparativamente con una rana sana, dopo 20 minuti si ha, per la rana sana 40 sistole cardiache, per quella in esperimento 70. La membrana nictidans della rana in esperimento si trovò subito abbassata fin prima della scoperta del cuore, che seguì dieci minuti dopo dalle seguite iniezioni. Si osserva dopo mezz' ora una certa flacidezza nei muscoli ed una torpidità nei movimenti. La ranocchia vorrebbe saltare ma ne è impossibilitata per una sopraggiunta paresi agli arti posteriori. Fu pure riscontrato fin dal principio, e che si mantenne costante, un arcuamento della colonna vertebrale e specialmente al dorso. Messa la rana in esperimento con uno degli arti posteriori allungato e l' altro flesso, e, poscia con un ago, punto l' arto allungato risponde costantemente con una scossa tetanica dell' arto opposto. Lo stesso fenomeno sucede con una rana sana ma con minore intensità.

Dopo $^3/_4$ d' ora circa si manifestano contrazioni tonico-cloniche al treno posteriore e qualche momento rigidità permanente tetanica. La pupilla fu riscontrata dilatatissima, dilatazione che si mantenne tale anche dopo 24 ore; dopo il qual tempo la rana in esperienza, e della quale si era messo allo scoperto il cuore, non si manifestava in vita che per i battiti cardiaci ridotti però all' esiguo numero di 20 al minuto, e piccole contrazioni agli arti anteriori punzecchiati, mentre il treno posteriore è flacido, rilasciato ed insensibile agli eccitamenti i più energici, meccanici e chimici.

Esperienza 2ª. Rana Sarda (Discoglossus sardus) di piccola taglia. Iniezione sotto la cute del dorso, di tre goccie di soluzione molto satura di estratto etereo.

L' animale, da prima vispo ed agile, dopo quattro minuti circa si mostra arcuato e torpido nei suoi movimenti. La pupilla da prima dilatata si è fatta dopo cinque minuti più ristretta. La flacidezza delle membra è all' estremo. Messo allo scoperto il cuore, i battiti cardiaci sono rallentati, e nel ventricolo entra pochissimo sangue ad ogni diastole. Gli arti posteriori punzecchiati ed eccitati in qualsiasi modo, sono insensibili se anche si taglino le estremità delle dita. Morte apparente con pupilla ristretta dopo 8 minuti. Dopo un quarto d' ora la rana si può considerare come morta per la flacidezza di tutto il corpo; soltanto il cuore batte ancora, ma il ventricolo si contrae senza che nel tempo diastolico vi entri sangue, mentre che ne entra una piccolissima quantità nelle orecchiette. Preparata la rana in esperimento alla Galvani, e cimentata con una corrente voltaica di quattro semplici copie, si ha contrazione del treno posteriore all' eccitamento dei cordoni nervosi, mentre risponde male l' applicazione della stessa corrente sui muscoli.

Esperienza 3ª. Coniglio di media taglia, iniezione fatta sotto la cute colla siringa del Pravaz di un grammo circa di soluzione satura di estratto etereo. Dopo venticinque minuti (prima nessun fenomeno) si osserva la pupilla irregolare a forma obliqua, tremiti convulsivi, frequenza dei battiti cardiaci, temperatura normale, giacchè presa nel retto segnava 37°4 centigradi. Iniezione straordinaria dei vasi capillari dell' orecchio con congestione fortissima dei vasi grossi dell' orecchio medesimo, iniezione affatto simile a quella che si osserva per paralisi vaso-motoria dietro il taglio o strappamento del filetto simpatico cervicale nello stesso animale. La temperatura nell' orecchio segna + 36° 7 mentre in un coniglio sano si aveva + 34°

L' animale si colloca come sonnecchiante in atto di riposo colla testa di preferenza appoggiata al lato destro, ma se si riconduce la testa al lato sinistro si mantiene in questa posizione.

La pupilla si mantiene per qualche po' di tempo di forma irregolare, poscia si fà ristretta.

Dopo 40 minuti dalla fatta iniezione, al riposo sonnecchioso succedono accessi convulsivi marcatissimi con contrazione spasmodica dei muscoli della faccia e degli arti; la respirazione si fà lentissima (28 respirazioni al minuto).

Morte dopo 45 minuti dall' iniezione.

Praticata l' autopsia immediata ed aperto il torace si osservano contrazioni ritmiche irregolari del ventricolo sinistro più specialmente. Immobili le orecchiette. Cuore destro pieno di sangue non coagulato, cuore sinistro affatto vuoto.

Aperta la cavità craniana, si trova: dura madre normale; pia meninge finamente iniettata; sostanza cerebrale, tanto grigia che bianca del cervello, normale; normali pure il cervelletto ed il bulbo spinale.

Ptomaine estratte col cloroformio — Ptomaina libera.

Esperienza 1ª. Rana Sarda piccola. Iniezione di piccolissima quantità di estratto cloroformico sotto la cute del dorso. Immediatamente l' animale eseguisce dei salti, susseguiti improvisamente da impotenza muscolare, presentandosi una flacidezza estrema dei muscoli dopo due minuti circa dalla fatta iniezione.

Aperto il torace, si osserva un rallentamento sensibilissimo dei battiti cardiaci. Preparata la rana, così avvelenata, alla Galvani e cimentata colla solita corrente voltaica, si ha massima eccitabilità all' eccitamento dei nervi, perdita della contrattilità muscolare all' applicazione della stessa corrente sui muscoli.

Esperienza 2ª. Coniglio di media taglia. Iniezione ipodermica colla siringa del Pravaz di una soluzione idroalcoolica di ptomaina cloroformica libera. Immediatamente si ebbe frequenza del respiro che salì a 134 respirazioni per minuto, nel qual tempo l' animale sano ne presentava 100. Vi fu pure aumento di pulsazioni cardiache, e si ebbero iniettati i vasi dell' orecchio, che però ritornarono pallidi cessando pure dopo 48 minuti gli altri fenomeni di disturbate funzioni del respiro e del circolo.

Dopo un' ora, nello stesso coniglio già perfettamente ristabilito, fu introdotta altra soluzione della ptomaina cloroformica leggermente acidulata con acido acetico, nella quantità che è contenuta nella siringa comune del Pravaz. Si osservò tosto un alternarsi di iniettamento vasale all' orecchio col ritorno allo stato normale, contemporaneo ad un abbassarsi ed elevarsi della temperatura dell' orecchio medesimo. Il respiro ed il circolo subirono pure qualche disturbo; ma tutti i fenomeni man mano scomparvero e si ebbe il ritorno allo stato normale.

Ptomaina estratta coll' alcool amilico — Ptomaina libera.

Rana Sarda più grossa (quasi il doppio di quella adoperata nell' esperienza colla ptomaina cloroformica). Introdotte sotto la cute del dorso dieci goccie di soluzione d' estratto amilico, si ebbero dopo otto minuti i movimenti torpidi dell' animale, giacchè eccitato trascinava con difficoltà gli arti posteriori. La pupilla è al massimo di dilatazione. La sensibilità della cute è perduta perchè l' animale non risponde alle punture fatte su di essa. Vi ha flacidezza generale dei muscoli,

morte. Preparata la rana alla Galvani e cimentati colle solite correnti i nervi lombari, questi rispondono facendo contraere il treno posteriore; cimentati invece colla stessa corrente i muscoli, questi non rispondono affatto.

Acetato della ptomaina cloroformica.

Esperienza 1ª. Rana Sarda di piccola taglia. Appena introdotte tre goccie di soluzione satura di questo sale, si osserva vivacità straordinaria dell' animale che salta e sembra quasi volersi sottrarre ad un irritante molto molesto. La pupilla si dilata; poscia insorgono contrazioni tetaniche del treno posteriore, susseguite da completa flacidezza muscolare dopo 7 minuti; in tutto il corpo, abolita completamente la sensibilità della cute anche sotto lo stimolo dell' acido acetico, al quale le rane sono sensibilissime. Morte apparente. Aperto il torace il cuore batte ancora ma con estrema lentezza (24 pulsazioni al minuto).

Preparata alla Galvani, la rana avvelenata offre il solito, costante e rilevantissimo fenomeno di mostrare inattività al cimento dei muscoli colla corrente Galvanica, ed attivi invece i nervi crurali motori.

Esperienza 2ª. Coniglio di media taglia.

Introdotta sotto la cute colla siringa di Pravaz una soluzione satura, circa un grammo, di acetato di ptomaina dell' estratto cloroformico. Dopo 10 minuti frequenza straordinaria di respiro che va sempre aumentando fino a 180 respirazioni per minuto primo, allargamento pupillare con immobilità dell' iride. I vasi dell' orecchio sono iniettati ma non così fortemente come nell'esperienza parimenti sul coniglio coll' estratto etereo.

In seguito la respirazione va diminuendo e la temperatura al retto è alta + 40,3. Dopo 35 minuti la respirazione è rallentata moltissimo (80 al minuto) con apparente spasimo diaframmatico, restringimento marcatissimo pupillare, inclinazione della testa come nell' altra esperienza, sonno, ed impossibilità dell' animale di reggersi in piedi. Dopo 45 minuti, convulsioni con contrazioni della faccia (trisma tetanico) seguìte da morte. Tosto si osserva l' allargamento pupillare e la scomparsa del congestionamento ai vasi dell' orecchio. Praticata subito l' autopsia, si trova il cuore dilatato e pieni di sangue ambo i ventricoli, che mostrano ancora moti sistolici irregolari, leggermente pulsanti le orecchiette destra e sinistra. Seguitano ancora per alcuni minuti distintissime le convulsioni muscolari specialmente ai masseteri. Il cervello non presenta nulla di rimarchevole, meno una leggera congestione dalla pia meninge, come venne riscontrato nell' autopsia del coniglio avvelenato coll' estratto etereo.

Solfato della Ptomaina eterea.

Esperienza 1ª. Con questo sale preparato da un mese prima, si fece una soluzione satura e se ne iniettarono sei goccie sotto la cute del dorso ad una rana di

taglia grossa (Yla viridis). Appena introdotta la sostanza, l' animale come al solito tenta sottrarsi ad un eccitamento molto molesto. Dopo un minuto si nota allargamento massimo pupillare, torpidità delle membra, arrossamento delle coscie (fatto verificato altre volte specialmente nella rana Yla viridis), flacidezza molto pronunciata dopo quattro minuti, nel qual tempo la pupilla si è alquanto ristretta e l' animale non risponde agli eccitamenti cutanei.

Aperto il torace si osserva il rallentamento dei moti cardiaci, e tre minuti dopo si sono verificate le caratteristiche seguenti: una pausa marcata dopo sei battute, poi dopo quattro, poi dopo tre, continuando collo stesso intervallo per alcuni minuti, poi rallentamento marcatissimo e cessazione. Preparata alla Galvani, rispondono alla elettricità benissimo i nervi e leggerissimamente i muscoli, sensibilità che cessa prestissimo in questi e si estingue dopo cinque minuti in quelli.

Esperienza 2ª. (Cavia piccola). Iniezione ipodermica di soluzione satura di solfato dell' estratto etereo ptomainico. Dopo 10 minuti rallentamento del respiro e convulsioni tonico-cloniche in tutti i muscoli del corpo, dilatazione pupillare e morte dopo 14 minuti. Aperto tosto il torace si riscontrò il cuore ancora pulsante, ma irregolarmente con contrazioni fibrillari, piuttosto che vere pulsazioni ritmiche.

Aperta la cavità craniana, la pia meninge è congestionata leggermente, la polpa cerebrale, tanto grigia che bianca, è perfettamente normale.

Cloridrato della Ptomaina cloroformica.

Anche questo preparato da circa un mese era conservato in vaso con cloruro di calcio.

Esperienza 1ª. Furono introdotte cinque goccie della soluzione assai satura del cloridrato in una rana grossa vivacissima (Yla viridis). Si ebbe subito dilatazione pupillare. Dopo due minuti l' animale è impossibilitato a muoversi, arti anteriori completamente flacidi ed insensibili. Dopo sei minuti la flacidezza è estrema in tutto il corpo. Aperto il torace, il cuore si trova biancastro, quasi vuoto di sangue con battiti lenti ed irregolari (22 al minnto), colla solita pausa, ma qui ogni due rivoluzioni cardiache complete. Preparata alla Galvani e cimentata colla solita corrente, risponde all' eccitamento dei nervi tanto all' aprirsi che al chiudersi del circuito. La contrattilità muscolare col cloridrato non è affatto estinta. Dopo 25 minuti la irritabilità ai nervi era anch' essa scomparsa, mentre, fatto l' esperimento con una rana sana, presentava ancora l' irritabilità nervosa dopo un' ora.

Esperienza 2ª. (Cavia di media taglia). Iniezione ipodermica di soluzione poco satura nella quantità di otto goccie. Avanti l' iniezione l' animale un po' spaventato aveva 160 respirazioni al minuto. Dopo 50 minuti soltanto si ebbero sintomi di avvelenamento con diminuzione della respirazione. Dopo un' ora e cinque minuti avevasi pupilla dilatata e l' animale dava segni manifesti di sofferenza, giacchè aveva movimenti disordinati masticatorî, sembrava in preda al sonno ma spesso

dava sussulti e grida singhiozzanti, emettendo urine e feci. Dopo circa tre ore cominciò a calmarsi e dopo quattro ore non era più sofferente riacquistando intieramente la vivacità naturale. Il giorno appresso l' animale in esperimento si trovò in condizioni normali.

A queste esperienze fecero seguito altre con soluzioni concentrate di ptomaine eteree salificate (solfato) e ricavate da visceri conservati nell' alcool fino dal 1876.

Esperienza 1ª. Ne furono introdotte alcune goccie sotto la cute di una piccola rana sarda. Dopo tre minuti si ebbe dilatazione pupillare, e subito cominciò la flacidezza delle membra e specialmente del treno posteriore con leggiere scosse convulsive. Dopo cinque minuti dalla fatta iniezione, la flacidezza muscolare era massima, si aveva perfetta insensibilità alla cute cimentata in diversi modi, punzecchiamento, taglio delle dita tanto al treno posteriore che anteriore. Aperto il torace si trova che il cuore batte ancora con ritmo regolare, ma il ventricolo non si riempie totalmente di sangue nel suo momento diastolico. Preparata alla Galvani e cimentati i nervi lombari, rispondono con contrazioni al treno corrispondente, più all' aprire che al chiudersi del circuito, e resta assolutamente senza risposta l' applicazione della stessa corrente sui muscoli.

Esperienza 2ª. La stessa ptomaina eterea fu introdotta in piccolissima quantità sotto la cute di una grossa rana sarda, previa apertura del torace, e conseguente scopertura del cuore onde esaminarne le funzioni dietro un tale avvelenamento. Prima dell' introduzione della ptomaina, la rana in esperimento dava 60 rivoluzioni cardiache al minuto, dopo due minuti dalla fatta iniezione se ne contavano 68, quindi subito un leggiero aumento stazionario per un po' di tempo. Dopo 12 minuti, invece diminuzione fino a 44 per minuto, poi 42. A ciò si accompagna una minore vivacità nei moti dell' animale ed un allargamento pupillare. Qualche minuto dopo i battiti sono in numero di 40. Ventidue minuti dopo il principio dell' esperienza comincia la flacidezza muscolare, l' arto posteriore destro è molto più flacido del sinistro, allungato resta tale, mentre allungando il sinistro l' animale lo ritira, non risponde più al punzecchiamento degli arti. Eccitati con acido acetico diluito non danno segno di risentirsene; rispondono ancora all' acido acetico concentrato. Dopo poco più di mezz' ora dell' esperienza i battiti cardiaci sono in numero di 36. Si prepara la rana alla Galvani e si riscontra il solito fenomeno della perdita della contrattilità muscolare all' applicazione della corrente solita, restando eccitabili invece i nervi motori. In complesso i fenomeni riscontrati in questa esperienza sono stati i medesimi delle altre, colla differenza che furono lenti a prodursi stante la grossezza assai maggiore della rana e la pochissima quantità della sostanza venefica introdotta.

Esperienza 3ª. Rana sarda vivacissima di media taglia. Introdottavi una soluzione di estratto etereo di visceri antichi, sempre sotto la cute del dorso, si ebbero

dopo tre minuti fenomeni convulsivi, poi flacidezza muscolare, perdita di sensibilità alla cute tanto degli arti anteriori che posteriori, od almeno la rana agli eccitamenti svariati nella cute di essa non risponde con contrazioni muscolari. Avvi pure dilatazione pupillare. Scoperto il cuore della rana così ridotta in estrema flacidezza muscolare si osservano le seguenti caratteristiche:

I battiti cardiaci sono frequenti per le tre prime battute, poi sono seguiti da una pausa più o meno lunga, cioè da un momento lungo di riposo di tutte le cavità cardiache. Le rivoluzioni cardiache sono in numero di 28 al minuto, prima eseguendosi due rivoluzioni complete e poi una pausa marcatissima nella quale tutte e tre le cavità cardiache sono in riposo, in diastole. La pausa misura in media quattro secondi. Durante il tempo che si osservano i fenomeni del cuore la rana contrae lievemente le dita e la pupilla si dilata maggiormente. Dopo un quarto d'ora si aveva una rivoluzione completa del cuore, susseguita da lunga pausa con battiti estremamente rallentati e vicini ad estinguersi. Preparata alla Galvani e cimentata colla corrente indotta della slitta del Dubois-Raymond al grado 320, danno segno di rissentimento i nervi e niente i muscoli, i quali non si contraggono nemmeno a correnti più forti. Anche in questa esperienza si ebbe perdita assoluta della contrattilità muscolare.

Esperienza 4ª. Rana sarda di media grossezza. Introdotta sotto la cute del dorso una soluzione di estratto etereo di visceri antichi leggermente acidulata con acido solforico, si ebbero dopo brevissimo tempo le solite contrazioni muscolari susseguite da flacidezza muscolare; preparata alla Galvani, si ebbero all' eccitamento elettrico sui nervi motori contrazioni muscolari, sui muscoli assoluta inattività. Per timore che l' acido solforico avesse agito come veleno fu ripetuta l' esperienza in altra rana dopo aver neutralizzato con potassa l' estratto acidulato.

I fenomeni riscontrati furono in tutto simili agli accennati.

Sarebbe stato nostro desiderio il praticare altre esperienze, ma la poca quantità degli alcaloidi cadaverici disponibile per le esperienze fisiologiche ci fecero rimandare ad altro tempo ulteriori esperimenti. Dobbiamo pertanto accennare alle conclusioni seguenti:

1.° Gli alcaloidi cadaverici o ptomaine del Selmi sono venefici in alto grado. In minime dosi muoiono le rane ed i conigli;

2.° Sono più micidiali le ptomaine libere che non i sali di esse, e fra le libere le ptomaine eteree;

3.° Sulle rane i fenomeni principali sono:

A) dilatazione pupillare susseguita da restringimento;

B) convulsioni tetaniche susseguite prestissimo dalla flacidezza muscolare;

C) rallentamento dei battiti cardiaci colle particolarità accennate nelle singole esperienze;

D) perdita assoluta della sensibilità alla cute;

E) perdita della contrattilità muscolare.

Tali fenomeni nelle rane si presentano più o meno presto a seconda della saturazione della sostanza, della taglia dell' animale e della quantità.

4.° Sui conigli i fenomeni principali sono i seguenti:

a) pupilla irregolare che finisce col restringimento;

b) iniezione marcatissima ai vasi dell' orecchio per paralisi vaso-motoria;

c) respirazione lentissima;

d) Sonno al quale succedono presto accessi, convulsioni e morte.

Esaminati frattanto i lavori sperimentali degli autori succitati non possiamo che convenire con tutti sulla assoluta velenosità degli alcaloidi cadaverici a piccolissime dosi. Conveniamo col Ciaccio e col Vella nell' ammettere sulle rane il rallentamento dei moti del cuore e la dilatazione pupillare e specialmente costante la flacidezza muscolare.

Conveniamo col Vella e non col Ciaccio nel non ritenere analoga l' azione della ptomaina all' agire del curaro. Che anzi per le nostre esperienze l' agire del curaro sulle rane è assolutamente ed evidentemente inverso. Col curaro si uccidono i nervi motori, e resta intatta assolutamente la contrattilità muscolare, come funzione autonoma del muscolo, e non modificata la funzione cardiaca. Colla ptomaine si ebbe sempre rallentamento e disordine dei moti del cuore, persistente eccitabilità dei nervi motori, perdita della contrattilità muscolare. Ed anzi mi piace far conoscere come questa *morte* della contrattilità muscolare sia un fatto rilevantissimo e quasi sempre costante nell' avvelenamento cogli alcaloidi cadaveri; estinta contrattilità muscolare che non ha riscontro che nell' avvelenamento col solfocianato potassico.

Si potrebbe bensì obbiettare, che la contrattilità muscolare non è totalmente estinta se l' eccitamento dei nervi motori si rende palese con contrazione di muscoli inervati da essi, ma resta bensì assodato che la contrattilità muscolare come funzione autonoma è perduta, giacchè la corrente elettrica su di essa è assolutamente inattiva. Vuol dire cioè, che nell' avvelenamento ptomainico il muscolo per contrarsi ha bisogno assolutamente dello stimolo potente nervoso motore, giacchè il muscolo oltre alla contrattilità autonoma ha perduto per fino il tono muscolare, dimostrandolo evidentemente la flacidezza muscolare che è uno dei primi e costanti fenomeni dell' avvelenamento in discorso.

Il rilassamento generale delle membra che precede la morte è pure il sintomo più saliente nelle esperienze sulle rane cogli alcaloidi cadaverici nella perizia Medico-legale delle sorelle Rizio praticata da Lussana e dall' Albertoni; e quindi nella costante presenza di questo sintomo ci troviamo coi predetti esperimentatori.

Le conclusioni pure delle moltissime esperienze del Moriggia cogli estratti cadaverici (acquoso, etereo, amilico) concordano in generale colle nostre nell' ammettere col Moriggia indebolimento della forza cardiaca ed un' alterazione del ritmo con diastoli lunghissime ed espanse e con altre particolarità da noi descritte nelle esperienze sulle rane. Nelle stesse pure vi fu, come ammette il Moriggia, quasi

sempre un iniziale e breve esaltamento della sensibilità e motilità generale, susseguite sempre come abbiamo detto da flacidezza estrema muscolare. Furono pure da noi tentate esperienze comparative sulle rane coll' atropina, ma si ebbero fenomeni ben diversi da quelli riscontrati coi veleni cadaverici. Infatti coll' atropina si trovò costante estrema e duratura la dilatazione pupillare, esaltamento duraturo e non perdita, come colle ptomaine, della sensibilità cutanea, paralisi del treno posteriore ma non flacidezza muscolare, battiti cardiaci lenti e qualche volta irregolari, ma non mai le caratteristiche riscontrate coi veleni cadaverici. In fine all'applicazione elettrica, i nervi ed i muscoli coll' avvelenamento atropinico, risposero sempre agli eccitamenti, e non fu abolita come quasi sempre colle ptomaine la contrattilità muscolare.

Furono ancora praticate esperienze comparative col solfocianato-potassico sulle rane.

Di questo veleno scioltone un decigrammo in dieci goccie d' acqua, ed iniettatene sei goccie sotto la cute del dorso di una rana verde (Yla viridis) si ebbe immediatamente soppressione del respiro, stringimento della pupilla, contrazione tetanica degli arti anteriori e posteriori; anzichè flacidezza, stato tonico dei muscoli marcatissimo. Aperto immediatamente il torace, si trovò il cuore immobile in diastole, grosso, disteso, ripieno di sangue. Preparata la rana alla Galvani non rispondono i muscoli cimentati alla corrente elettrica, solo i nervi rispondono a corrente d' induzione fortissima.

In altre rane introdotte soltanto quattro goccie della soluzione predetta, e, come per la prima, l' animale prova un senso molestissimo all' introduzione del veleno sotto la cute del dorso, e incurva la colonna vertebrale colla convessità in basso, mentre coi veleni ptomainici si ha l' incurvamento in senso inverso. Immediatamente all' applicazione del veleno, al dissopra dell' epidermide, si effettua una secrezione abbondante di muco bianchissimo che si fa subito coagulato. Al pari della prima rana si ha la pupilla ristretta, gli arti anteriori contratti con adduzione forzata, e retratto pure il treno posteriore. Messo allo scoperto il cuore si trova pure immobile ed in diastole, grosso e disteso dal sangue. Medesimi fenomeni al cimento elettrico colla rana preparata alla Galvani e messa a confronto con altra preparata allo stesso modo in istato sano. Anche questo potente veleno non ha comune colla ptomaina altro che il fenomeno della soppressione dopo la morte della contrattilità muscolare, ma gli altri sintomi e specialmente la cessazione immediata del respiro e dei moti del cuore che si riscontra col solfocianato, non si hanno tali colla ptomaine sebbene anch' esse apportino gravi disturbi alla funzione cardiaca. Di più coll' avvelenamento solfocianico si ha stato tetanico dei muscoli e non la flacidezza, fenomeno costante dell' avvelenamento colle ptomaine. Finalmente fu cimentata l' azione della nicotina e della codeina, colle seguenti esperienze:

In una rana (Yla viridis) di media taglia, iniettata sotto la cute del dorso una goccia di nicotina, si osservano immediatamente convulsioni tetaniche con arcua-

zione della colonna vertebrale, la pupilla si restringe fino all' estremo, messo allo scoperto il cuore si osserva un acceleramento dei moti cardiaci. Le convulsioni seguitano ad intervalli, vi ha perdita della sensibilità cutanea esplorata coll' acido acetico. Poscia la rana si presenta flacida, scompare la miosi e viene sostituita da ampio allargamento della pupilla, il cuore seguita a battere diminuendo gradatamente di frequenza, ma sempre regolare. Preparata alla Galvani e cimentata con corrente elettrica, i nervi lombari non rispondono all' eccitamento, mentre i muscoli si contraggono cimentati colla stessa corrente, sebbene con poca energia.

Altre esperienze sulle rane colla nicotina danno fenomeni tutt' affatto identici; differiscono da quelli offerti dalle ptomaine, specialmente per la mancanza della flacidezza, per le diverse caratteristiche nei movimenti cardiaci, e per la perdita di attività nei nervi, restando quasi inalterata la contrattilità muscolare: il modo d' agire della nicotina è quasi inverso a quello delle ptomaine.

Esplorata infine sulle rane la codeina si trova che questa non agisce su di esse che ad altissime dosi, e che la morte impiega molte ore a prodursi, con sintomi di lento sopore; dopo morte tanto i nervi che i muscoli rispondono agli eccitamenti elettrici. Troppo diverso quindi anche con questo alcaloide il modo d' agire, confrontato a quello delle ptomaine.

Da tutte le esperienze quindi che siamo andati esponendo, e dal confronto fatto dal modo di agire di alcuni veleni ben conosciuti, tali il curaro, l' atropina, il solfocianato potassico, la nicotina e la codeina, si rileva manifestamente che, le ptomaine hanno sintomatologia loro propria, e che, messi assieme i caratteri specifici dati dal loro modo di comportarsi chimicamente e fisiologicamente, si può arrivare a farsi un concetto abbastanza distinto del loro modo di comportarsi nell' organismo, e dei caratteri differenziali ed esclusivi di esse, e portare quindi nuova luce alla medicina legale nell' importante ed intricato laberinto dei venefizî.

DESCRIZIONE ANATOMICA

DI UN MOSTRO UMANO DOPPIO

DEL GENERE DERODIMO

MEMORIA

DEL DOTT. LUIGI MONTI

(Letta nella 21ª Sessione Ordinaria delli 22 Aprile 1880)

Nel Mese di Giugno dell' anno 1878 alla distanza da Bologna di Kilometri 15, una donna di condizione colona dell' età di 29 anni, di mediocre statura, e di una costituzione non forte, giunse al termine della settima gravidanza.

Cominciati i dolori del parto mandarono per la Mammana, che giunse nel momento in cui il feto si era già impegnato coll' estremità inferiore, e lentamente s' avvanzava finchè giunse ad essere espulso sino all' estremità superiore del torace, giunto il parto a questo punto non era più possibile un ulteriore avvanzamento, sicchè furono costretti a chiamare il Medico Chirurgo condotto, l' eccellentissimo Sig. Dott. Enrico Palotti, che sollecito si recò dalla partoriente, e che dopo averla bene esaminata giudicò essere meglio aspettare, che procedere all' estrazione del rimanente feto mediante atto operatorio, e difatti dopo non molto tempo, ne uscì una testa, poi una seconda, e ne furono meravigliati il vedere, come un neonato, che in tutto appariva semplice, potesse avere due teste ben distinte, per lo chè il sullodato Sig. Dott. Palotti, credendo, che tale mostro potesse essere di utilità alla scienza, mel' inviò accompagnato da una lettera, che accennava i riferiti dati storici, poi dichiarava, che la donna dopo il parto si trovava bene, e che gli era sembrato, che la testa destra, che fu l' ultima ad escire avesse dato segno, per un istante, di respirare.

Appena il vidi subito m' accorsi, che apparteneva alla famiglia dei Sisomi, ed al genere Derodimo; sebbene questa specie di mostri sia conosciuta dagli anatomici, anche rispetto alla sua struttura, ciò non di meno ho creduto bene di farne

l' anatomia, coll' intendimento di riempiere le lacune, che mi è parso di vedere nelle altrui osservazioni.

Facendomi a descriverlo, egli (Fig. 1ª e 2ª Tav. I) si rappresenta sotto la forma di un feto molto grosso, avente due teste, sostenute da due colli impiantati sopra un torace ampio, al disotto del quale vi è un addome molto largo e disteso, che alla palpazione dà un senso di fluttuazione molto oscura. Le teste sono di grandezza normale, un poco schiacciate nella faccia nel lato col quale si corrispondono, i colli sono di disuguale lunghezza essendo un poco più lungo quello del feto *B.* Nel mezzo dell' addome sorge un funicolo ombellicale di ordinaria grossezza, le parti genitali sono maschili, e ben sviluppate, e tastando lo scroto si trova che in esso lui sono rinchiusi i testicoli, l' ano è normale e per positura, e per larghezza.

La regione dorsale offre tre prominenze longitudinali, che tutte e tre sembrano sporgenze di apofisi spinose, ma non sono tali, che le due laterali. Vi hanno quattro arti due superiori, e due inferiori normali.

E innanzi tutto lo pesai, e misurai per conoscere se il peso, e le misure si confacessero con quelle di un feto a termine, e trovai che esso pesava 3630 grammi, la quale quantità dividendola in due, ognuna riusciva inferiore a quella di feto a termine, ciò che dimostrava non esser eglino due feti interi, ma poco più della metà di due feti riuniti in uno.

Le misure poi sono le seguenti :

Lunghezza del feto	Millimetri	430
Sua porzione sopra ombellicale	„	225
Sua porzione sotto ombellicale	„	205

Nel feto A

Circonferenza orizzontale del cranio	„	340
Diametro antero-posteriore del cranio	„	108
Diametro trasverso maggiore	„	95
Arco fronto-occipitale	„	210
Arco biauriculare	„	220
Indice cefalico	„	88
Distanza dal vertice al mento	„	120
Dalla glabella al mento	„	52
Larghezza della faccia	„	68
Lunghezza del collo	„	40

Nel feto B

Circonferenza orizzontale del cranio . .	Millimetri	350
Diametro antero-posteriore	„	106
Diametro trasverso maggiore	„	103
Arco fronto-occipitale	„	200
Arco biauricolare	„	230
Indice cefalico	„	97
Distanza dal vertice al mento	„	130
Distanza dalla glabella al mento	„	52
Larghezza della faccia	„	83
Lunghezza del collo	„	50
Circonferenza delle due teste unite insieme . .	„	520
Distanza dalla fossa iugale al pube . . .	„	180
Distanza dall' angolo della lambda occipitale alla punta del cocige . . . nel feto *A*	„	220
nel feto *B*	„	230
Dalla divisione dei due feti alla punta del cocige .	„	210
Distanza da una sommità di una spalla all' altra .	„	160
Altezza del torace	„	80
Circonferenza del petto presa subito sotto il cavo ascellare	„	370
Circonferenza del petto presa all' arco costale .	„	390
Altezza dell' addome	„	100
Circonferenza dell' addome a livello dell' ombellico.	„	360
Circonferenza dell' addome a livello del pube . .	„	280
Distanza dall' acromio all' estremità del dito medio.	„	200
Distanza dall' acromio all' olecrano.	„	80
Distanza dall' olecrano al carpo	„	65
Lunghezza della mano	„	55
Distanza dal gran trocantere alla pianta del piede	„	200
Distanza dal gran trocantere al ginocchio . .	„	90
Distanza dal ginocchio alla base del malleolo esterno	„	80
Da questa base del malleolo alla pianta del piede	„	30
Lunghezza del piede	„	70

Dopo aver dato uno sguardo all' esteriore di questo mostro, comincierò a descriverne la struttura, la qual descrizione acciocchè riesca più chiara verrà eseguita, studiando ciascun sistema separatamente, e saranno prese in considerazione solo quelle parti che potranno interessare la teratologia.

Sistema osseo.

La dupplicità di questo mostro è ben manifesta nella parte fondamentale del tronco, e nelle teste, Tav. II Fig. 1ª e 2ª. Il cranio del feto *A* è un poco meno sviluppato di quello del feto *B*, ambidue hanno le fontanelle normali; sotto il periostio del parietale sinistro del feto *B* eravi un vasto ematoma.

Esistono due colonne vertebrali, che superiormente sono distanti fra loro tre centimetri, ma discendendo man mano s' avvicinano, rimanendo chiaramente distinte fino alla seconda vertebra sacrale, e da quel punto in giù non si osserva più traccia di dupplicità.

Queste due colonne non sono di eguale lunghezza, essendo quella del feto *A* nella regione cervicale più corta di quella del feto *B*, e questo dipende dall' avere il feto *A* nel collo solamente cinque vertebre, laddove nell' altro feto ve ne sono sette; le vertebre dorsali sono dodici per ciascun feto, le dieci superiori di una colonna sono completamente divise da quelle dell' altra colonna, ma le ultime due di una colonna, sono per sincondrosi riunite alle ultime due dell' altra. Le vertebre lombari sono cinque per ogni feto riunite anch' esse per sincondrosi, come le ultime due dorsali. Il sacro è formato di cinque pezzi, i due primi presentano segni di dupplicità, gli altri sono formati di un sol pezzo osseo, e lo stesso dicasi dei pezzi del cocige.

Alle due cavità craniensi fan seguito le due teche vertebrali, le quali a livello della seconda vertebra lombare si fondono in un' unica, e larga cavità spinale, continuantesi nel canal sacrale.

Nella regione dorsale d' ogni colonna partono, dal lato che i feti non si corrispondono, dodici costole, sette vere, e cinque spurie, le prime colle loro cartilagini di prolungamento che sono molto lunghe si riuniscono allo sterno, le altre, eccetto le ultime due che rimangono libere, si riuniscono alla cartilagine della settima costola; dal lato poi che le due colonne si corrispondono partono, sempre nella regione dorsale, dei rudimenti di costole, che nella linea mediana quelli che provengono da una colonna si riuniscono a quelli dell' altra colonna, questi rudimenti di costole sono più lunghi, i superiori discendendo sempre s' accorciano, e l' undecimo, ed il dodicesimo sono così corti da ridursi ad un semplice punto osseo appena percettibile, e questo in causa che le due colonne sempre più si accostano per terminare, come si è detto, col fondersi insieme; i tre primi rudimenti di costole riunendosi formano una leggerissima curva a concavità anteriore, i sette che seguono nel riunirsi insieme formano un angolo diretto posteriormente, e che allorquando lo scheletro era rivestito delle sue parti molli rappresentavano quella linea saliente longitudinale mediana, che facilmente si sarebbe presa per un segmento di una terza spina dorsale interposta alle due colonne vere.

Lo sterno è semplice, come lo dimostrano i suoi punti d'ossificazione; quasi nel mezzo del margine superiore del manubrio parte un' appendice ossea che si innalza verticalmente, lunga 24 millimetri, di forma prismatica, e che nel suo terzo superiore per l'aggiunta di una porzione ossea anteriormente, di forma triangolare colla base in basso, acquista la forma della lama di un cheratotomo, mentre i due terzi inferiori ne rappresenterebbero il manico, Fig. 3ª Tav. II.

Finalmente non è a tacersi di un rudimento di scapola collocato posteriormente in mezzo alle colonne vertebrali, a livello della terza costola, il qual rudimento è di forma triangolare, come si osserva nella Tav. II Fig. 4ª.

A detto rudimento mettevan capo semplicemente due muscoli, che sono gli angolari delle scapole interni, ed era riunito allo scheletro semplicemente per l'attacco di questi muscoli, o per sisarcosi.

Il rimanente dello scheletro era normale, come se appartenesse ad un feto semplice.

Questo scheletro differisce da quello descritto dall' Alessandrini 1° perchè nelle colonne vertebrali quantunque non fossero di eguale lunghezza non mancava però alcuna vertebra, laddove in questo nella colonna vertebrale del feto *A*, mancavano due vertebre alla regione cervicale: 2° perchè le due colonne in quello erano fra loro più distanti, e mantenevano i segni di dupplicità fino all'estremità del cocige, intanto che in questo le due colonne alla regione lombare si riuniscono insieme per sincondrosi, ed al terzo pezzo sacro fino all' estremità del cocige, non esiste più traccia di dupplicità, in quello le teche vertebrali sono doppie fino all' incisura sacrale inferiore, in questo a livello della seconda vertebra lombare si riuniscono in un' unica cavità spinale.

In quello dell' Alessandrini avvi un' appendice episternale che si curva in addietro, e che si unisce ad un' altra che trovasi alla regione dorsale fra le due colonne vertebrali che ascende dalla terza vertebra dorsale, e giunta al collo si curva in avanti per unirsi all' altra proveniente dallo sterno. In questo invece avvi un' appendice episternale verticale, ed alla regione dorsale un ossetto di forma triangolare attaccato allo scheletro semplicemente per l' intermezzo dei muscoli angolari, dunque quest' ossetto rappresenta un rudimento delle due scapole, e l' appendice episternale siccome in essa si attaccano i muscoli che dovrebbero attaccarsi alla clavicola, ed allo sterno, così rappresenterà un rudimento e di clavicola, e di sterno.

Premesse queste annotazioni osteologiche passerò a dire della muscolatura.

Miologia.

Avvertirò in precedenza, che per render più breve, e chiara la descrizione dei muscoli, saranno chiamati muscoli interni quelli del lato in cui i due feti si corrispondono, e muscoli esterni quelli del lato in cui i due feti non si corrispondono.

Non terrò parola dei muscoli della faccia, e degli arti, perchè al tutto sono conformi alla normalità, e cominciando dai muscoli anteriori del collo, come si osserva nella Tav. III Fig. 2ª ben si vede, che i due muscoli sternocleidomastoidei e sterni non presentano varietà nè negli attacchi, come nel suo decorso, ma gli sternocleidomastoidei interni sono notabili per la loro terminazione inferiore, in quanto che vanno a terminare in gran parte ai lati della metà inferiore dell' appendice episternale, e con una piccola parte al margine superiore del manubrio dello sterno.

Non esistono che gli omoplatajoidei esterni, mancano gl' interni, i muscoli sternojoidei e sternotiroidei esterni presentano di particolare solo, che non si coprono a vicenda, anzi fra le loro origini sternali sono tanto fra loro allontanati, che vi si scorgono degli intervalli, attraverso i quali si veggono benissimo innalzarsi dal petto i due timi, i quali ascendono nel collo fino al terzo, o quarto anello della trachea, questi muscoli dal lato interno vanno tutti a terminare ai lati dell' appendice episternale, rimanendo coperti dai muscoli sternocleidomastoidei; alla sommità di quest' appendice s' inserisce poi l' estremità anteriore dei due muscoli cucullari interni, i quali per giugnere a questo punto debbono portarsi in avanti e curvarsi in basso.

Nel petto tranne, che le origini sterno-costali dei due muscoli gran pettorali, che sono fra loro allontanate, null' avvi di particolare.

Nell' addome si osserva una assai larga linea alba, la quale al posto normale presenta un pertugio per il passaggio dei vasi ombellicali, di più le aponeurosi dei muscoli larghi dell' addome sono enormemente estese.

Nella regione dorsale i muscoli presentano più varietà, e di fatti osservando la Fig. 1ª, Tav. III, ove sono effigiati i muscoli superficiali del dorso, subito s'accorge che i due muscoli cucullari esterni hanno le loro origini, e terminazioni dai suoi punti naturali dello scheletro, l' unica particolarità che ci offrono è che a livello delle apofisi spinose delle prime vertebre dorsali, ove questo muscolo suol presentare una bella aponeurosi di forma emielittica, in questo mostro manca, i due cucullari interni hanno le loro origini craniche, e spinali normali, ma presentano delle differenze tanto nella loro terminazione scapolo-clavicolare, quanto nella direzione delle fibre; nella regione cervicale, e nella parte superiore del dorso le fibre di questi due muscoli si dirigono verso di un rafe tendineo situato in mezzo ai due feti, il qual rafe è esteso dalla quarta vertebra dorsale in alto fino alla divisione dei due colli, quà giunte le fibre di questi muscoli non si arrestano, ma si portano in avanti curvandosi in basso per giugnere come si è già detto alla sommità dell' appendice episternale: le fibre poi che non si uniscono a questo rafe, sono quelle che provengono dalle apofisi spinose delle vertebre dorsali inferiori, sono dirette dal basso all' alto, e separate dalle altre mercè due striscie aponeurotiche, che si uniscono in basso, come le due aste della lettera V. I muscoli gran dorsali esterni non hanno di particolare, che la porzione

aponeurotica del muscolo è molto larga, i gran dorsali interni si può dire, che non esistono, giacchè vengono rappresentati da alcuni fascetti tendinei tesi da una colonna spinale all' altra nella parte inferiore del dorso.

Sollevati questi muscoli superficiali del dorso si mettono bene in vista quelli del secondo strato, come si osserva nella Fig. 1ª, Tav. IV.

I muscoli romboidei esterni sono normali, mancano gl' interni, gli spleni tanto interni, che esterni l' unica particolarità che ci offrono è, che le loro origini craniche, invece di derivare tanto dalle linee semicircolari superiori dell'occipite, quanto dalle apofisi mastoidee del temporale, da queste solamente provengono, i muscoli angolari esterni nulla ci presentano d' anormale, ma gli angolari interni vanno a terminare ad un ossetto di forma triangolare della grandezza di un grosso pisello schiacciato collocato fra i due feti a livello della seconda vertebra dorsale riunito allo scheletro solo per l' attacco di questi muscoli, come si è già detto, situato sotto i muscoli cucullari interni, e sopra alcuni fascetti dei muscoli gran complessi.

Levati ancora questi muscoli, in allora ben ne appare un terzo strato come si vede nella Fig. 2ª, Tav. IV.

I muscoli gran complessi esterni sono normali, gl' interni invece ci offrono delle varietà nella loro inferiore terminazione, e cioè in luogo di terminare alle apofisi trasverse delle sei vertebre dorsali superiori si appiccano alla terza, quarta e quinta costola interne, rappresentate da cortissime porzioni costali che riuniscono insieme le due colonne vertebrali.

I sacro lombari esterni sono normali, gli interni invece non ci presentano che pochi fascetti alla parte inferiore del dorso, si trovan più sviluppati ascendendo verso il capo, anzi alla regione cervicale, i muscoli cervicali discendenti ed i trasversi della nuca sono normali. I moltifidi esterni nulla ci offrono, laddove gl' interni cominciano ad apparire alla regione del dorso, e di mano che si avvicinano al cranio sempre più aumentano di volume, ed alla regione cervicale si trovano già sviluppati come gli esterni.

Apparecchio digerente.

La porzione sopradiaframmatica dell' apparecchio digerente è nei due feti eguale e normale; i due esofagi attraversano la porzione lombare del diaframma in due punti che distano fra loro appena due centimetri, entrati nell' addome ben presto si continuano a due stomachi piuttosto piccoli, e che ciascuno di questi si continua ad un corrispondente intestino. L' intestino che parte dallo stomaco destro è molto grosso in confronto allo sviluppo dello stomaco, è corto, forma poche anse, e termina nell' intestino cieco, il quale è voluminosissimo, e che aperto l' addome, subito si presentò sotto forma di un sacco membranoso che occupava gran parte della cavità addominale, quasi pieno di liquido (meconio), ed esso era che alla pal-

pazione dell' addome dava quel senso di fluttuazione di cui abbiamo già accennato. Questo cieco presenta la forma di uno stomaco d'adulto, o meglio di una cucurbita, ed in esso si notano due curve, due faccie e due estremità; delle estremità una è superiore, o destra, congiunta all' intestino tenue, l' altra inferiore, o sinistra, libera terminante a cieco fondo, delle curve una è minore, l' altra maggiore, la minore, o superiore, o sinistra misura 120 millim. di lunghezza, ed è da questa curva, che nasce l' appendice vermiforme della lunghezza di un centimetro e mezzo, la curva maggiore, o destra, o inferiore è di 390 millim.; la lunghezza di quest' intestino cieco è di 150 millim., quanto alla sua larghezza non è eguale in tutto il suo decorso, giacchè diventa sempre più sottile di mano che s' accosta alla sua estremità inferiore, o sinistra, e se si misura presenta un diametro di 78 millim. al suo principio, di 68 nel suo mezzo, e di 30 millim. nella sua terminazione.

L' intestino poi che parte dallo stomaco sinistro è più lungo del destro, più sottile e più ravvolto, e termina mediante l' intestino retto all' ano, senza avere mai avuto rapporto coll' altro intestino, come vedesi assai bene nella Tav. 5ª, Fig. II.

I visceri ipocondriaci non sono doppi, cioè havvi un solo fegato, ed una sola milza, questa assai piccola, l' altro piuttosto voluminoso, di forma quadrilungo avente una sola cistifelea, e dai due rami della porta epatica partono due dotti venosi d' Aranzio, che ognuno si dirige al corrispondente cuore, il condotto coledoco metteva foce nell' intestino appartenente allo stomaco destro.

Il pancreas era pur esso semplice, due i reni, polilobati, da ognuno dei quali partiva un uretere, che terminavano in una vescica piuttosto piccola.

Nella cavità toracica eranvi quattro polmoni non di eguale grandezza, essendo gli esterni più voluminosi degli interni.

Angiologia.

Nel mediastino anteriore, avvilupati da un sol pericardio, trovavansi due cuori riuniti insieme da un istmo mediano. Esaminate le loro cavità, ho trovato che erano eguali a quelle di un feto normale a termine, e che quell' istmo che li riuniva altro non era che un canale che partiva dal seno venoso destro di un cuore, e terminava al seno venoso destro dell' altro cuore. Dal ventricolo sinistro dei due cuori partono due arterie Aorte, i di cui archi convergono verso la linea mediana del tronco, come osservai nella Fig. 1ª, Tav. VI, ove si riuniscono insieme per formare un' unica aorta discendente.

Le varietà che presenta il sistema dell' arteria Aorta discendente sono le seguenti, e cioè: nell' Aorta addominale trovansi due celiache, ognuna delle quali si divide in due rami; i rami della celiaca destra sono, la coronaria stomatica per lo stomaco destro e l' arteria epatica, i rami della celiaca sinistra sono, la

coronaria stomatica per lo stomaco sinistro e l' arteria splenica; trovansi pure doppie le arterie mesenteriche superiori, e che l' arteria mesenterica inferiore si distribuisce semplicemente all' intestino proveniente dallo stomaco sinistro.

Nella regione addominale l' Aorta trovasi in mezzo a due vene cave ascendenti, la vena che è al lato sinistro dell' arteria è molto più sottile dell' altra, e che prima di arrivare al diaframma la vena sinistra passa dietro l' arteria Aorta per metter foce nella vena destra, e questa dopo avere ricevuta la vena cava sinistra e le vene intercostali inferiori va oltre, attraversa il diaframma non nel centro frenico ma in compagnia dell' arteria Aorta per il *jatus* Aortico; arrivata nel petto non mette foce nella parte inferiore di un seno destro di un cuore, nel modo che sogliono fare le vene cave inferiori, ma come la vena Azigos si getta nel mediastino posteriore per andare alla vena cava superiore del cuore destro.

Le vene cave inferiori vengono perciò solo rappresentate dai due dotti venosi d' Aranzio, i quali, come si è detto parlando del fegato, si recano ciascuno al corrispondente cuore, dopo avere ricevute le vene sopraepatiche, ed attraversato il centro frenico del diaframma.

Nevrologia.

Il centro del sistema nervoso viene rappresentato da due cervelli perfettamente sviluppati, e da due midolle spinali, le quali si riuniscono insieme alla regione lombare, dalla quale unione poi parte un unico legamento cocigeo; se ho detto che i due cervelli sono bene sviluppati, non si può però dire altrettanto delle midolle spinali, in quanto che i solchi che le dividono in due metà, non si trovano precisamente nella linea mediana ma deviano verso la parte interna, per tal disposizione ne risulta, che la metà esterna delle midolle è più sviluppata, della metà interna, e questa diversità di sviluppo si osserva specialmente alla regione dorsale, e lombare, come vedesi nella Tav. VI Fig. 2ª.

Anche i nervi che traggono origine da esse non hanno un eguale sviluppo, gli esterni sono normali, gl' interni invece decrescono in grossezza di mano che si discende verso la regione lombare, la coda equina proviene metà da una, e metà dall' altra midolla, ed il legamento cocigeo dall' unione delle due midolle.

Fra i tronchi nervosi, che meritano di essere citati, sono i due simpatici interni, che insieme si fondono alla base del collo in corrispondenza del ganglio cervicale inferiore, dal qual ganglio partivano poi solo alcuni filetti, che parte si distribuivano ai cuori, gli altri terminavano agl' interni polmoni.

Riguardo poi al modo col quale possono formarsi cotali specie di mostri, moltissime sono state le opinioni, che io non citerò, essendo state con moltissima diligenza raccolte, e compendiate dal Chiarissimo Prof. Cesare Taruffi: mi pare però che non possano essere l' effetto della divisione di un germe semplice, perchè con uno sviluppo così perfetto dei due cervelli, bisogna ben dire che sono due Enti

perfettamente distinti, e che quindi il modo di suo sviluppo deve cercarsi nella dupplicità di un germe, che è quanto dire in un tuorlo con due vescicole; dell' esistenza di queste uova non se ne può dubitare essendo state osservate, dal Coste in un ovo di coniglio, dal Laurent nelle ova di lumaca, dal Thomson nelle ova di gatto, dal Calori in un ovo di anitra; dal Serres, e dal Panum in un ovo di gallina.

Queste ova possono ben considerarsi come due, perchè abbiamo due sostanze germinali in mezzo a due materiali formati, che per la gran vicinanza che si trovano si sono fusi in un unico protoplasma.

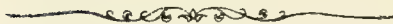
Dalla segmentazione delle due vescicole cominciano a svilupparsi due esseri, che originariamente debbono essere distinti, e che in causa della fusione dei tuorli, molte parti nello svilupparsi giungono a toccarsi, quindi debbono rimanere insieme fuse. Se poi uno chiedesse : tutte le ova a due vescicole una volta fecondate debbono necessariamente dar luogo ad un mostro doppio ? a me pare che no, perchè, può essere che rimanga fecondata una sola vescicola, e l' altra no. In allora si svilupperà un feto semplice, essendo una vescicola sola rimasta fecondata, quindi concludo; acciocchè avvenga la formazione di un feto doppio mostruoso, essere necessario che vi sia un tuorlo con due vescicole, e che queste vescicole rimangano tutte e due fecondate.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Fig. 1ª — Veduta anteriore del mostro.
Fig. 2ª — Veduta posteriore del mostro.

Tavola II.

Fig. 1ª — *a*, Porzione cervicale della colonna vertebrale del feto *A*, composta di sole cinque vertebre.
b, Porzione cervicale della colonna vertebrale del feto *B*, composta di 7 vertebre.
c, Rudimenti di costole, che riuniscono le due colonne alla regione dorsale.
e, Appendice episternale, rappresentante le clavicole interne dei due feti.
d, Porzione lombare delle colonne vertebrali riunite per sincondrosi.
f, Osso sacro, ove si veggono i due primi pezzi doppi, laddove gli altri tre sono semplici.
Fig. 2ª — *a, b, c, d, f*, Le stesse parti osservate posteriormente.
Fig. 3ª — Rappresenta l'Appendice episternale.
Fig. 4ª Rappresenta quel rudimento di scapole al quale s' attaccavano i soli muscoli angolari interni.

Tavola III.

Fig. 1ª — *a, a,* Muscoli cucullari interni.
b, Rafe tendineo al quale si dirigono le fibre dei due detti muscoli provenienti dal cranio e dalle regione cervicali.
c, Fibre dei cucullari provenienti dalle apofisi spinose dorsali.
d, Striscia aponeurotica a forma di V separante le fibre inferiori dalle superiori dei cucullari.
e, e, Cucullari esterni.
f, muscoli splenio.

Fig. 2ª — *a,* Muscolo sternocleidomastoideo esterno.
b, Muscolo omoplato joideo.
c, Muscolo sterno tiroideo esterno.
d, Musculo sterno joideo esterno.
e, Sterno joideo interno.
f, Sternocleidomastoideo interno.
g, Fibre superiori dei cucullari interni.
h, Timo.

Tavola IV.

Fig. 1ª — *a,* Muscolo splenio interno.
b, Muscolo angolare interno.
c, Muscolo splenio esterno.
d, Muscolo angolare esterno.
e, Muscoli romboidei.
Fig. 2ª — *a,* Muscolo gran complesso interno.
b, Muscolo sacrolombare interno.
c, Muscolo gran complesso esterno.
d, Muscolo sacrolombare esterno.

Tavola V.

Fig. 1ª — *a,* Porzione cervicale del gran simpatico interno.
b, Ganglio cervicale inferiore del gran simpatico interno, nel quale si uniscono i simpatici dei due feti.
c, c, Archi dell' arteria Aorta.
d, d, Arterie carotidi primitive.
e, Arteria subclavia.
f, Corpo tiroide.
g, Aspera arteria.
h, Seno venoso destro del cuore.
i, Ventricolo destro del cuore.
l, Istmo che unisce i due cuori.
m, Fegato.
n, Pericardio.
o, o, Polmoni.
p, Legamento rotondo del fegato.
q, Intestino cieco.
r, Arterie ombellicali.
s, Vescica orinaria.
t, t, Nervi vaghi.

F. 1.

A B

F. 2.

B A

C. Bettini dis.°

Lit. G. Wenk

C. Bettini dis.°

Lit. G. Wenk

F. 1.

F. 2.

C. Bettini dis.°

Lit. G. Wenk

F. 1.

b
a
c
d
e

F. 2.

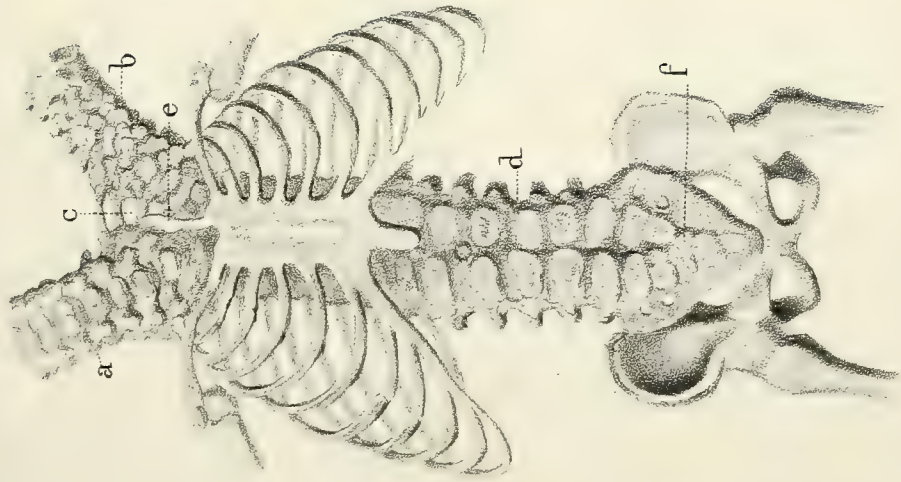
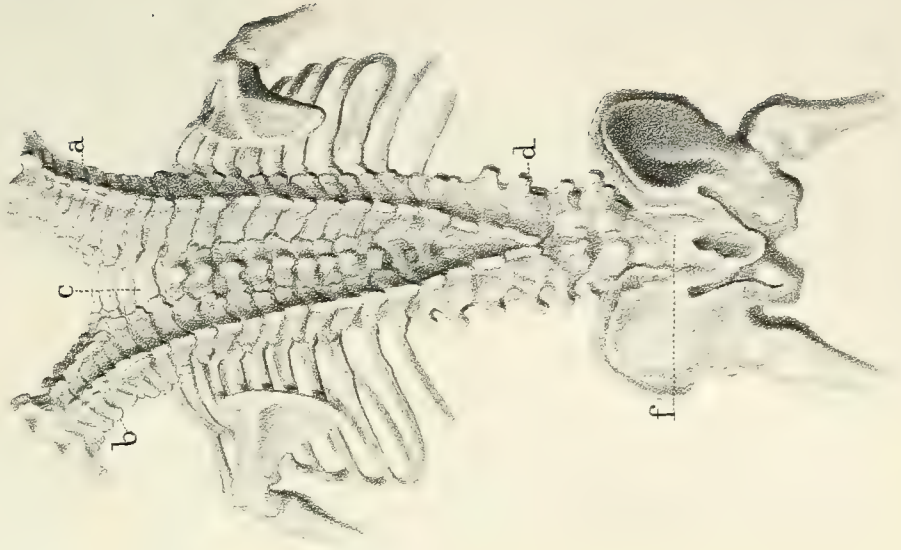
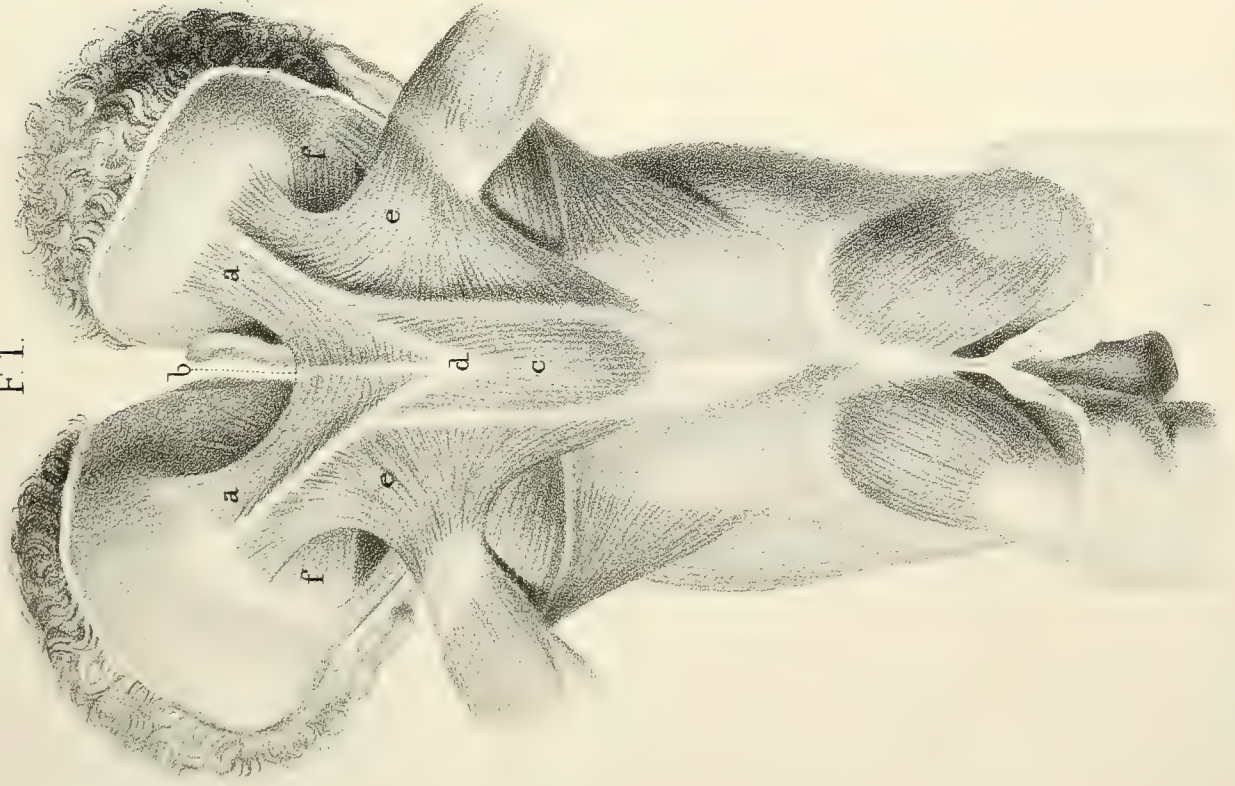
a
c
b
d

C. Bettini dis.° Lit. G. Wenk.

F. 1.
F. 2.
C. Bettini dis.°
Lit. C. Wenk

F. 1.

F. 2.

C. Bettini dis.°

Lit. G. Wenk.

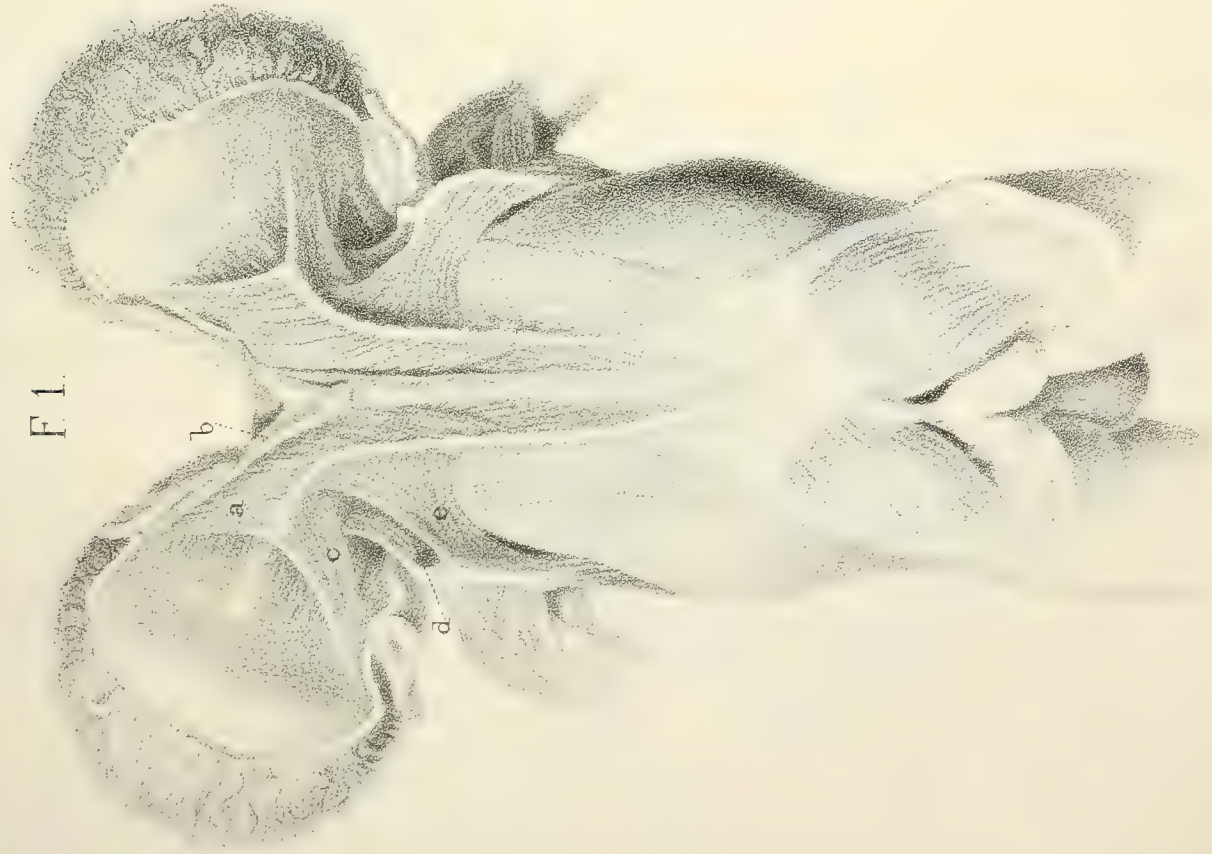
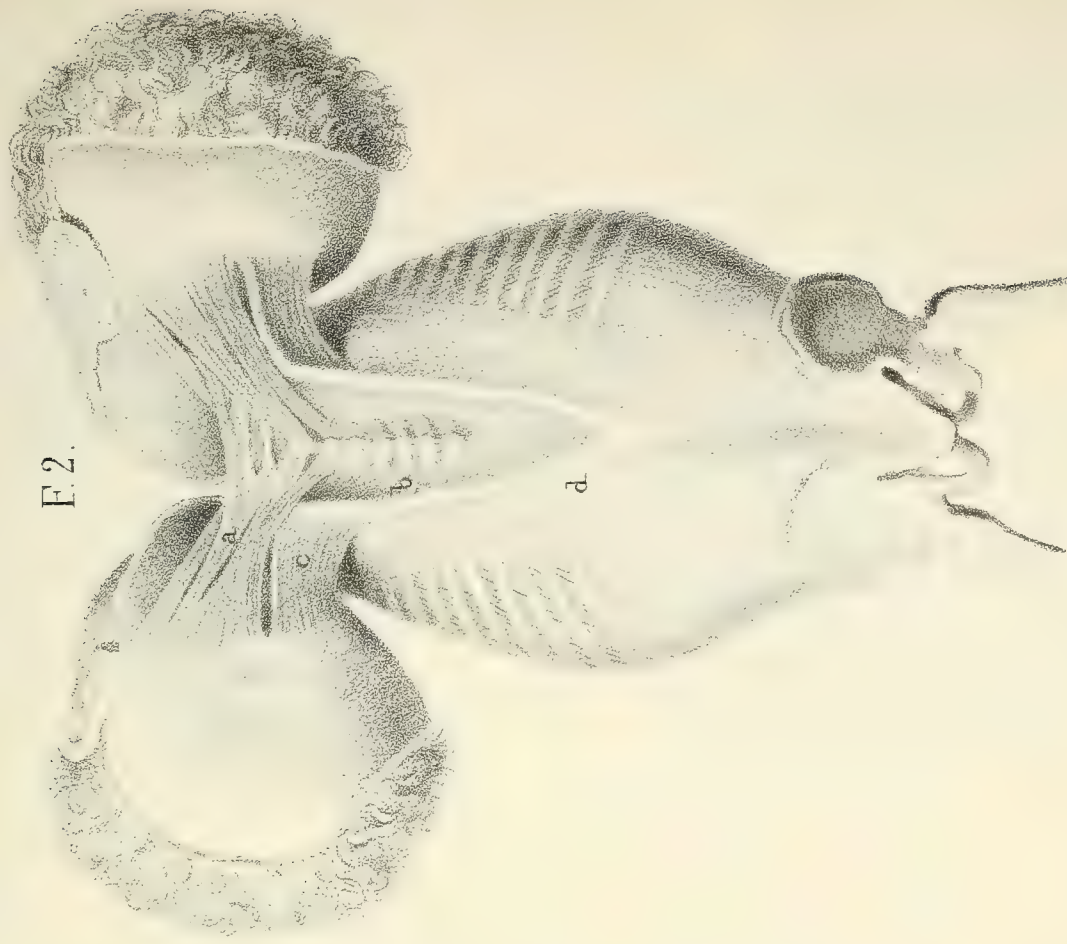
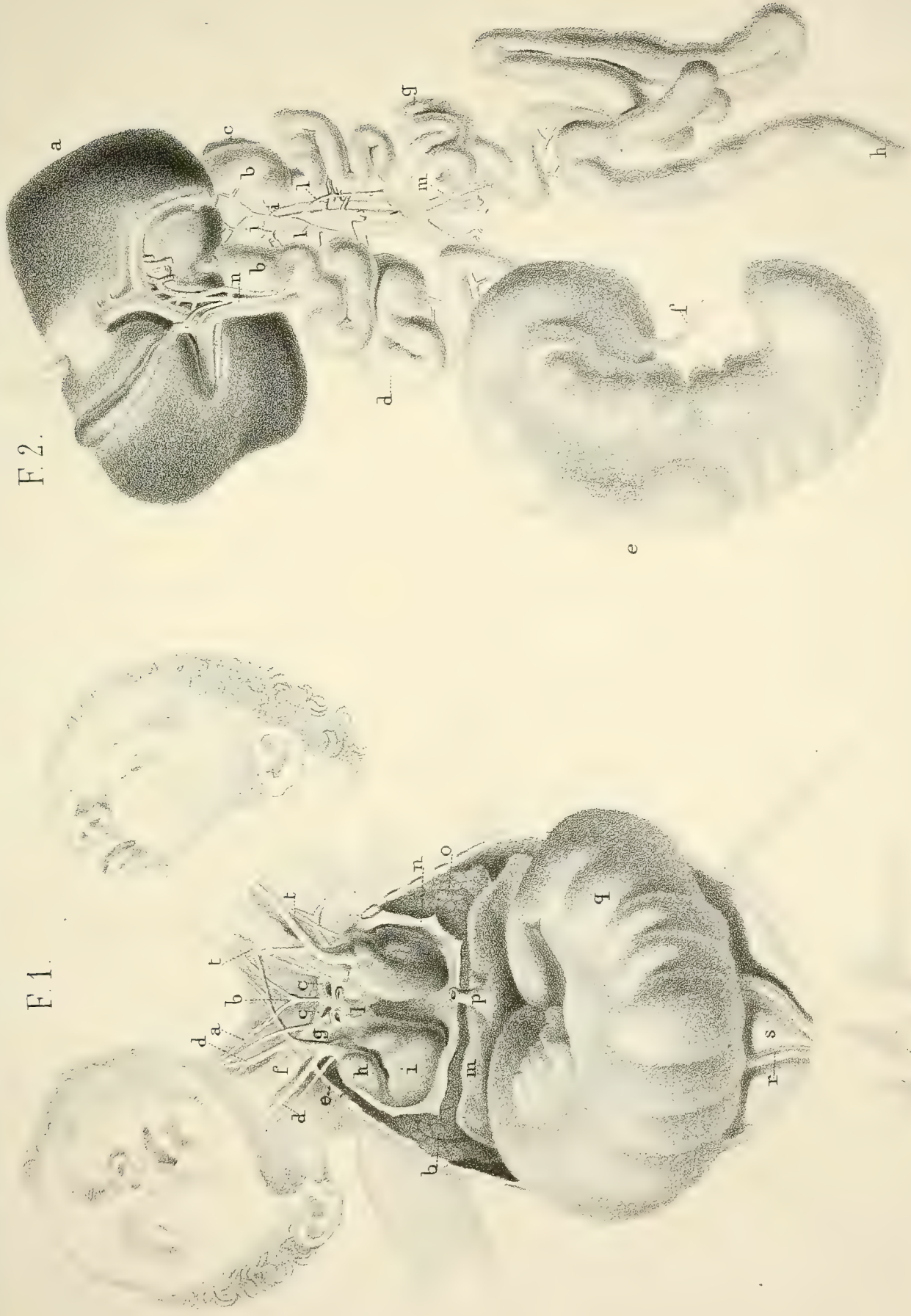
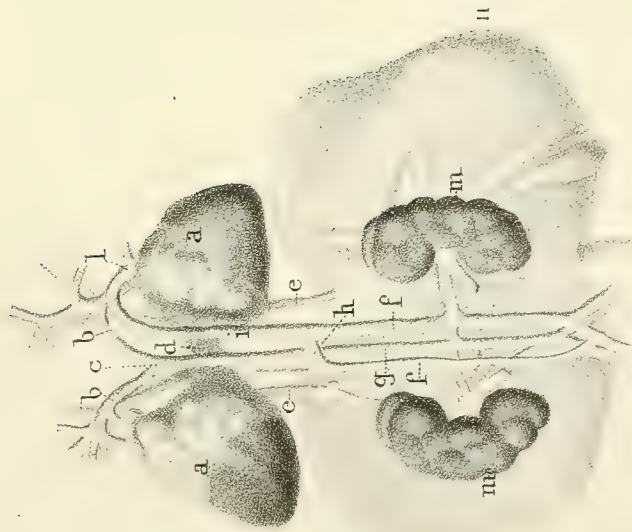



Fig. 2ª — *a*, Fegato.

b, b, Stomachi.

c, Milza.

d, Intestino proveniente dallo stomaco destro.

e, Intestino cieco.

f, Appendice vermiforme.

g, Intestino proveniente dallo stomaco sinistro.

h, Sua terminazione all' orifizio anale.

i, i, Arterie celiache.

l, l, Arterie mesenteriche superiori.

m, Arteria mesenterica inferiore.

n, Condotto coledoco.

Tavola VI.

Fig. 1ª — *a, a,* Cuori.

b, b, Archi dell' arteria Aorta.

c, Loro unione per formare l' Aorta discendente.

d, Istmo che congiunge i due cuori.

e, e, Dotti venosi d'Aranzio.

f, f, Vene cave inferiori.

g, Aorta addominale.

h, Punto d' Unione delle due vene cave inferiori.

i, Continuazione della vena cava inferiore nella vena Azigos.

l, Sbocco della vena Azigos nella cava superiore del cuore destro.

m, m, Reni.

n, Fegato.

Fig. 2ª — *a, a,* Midolle spinali.

b, b, Bulbi cervicali.

c, *c,* Bulbi lombari.

d, Punto d' unione delle due midolle.

e, Legamento cocigeo.

f, Metà destra della coda equina derivante dal midollo destro.

g, Metà sinistra della coda equina derivante dalla midolla sinistra.

h, Parte interna delle due midolle in cui si veggono atrofiche le origini dei nervi.

NUOVI STUDI

SULLA POLIGENESI NEI MINERALI

MEMORIA

DEL PROF. LUIGI BOMBICCI

(Letta il 15 Maggio 1879 e il 12 Febbraio 1880)

PARTE I.

Sommario — Considerazioni sui cambiamenti di stato fisico dei corpi — Il gas perfetto, o reale, e il gas apparente — La liquefazione dei gas già detti permanenti; deduzioni stabilite dal Pictet — Il vapore saturo; liquidità con apparenza gassosa; esperienza di Donny — Il liquido fisicamente considerato e le false solidità di corpi duri, o resistenti — Le liquidità con apparenza di stato solido — Le solidità con apparenza di stato liquido — Le istantanee condensazioni e le cristallizzazioni rapidissime paragonate ai fenomeni esplosivi. — Il solido reale, perfetto, e la vera solidificazione — Le forme tipiche dell' acqua cristallizzata — Le forme sferoedriche nella cristallizzazione; il vetro e i suoi cristalli — La grandine; le sue modalità caratteristiche e le loro analogie con altre di diverse sostanze minerali — La pseudo-cubicità — La singolare configurazione verticillata a forma di grandi rose, delle lamine cristalline di neve; teoria della loro generazione.

Proseguendo ad occuparmi della costituzione poligenica, che sempre più chiara e frequente si offre nei minerali cristallizzati, e che da qualche anno è implicitamente ammessa nelle loro descrizioni da distintissimi mineralisti, mi sono prefisso di continuare diverse esperienze, da coordinarsi ai dati più certi sulla teoria dei passaggi di stato fisico della materia ponderabile.

La formazione delle PARTICELLE FISICHE CRISTALLINE, ELEMENTARI; vale a dire, delle primordiali individualità *necessarie per la generazione dei cristalli propriamente detti*, è uno dei più elevati termini nella serie di quei passaggi; ed è appunto per servire alla sua storia che ho dato opera a tale lavoro.

Ritengo che i cambiamenti di stato fisico apparentemente graduati, tanto da simulare una vera continuità nel progredire dal gas perfetto al solido assoluto,

sieno in determinato numero, e *precisati nelle loro condizioni fisiche e meccaniche;* e che compongano una progressione a *termini di carattere sintetico crescente.*

In siffatta progressione, dall' atomo libero nei gas perfetti, si passerebbe per distinti stadî, fisicamente caratterizzati, a quello fra tutti maggiormente complesso, cioè allo stato di poligenìa cristallina, rappresentato da poliedri solidi, composti di molecole chimiche differenti, e permanenti colle singole e rispettive loro individualità.

Temo troppo deboli le mie forze per un siffatto scopo, sebbene io mi senta aiutato dagli studî comparativi che potei seguitare sulle pubblicazioni recenti e contemporanee di cristallografia fisica e di fisica molecolare; temo che le stesse mie ricerche sperimentali, pur troppo ripetutamente sospese per circostanze cui dovetti sottomettere la mia volontà, non valgano per anco a far parere in ogni sua parte buona la classificazione che più avanti trascrivo; ma nondimeno insisto su tale argomento, elevato, vasto e difficile, perchè connettesi intimamente con quello della costituzione multipla o POLIGENICA di tante e tante sostanze minerali cristalline; e perchè indubitatamente interviene nelle spiegazioni che già si tentano di quelle singolarità, di quelle anomalie, che i cristalli di molte specie diverse presentano. Una serie viecrescente di studî speciali, ed un nuovo indirizzo di osservazioni e di esperienze sulla struttura dei cristalli è difatti il portato odierno di cotali studî.

Inoltre, alcune interessantissime e molto recenti pubblicazioni (*) le quali appunto esaminano e descrivono quelle anomalie, queste osservazioni e queste esperienze, comprendono tanti e così decisivi argomenti per la conferma definitiva di una idea che ormai da sedici anni propugno; l' idea cioè dell' *aggregazione regolare, cristallogenica, di gruppi molecolari,* CHIMICAMENTE DIVERSI, *nelle specie minerali di natura complessa;* e vi si leggono frasi che tanto somigliano, sebbene dettate per altre ragioni e con altro idioma, a quelle che ho pensate, adottate e pubblicate in proposito, nei miei scritti consecutivi, che mi pare conveniente di approfittare di tali condizioni di fatto a vantaggio di quella stessa idea e della generalizzazione che ne dipende; resterà, se non altro, sicuramente dimostrato che essa non è base di teorie personali, ma il puro e semplice riassunto, in una frase sintetica, di tutti quelli enunciati dei fenomeni di cristallochimica, che nelle opere di tutti i più sapienti ed illustri fisici e chimici, che si occuparono dei cristalli, ripetutamente si registrarono.

Non dirò con quanta compiacenza io segua lo svolgimento razionale e sperimentale di un così semplice concetto, e così propizio alla spiegazione di ogni ano-

(*) H. DUFET. Sur l' isomorphisme — Variation des indices de réfraction dans des mélanges de sels isomorphes, etc.

E. MALLARD. Sur les propriétés optiques des mélanges des substances isomorphes et sur les anomalies optiques des cristaux.

G. WYROUBOFF. Contribution á l' étude de l' isomorphisme chimique, géometrique et optique. — Remarques á propos des proprietés optiques des mélanges isomorphes.

malia nella costituzione dei cristalli, quale è il concetto dell' *associazione poligenica delle particelle fisiche, chimicamente diverse.*

Nemmeno mi occuperò deliberatamente di rivendicarne adesso la priorità. In alcune pubblicazioni straniere, posteriori al 1877, può leggersi affermato o supposto ciò che supposi od affermai, fino dal 1862, e che negli anni successivi sostenni con diverse e bene accolte Memorie. (*)

Al mio amor proprio può bastare che tale fatto sussista. Al mio vivissimo amore per la Mineralogia basta che la dottrina della sintesi molecolare cristallogenica riceva impulso, incremento, completamento. — Se per la mite opera mia, o per quella vigorosa ed efficace di altri, poco importa.

Non potei finora attivare che una parte del prefissomi programma; la presente Memoria non contiene quindi, se non i primi capitoli del lavoro in corso.

La serie progressiva degli stati fisici della materia.

Ecco la classificazione cui feci allusione poc' anzi, e che già fu esposta come nota finale in una mia precedente pubblicazione. (**)

1° Gas perfetto — Atomi, o molecole chimiche, in istato di libertà. I limiti teorici di un gas perfetto sono quelli entro i quali esso obbedisce alle leggi di Mariotte e di Gaylussac.

2° Gas apparente — Stato speciale indotto da pressioni o da abbassamenti di temperatura, e consistente nel *predisporsi delle molecole proprie del gas perfetto, verso lo stato di liquidità.*

Il gas apparente non obbedisce alle citate leggi essendo già fisicamente modificato nella sua costituzione, e corrispondendo virtualmente allo stato imminente di liquido.

3° Vapore saturo — Stato di libertà che perdura nelle particelle *che già si condensarono in istato di liquidità,* ma che il calore può mantenere disgiunte, a distanza.

4° Liquidità perfetta — Risultato normale dell' adunamento definitivo delle particelle di liquidità, in una massa *apparentemente continua, e minimamente compressibile.*

(*) Nel 1867 colla Memoria sulla classazione dei solfuri minerali e che ripetei talvolta nelle Memorie presentate consecutivamente nel 1868 (sui silicati minerali); nel 1870 (i fosfati ed arseniati minerali); nel 1875 (corso di Mineralogia generale); nel 1876 (sulle influenze reciprocamente orientatrici nei cristalli isomorfi); finalmente nel 1877 (nelle considerazioni critiche di cristallografia teorica).

(**) Considerazioni critiche sopra alcuni recentissimi scritti di cristallografia. Bologna 1878.

5° Liquidità reale con apparenza di solidità — Caso particolare dello stato liquido; deriva dall' inspessimento, dalla variabile rigidità che può essere indotta in un liquido *dal viecrescente avvicinarsi delle particelle*, e da considerevoli energìe di coesione, per effetto del raffreddamento.

6° Solidità imperfetta — Sta al liquido, ed al solido perfetto, come il vapore sta al gas ed al liquido. Ne danno esempio le soluzioni *supersature* e le masse *superfuse*. — Deriva *dal primo originarsi degli aggruppamenti di reale solidità.*

7° Solidità perfetta — Assettamento definitivo, cristallogenico, *in un sistema rigido e regolare*, delle particelle fisiche di solidità.

8° Allotropia, Isomeria e Polimorfismo nei solidi — Stati speciali, dovuti al diverso assettamento di atomi o di molecole, nelle particelle fisiche. Sono individuati dal rispettivo calorico specifico, nelle molecole; dal rispettivo calorico di costituzione strutturale, nelle particelle cristalline elementari.

9° Solidità poligenica — Dipende nella sua più completa e determinabile condizione dal comporsi che fanno in *sistemi regolari*, *reticolari*, *cristallogenici*, le particelle fisiche elementari, ma differenti fra loro per la chimica loro costituzione. Vi si comprendono numerosissimi casi speciali.

Le Anomalie che ci presentano i cristalli delle sostanze minerali, dove la poligenia strutturale può in varia misura realizzarsi, dipendono in generale da questo stesso fenomeno.

1. Gas perfetto.

Ho sempre condivisa l' opinione per la quale in un gas perfetto sarebbero in istato di isolamento e di libera vibrazione, (probabilmente rotatoria) gli atomi, ovvero le molecole che sono direttamente generate dalle loro combinazioni.

Il recente risultato della liquefazione dei gas che già si definivano come incoercibili o permanenti, ottenutosi da Cailletet e da Pictet, chiaramente dimostra che anche nei gas perfetti gli atomi sono soggetti alla coesione, e che per essi pure riesce applicabile la legge universale della gravitazione.

Colla parola atomo, astraendomi da qualunque ipotesi finora proposta, indico semplicemente quelle minime quantità di sostanza eterea, *condensata*, i cui pesi relativi, l'idrogeno puro preso come unità, sono esprimibili con numeri intieri e costanti; e delle quali debbono potersi analogamente esprimere con numeri esatti il calorico specifico e l' energia potenziale per le combinazioni reciproche definite.

Chiamo molecola chimica, unicamente il prodotto immediato, perfettamente definito, sempre identico se costituitosi in eguali condizioni, della combinazione reciproca di due o più atomi differenti.

Distinguo poi col nome di particelle fisiche (proposto fino dal 1862 ed og-

gidì usitatissimo nel medesimo senso che gli diedi), gli adunamenti meccanici o sistemi equilibrati di molecole chimiche. Per la formazione di tali individualità materiali, che a partire dalle reazioni generatrici di molecole chimiche, e dallo stato fisico dei gas perfetti, sono le sole e vere entità efficienti di ogni manifestazione materiale, e di ogni fenomeno inerente al cosmos che ci circonda, *non intervengono reazioni o scomposizioni chimiche* propriamente dette. Sono i diversi portati di diversi modi di adunamento e di equilibrio, fra masse permanenti colle loro qualità essenziali.

I cambiamenti di stato fisico non dipendono soltanto dal variare delle distanze intermolecolari, delle intensità di movimento vibratorio inerente agli atomi, e reso sensibile da talune fisiche proprietà delle masse; ma consistono essenzialmente *nel vario modo di adunamento delle molecole nelle particelle fisiche;* dipendono dall'ordine, o grado sintetico di queste; dalla disposizione che, a parità di numero, le molecole possono assumere in cadauna particella, in correlazione collo stato termodinamico sussistente; dipendono, altresì, dalla possibilità che molecole *di diversa natura chimica;* particelle *di diversa composizione e di differente struttura*, possano concorrere, solidali e simultanee, nella costruzione di masse uniformemente caratterizzate da speciali qualità.

Ammetto che nei gas perfetti, cui riesce applicabile l'ipotesi di Avogadro, purchè sieno eliminate le cause perturbatrici possibili, si verifichi esattamente, e in modo assoluto, tanto la legge di Mariotte, quanto la legge di Gay-lussac.

È noto come già da parecchi anni si sia sperimentalmente trovata la spiegazione della massima anomalia che avrebbe implicato una gravissima eccezione, per la ipotesi di Avogadro, applicata ai gas, in generale. Il vapore di cloruro di ammonio (non giustamente messo a livello dei veri gas), dava un volume doppio di quello previsto dalla teoria. Ma dopo le ripetute ricerche di chimici eminenti si finì col dimostrare all'evidenza che quel composto sdoppiavasi alle alte temperature in due gas distinti; il gas cloridrico, ed il gas ammoniaco; ciascuno dei quali realizzando il volume ammesso dalla teoria di Avogadro, ne dava piena e luminosa conferma.

Debbono perciò escludersi da ogni ricerca e da ogni discussione, per verificare le leggi che riguardano i gas propriamenti detti, tutti quei vapori dissociabili, miscugli di vapori, di vapori e di gas, il cui stato fisico variando alle alte temperature conduce a risultati naturalmente inapplicabili ai gas puri.

Sarebbe cosa strana e inesplicabile se quelle modalità anormali si offrissero alla loro volta esattamente obbedienti alle leggi sopra ricordate.

Risulta da ogni esperienza finora tentata per la liquefazione dei gas meno coercibili che la sola pressione, per quanto enorme, (fino a 3000 atmosfere), non vale a produrre quel cambiamento di stato. Un tal fatto, nell'ordine d'idee che pre-

sento, è ammissibile *a priori*. Non basta che le molecole *si avvicinino* perchè la massa muti di stato fisico; è indispensabile che *si adunino* in sistemi speciali; ora la pressione, per quanto gagliarda essa sia, non rappresenta che una forza *avvicinatrice* delle molecole; ma se facciasi concorrere il raffreddamento, cioè la più sicura espressione di una azione *adunatrice* o *assettatrice* delle molecole istesse, si ottiene il pieno effetto, e si produce lo splendido risultato della liquefazione di qualsiasi gas conosciuto.

Tuttavia, quel fatto, non suole interpretarsi così.

Il Pictet, nella sua Memoria sulla liquefazione dell' ossigeno (*), tratta diffusamente le teorie dei cangiamenti di stato, nei corpi. Egli consacra tutto un capitolo alle generali considerazioni sulle leggi fisiche relative a questi fenomeni, che discute diffusamente.

L' illustre Autore fonda le proprie conclusioni sulla teoria meccanica del calore, valendosene „ per ispiegare alquanti fenomeni anomali, o che sembrano tali, e in apparente contraddizione sia colle leggi generali della fisica, sia colla teoria di Clausius, e ricondurli per via sperimentale a fenomeni della stessa natura, non adducenti ad alcuna eccezione alle leggi precitate „.

Egli stabilisce come conclusione delle sue generalità, e come dato pratico essenziale nella liquefazione dei gas, *il differente modo di azione* che su di questi esercitano la PRESSIONE e il RAFFREDDAMENTO. Stabilisce la necessità del loro simultaneo intervento acciocchè l' uno completi l' azione dell' altra; senza di che rimane impossibile la liquefazione dei gas detti già permanenti.

Malgrado il chiaro significato di tali conclusioni, anche in questa dotta Memoria si ravvisano i cangiamenti di stato fisico come devoluti unicamente alle grandezze delle distanze fra le molecole costituenti le masse che li presentano, senza che nella teoria dell' illustre fisico di Ginevra apparisca la traccia del concetto degli assettamenti molecolari di liquefazione, concetto indispensabile per la spiegazione dei fenomeni di cui è parola.

Ammettesi dal Pictet come limite di compressibilità di un gas, *limite insuperabile*, quello nel quale la curva di cui le ascisse rappresentassero i volumi compressi, e le ordinate le pressioni corrispondenti, divenisse asintotica rispetto all' ordinata verticale; e questo limite si raggiungerebbe, secondo l' Autore, quando *col solo fatto della compressione si conducessero le molecole del gas al contatto assoluto; all' annullamento degli spazi intermolecolari.*

Egli osserva, tuttavia, che se ciò fosse realizzabile, *la generalità della coesione* ne rimarrebbe seriamente infirmata.

Or bene! Invece di dubitare della generalità della coesione, che è quanto dire della gravitazione universale, della ragione massima di ciò che diciamo MATERIA

(*) Annales de Chimie et Physique. T. XIII. Fevr. 1878.

sensibile; invece di astrarsi nelle idealità di un gas colle proprie molecole ridotte al contatto assoluto, e che malgrado questo contatto, inconcepibile e irrealizzabile nelle più condensate solidità, malgrado l' inerzia conseguente, manterrebbe le sue qualità di fluido elastico aeriforme, pensiamo che la coesione sussiste sempre fra le molecole dei gas, e che in essa appunto risiede la ragione vera degli „ écarts de la loi de Mariotte „ anzichè, come vorrebbe il lodato Autore „ dans le volume matériel des molecules, et des atomes, dans leur épaisseur on leur diametre. „ Troveremo allora che la più semplice e naturale spiegazione sta nelle tendenze di esse molecole, eccitate dalle energie di compressione e dai disequilibri termici, a comporre, attraendosi, speciali aggruppamenti, caratteristici del nuovo stato fisico che si fa imminente, quello cioè della liquefazione definitiva.

Tenendo conto di quelli aggruppamenti *nelle teorie* di quest' ordine, darebbesi luogo implicitamente alla spiegazione dell' esistenza di vapori con ineguale coefficiente dilatazione; di vapori otticamente attivi, mentre i più sono inerti; di vapori variamente colorati e di miscugli di vapori, nei quali ciascuno sussiste come se gli altri non fossero presenti colle loro masse e i loro movimenti. Si eviterebbe, altresì, di dire, con erroneità deplorabile, e talvolta insistendovi come su di un dato certissimo, che nella condensazione dei vapori „ il solo elemento variabile è la potenza della coesione, seconda la loro intima natura „ ; quasi che il modo di reciproca disposizione delle molecole e la struttura fisica non ne fossero principali elementi di variabilità.

2. Gas imperfetto o apparente.

Rappresenta nel mio punto di vista uno stato intermedio del gas perfetto, che raggiunse per via di pressione e di raffreddamento un *maximum* di densità, verso lo stato liquido assoluto.

Esso sarebbe quasi una liquidità virtualmente prodotta; una liquidità nella quale la forza di adunamento delle molecole in sistemi sferici definitivi sussiste già allo stato potenziale, pronta a palesarsi effettivamente se la diminuzione di calore, o l' aumento di pressione si accrescano ulteriormente.

Potrebbe dirsi: *stato pseudo-gassoso.*

Confuso collo stato di gas, propriamente detto, fece giudicare come leggi *limiti*, le leggi di Mariotte e di Gaylussac. Confuso colle stato di vapore, fece ammettere una continuata transizione fra vapore e gas, e l' impossibilità di distinguere nitidamente queste due diverse condizioni fisiche della fluidità elastica della materia.

La fisica sperimentale non potè pronunziarsi ancora circa la intima costituzione dei gas; e vi resta tuttodì dubbiosa la rigorosa distinzione dei gas dai vapori.

Per mio conto ritengo almeno probabilissimo che nei gas sieno libere le molecole primordiali della materia sensibile, immediatamente costituitesi nelle chimiche reazioni; e che, nei vapori, non si abbiano che liquidità rarefatte: e che, nel maggior numero dei casi, le esperienze si instituiscano sopra miscugli, talvolta nemmen

sospettati, di queste rarefazioni con i veri gas, della stessa o diversa chimica natura; ravviso nel gas imperfetto, (o stato *pseudo-gassoso)*, il predisporsi della genesi delle sferule di liquidità. Se queste, dal momento in cui può effettuarsene la reale costituzione per crescente pressione, o per decrescente temperatura, si vanno diffondendo nel gas ancora perdurante vi divengono le cause perturbatrici principali, le ragioni più potenti delle divergenze che si osservano nelle sue proprietà dalle leggi rispettive.

Per tal modo di vedere, in questo stato fisico, si avrebbero le apparenti modalità dei corpi gassosi, ma non le fisiche caratteristiche dei gas perfetti, obbedienti alle leggi di Mariotte e di Gaylussac.

3. Vapore saturo.

Considero come — *vapore propriamente detto* —, lo stato di libertà o di libera oscillazione delle *sferule di liquidità.*

Ne consegue la modalità, vorrei dire la imitazione, di un fluido elastico, le cui proprietà possono rassomigliare a quelle di un vero gas, come le vibrazioni sonore possono sotto certi aspetti rassomigliare a quelle della luce.

Le distanze di quelle sferule, (densità della massa), sono direttamente proporzionali, come nei gas perfetti, ed altresì, come nei liquidi, e nei solidi omogenei isotropici, alla temperatura; ciò fino al limite dello *scindersi delle loro sferule* nelle molecole, o negli atomi componenti (ritorno allo stato vero di gas); sono inversamente proporzionali alla pressione, fino al limite dell' *adunarsi delle loro particelle costituenti* in masse dotate di minima compressibilità (liquefazione completa).

Questo stato elastico della materia obbedisce alla legge di Dalton.

Differisce dunque morfologicamente, fisicamente, da quello dei gas perfetti. Le graduate transizioni fra i vapori e i gas comunemente considerati; e le promiscuità di caratteri che fecero e fanno ancora ritenere dai fisici che null' altra diversità sussista fra quelle due condizioni, naturalmente dipendono dalla comune e quasi inevitabile mescolanza reciproca di esse, in proporzioni sommamente variabili.

Ne restano dissimulate o offuscate le qualità intrinseche di ciascuno dei due stati distinti.

In seguito a tali idee mi par logico il rappresentarmi il fenomeno della evaporazione spontanea dei liquidi come l' effetto semplicissimo del dipartirsi che fanno, dalla superficie di un liquido le particelle *pur liquide*, il cui movimento di vibrazione rotatoria, e la forza centrifuga che vi si connette, non è sufficientemente neutralizzato o compensato dalla coesione; in qualunque punto interno di una massa liquida, una particella che vi si consideri è completamente circondata da altre colle quali si tiene in equilibrio, sebbene instabile, di coesione molecolare reciproca; ed è uniformemente sottoposta alle pressioni sfericamente convergenti della gravità. Ma alla superficie, in ciascun punto una data particella sferica può

e deve vibrare per rotazione frenata in ben diversa misura dall' attrito colle particelle liquide sottostanti, e colle gassose dell' atmosfera ambiente; essa deve tendere perciò a slanciarsi in tale atmosfera (tanto più energicamente quanto minore ne sia la pressione barometrica), sviluppando l' effetto della forza centrifuga sulle particelle della massa liquida che immediatamente vi sottostanno.

Il liquido si vaporizza; ossia si *rarefà*; non si gassifica. Tanto è vero che ne restano saturi i soli strati dell' atmosfera ambiente che sovraincombono alla massa liquida dove avviene il fenomeno; ciò che contrasta colla proprietà dei veri gas di una espansibilità illimitata.

Si ha abbassamento di temperatura perchè avviene una rarefazione localizzata, una diminuzione di attrito; un assorbimento di calore che si trasforma in maggiore energìa di moto rotatorio nelle particelle che divengono libere.

Evidentemente, possono avverarsi dei gradi di coesione o di vera VISCOSITÀ, in certi liquidi (v. pag. seguenti), tali da impedire il fenomeno di cui è parola, almeno nelle ordinarie condizioni; ed infatti non si hanno vapori propriamente detti, di spontanea formazione dagli olii per es. di oliva, di arachide, di colza ecc., e molto meno se ne hanno i gas rispettivi.

Nell' ebollizione si ha l' effettivo disfacimento delle particelle liquide, in sistemi più semplici, o in vere molecole gassose. È perciò un fenomeno molecolare che muta lo stato fisico delle masse liquide; è un fenomeno che non può compiersi mercè le sole forze attive inerenti alla condizione statica di un liquido propriamente detto; che richiede l' intervento di una energia intrinseca, l' energia del calore; che non può prodursi che a un dato grado di temperatura, soltanto variabile al variare della pressione incombente, ossia della resistenza opposta dal mezzo ambiente, per ciascuna particella liquida, al necessario dilatarsi delle molecole componenti fino al ridursi oltre il limite della loro coesione reciproca, a quella temperatura data.

L' evaporazione avviene anche a bassissime temperature. L' acqua solida, come neve, ghiaccio, dà es. di continua evaporazione, relativa per altro al velo liquido che via via va formandosi alla superficie dei cristalli, se circondati da temperature al di sopra di 0°. L' evaporazione è naturalmente coadiuvata da mutamento (movimento), dell' atmosfera che sovrasta alle superficie liquide, pel sostituirsi di un ambiente non saturo a quello che lo divenne; per l' ebollizione questo è indifferente.

Ebollizione e evaporazione sono due fenomeni differenti per la causa che li determina, per l' effetto che ne consegue.

L' esperienza di Donny (1), che richiamerò più avanti, a proposito di certi fenomeni esplosivi viene in grande appoggio di tali conclusioni se interpretata giustamente. L' acqua che tiene sciolta dell' aria, contiene in certo modo una

(1) Boutan e D' Almeyda 4ª Ediz. pag. 302.

atmosfera latente, pronta a manifestarsi mercè la dilatazione indottavi dal riscaldamento, attorno alle particelle liquide. Queste cominciano dunque a *evaporarsi* in tale atmosfera, che può dirsi il residuo dell' aria che da 60° comincia a sprigionarsi dal liquido; esse pervengono a scindersi a 100°, essendo la pressione barometrica, di $0^{m},760^{mm}$, nelle molecole gassose componenti; le quali solo a quella temperatura possono restare isolate, allo stato elastico o di espansione; l' ebollizione procede nelle note condizioni normali.

Ma se, come avviene nella esperienza di Donny, si sopprime ogni circostanza che favorisca quella scissione definitiva, a 100° essa si dispone egualmente; ma non si rende manifesta con i fenomeni consueti. Le particelle primamente o più direttamente scaldate, a partire dalle pareti del tubo che le contiene, vi pigliano parte, vi si subordinano; ma non essendovi ragione che in un punto qualunque della loro massa, piuttosto che in un altro, si crei una nuova forza impulsiva, eccitatrice di un moto qualsiasi, così tutta la massa resta immobile, sebbene già fisicamente trasformata nella sua intima costituzione molecolare; a 135°, per un inevitabile mutamento nel grado di coesione fra la superficie interna del vetro recipiente (liquido indurato), ed il liquido *apparente* che vi si trova in contatto, viene a prodursi la necessaria causa eccitatrice del definitivo gassificarsi (non dissociarsi) dell' acqua. La gassificazione si compie istantaneamente, perchè predisposta; le pareti del tubo divengono paragonabili alla camera di esplosione di un pezzo di artiglieria; il cilindro liquido che vi è compreso funziona da proiettile; ed è violentemente slanciato all' estremità opposta e dilatata del tubo medesimo.

Dunque il vapore che riempie già il tubo di Donny nello spazio non occupato dall' acqua liquida; e il gas che a 135° si genera con modo esplosivo, sono due distinte modalità di stato fisico. Le esperienze di Dufour (*) confermano pienamente questo modo di spiegazione e il suo diretto corollario; vale a dire che è assolutamente irrazionale il confondere in uno stesso concetto, e ravvisare come uno stesso fenomeno, il *rendersi libere,* in un liquido a qualunque temperatura, alla sua superficie, e in uno spazio che al disopra di questa è limitato dalle condizioni ambienti, delle particelle esse pure di liquidità reale, costituenti il vapore di quel liquido stesso; ed il *disfacimento* di quelle particelle nelle loro molecole costituenti, e inerenti allo stato di gas, per opera di una sorgente calorifica, ad un dato grado di temperatura per una data pressione.

Quel grado può elevarsi in una massa che può sembrare liquida ancora, sebbene già modificata per la gassificazione definitiva, per via di un soprariscaldamento, di una speciale *calefazione;* in seguito di ciò producesi un fenomeno di esplosività, paragonabile a quelli delle supersaturazioni e superfusioni che avrò occasione di richiamare più oltre, ed inverso di quello della istantanea liquefazione di un vapore compresso.

(*) Idem, c. s.

Sarebbe opportuno di toccare, in seguito a queste considerazioni, l' argomento della cristallizzazione attribuita alle SUBLIMAZIONI di materie che si evaporano, e che sono capaci d' assumere forme regolari.

Io credo che se intendesi la generazione dei cristalli data immediatamente dalle molecole di un gas, anzichè da quelle provenienti esclusivamente da una vera liquidità preesistente, come nelle cristallizzazioni per via di soluzioni sature e per via di masse fuse, si abbia un concetto sbagliato di tale interessante fenomeno.

Credo che la cristallizzazione per sublimazione rientri precisamente nei casi ora citati, che dipendono da una sola e medesima causa comune; che sia un vapore costituito di particelle liquide, e prossime alla temperatura di loro reale solidificazione, ciò che genera i cristalli, appena tale temperatura si sia verificata. Ma preferisco di insistere, nelle pagine successive, dicendo della solidificazione reale, cristallogenica, su questo argomento di non lieve importanza nella fisica molecolare.

Noterò piuttosto, come con tali maniere di vedere si faccia assai limpido il concetto di quelle singolari modalità fluide, che non sono veri gas, nè veri vapori, nè liquidi propriamente detti; ma che si denominano stato *vescicolare* od *otricolare, nubi, nebbie* ecc., con espressioni vaghe, e di indeciso significato.

Non pretenderò davvero di spiegare completamente tali stati semifluidi che specialmente l' acqua, il solfo, taluni gas liberati ad un tratto da enormi pressioni, più istruttivamente ci presentano.

Noterò soltanto che nello stato OTRICOLARE O VESCICOLARE potrebbesi ravvisare l' inverso dello stato SFEROIDALE, derivato dai fenomeni di calefazione. In questo, d' attorno di una massa nucleare, liquida, si genera, per rapida evaporazione, una atmosfera elastica di vapore; in quello, tutt' attorno di un' area satura di vapore si forma un velo di liquidità normale, per la coesione fra le particelle libere ed il loro equilibrarsi con equidistanza da un centro attrattivo comune.

Fra queste due modalità, sedi di fenomeni termici molto complessi, la cui risultante sensibile è il considerevole raffreddamento del nucleo liquido nello stato sferoidale, e il progressivo condensarsi del vapore nello stato vescicolare, o il suo risolversi in particelle tutte libere del medesimo vapore, si ha una correlazione di tipo strutturale, con due forme frequenti nella solidificazione dell' acqua liquida in grani di grandine; la forma cioè con nucleo raggiatamente cristallizzato e semidiafano avvolto da una crosta limpida omogenea; e quella con nucleo limpidissimo, chiuso da un involucro cristallino, a struttura pure raggiata. In tali forme, e altre della grandine tornerò a dire nelle seguenti pagine, presentandone una qualche figura.

4. Liquido perfetto.

Si suppongano i liquidi costituiti da particelle fisiche *sferiche;* libere di scivolar le une sulle altre, con facilità pochissimo variabile al variare delle pressioni, molto più variabile pei mutamenti della temperatura.

Accogliendo tale ipotesi come sufficiente per ispiegare le proprietà dei liquidi, statiche e dinamiche, implicitamente i fenomeni di capillarità, di endosmosi, e riguardando le forme sferiche delle goccie liquide scorrenti sui piani che non bagnano, o sospese in seno di altri liquidi nei quali non si diffondono, come espressioni della particella liquida con altissimo coefficiente per la multipla loro costituzione, dirò che si può riguardare lo stato liquido come lo stato di definitivo adunamento delle sferule elementari quali si hanno nel vapore saturo, in sistemi variabilmente multipli di liquidità. La massa ne è minimamente compressibile.

Questa massa può bensì dilatarsi o contrarsi a seconda del segno delle temperature indottevi, in relazione alla temperatura data; fra i limiti termici della sua scissione in sferule elementari, liberamente oscillanti. Le condizioni più note che favoriscono questa scissione sono: la insufficienza di pressione, o la eccessiva tenuità di massa (evaporazione normale), o l' aumento di lavoro interno di scissione molecolare a un dato grado di temperatura (ebollizione).

Qualsiasi grado di pressione, cui venga sottoposto un liquido, non può giungere a solidificarlo.

L' abbassamento di temperatura, invece, può produrne la solidificazione, purchè sufficiente in correspettività del liquido su cui si esperimenta; e data sempre la condizione *sine qua non*, che, cioè, il liquido stesso sia di una sostanza cristalloide, e così suscettibile del reale cangiamento di stato fisico cui vuolsi condurre.

Il liquido perfetto obbedisce alle leggi d' idrostatica e di idrodinamica, le quali restano soltanto dissimulate nei differenti gradi di *viscosità* di cui ciascun liquido è suscettibile.

Tutti distinguiamo, nella normale produzione dello stato liquido i casi seguenti:

1° Condensazione dei vapori;

2° Disfacimento dei gruppi di solidità reale, per mezzo del calore (fusione);

3° Disfacimento c. s. per mezzo di liquidi solventi (dissoluzione propriamente detta).

Ma non tutti convengono nella stessa maniera di rendersi conto dei fatti essenziali della liquefazione; che anzi la maggior parte dei fisici e dei trattatisti seguitano a non ravvisarvi altro meccanismo se non l' allontamento più o men grande delle molecole di un corpo solido.

È indispensabile, per precisare le cose, d' intendersi sul significato della parola — SOLIDO —; ossia del valore scientifico, esatto, di ciò che dicesi — SOLIDITÀ — dei corpi.

Mi pare pertanto evidentissimo, che se si confonde la *solidità*, considerata come uno stato fisico definito della materia, con i gradi variabilissimi per ciascun corpo inorganico di mollezza o di durezza, di plasticità o di rigidità, di scorrevolezza o di viscosità, e via dicendo, non è più possibile di dare a quello stato della materia alcun carattere determinato, alcuna fissa prerogativa, alcuna precisa definizione. E tanto più si afferma tale inconveniente se fra gli esempii di corpi in

istato *fisicamente solido* si prosegue a citare dagli scienziati, trattatisti ecc., anche eminenti, il legno, l' avorio, e altri consimili *tessuti organogenici* complessi, *eterogenei*, residui di funzioni soppresse, stati precarii di una caratteristica mutabilità.

Solo allorquando alcuno di quelli che vedono nello stato legnoso la fisica solidità della materia, sia riuscito, col variarne la temperatura, a fondere, liquefare, evaporare, gassificare, ricondensare e consolidare di nuovo un legno qualunque, senza scomporlo, s' intende, nè dissociarlo, trasformarlo, mi asterrò dal giudicare molto grossolano, molto inesatto, e molto inopportuno il concetto di così fatta solidità.

Il linguaggio del fisico non deve identificarsi col linguaggio ignaro del volgo. Il concetto volgare della solidità è una insufficienza; l' apprezzamento comune di essa è un empirismo. Persisto dunque nel considerare come *solide* quelle masse soltanto le quali si fecero rigide per uno speciale e ben determinato fenomeno termico-molecolare; per un fenomeno che stia in rapporto con questo così cospicuo cambiamento di stato fisico, come l' ebollizione a 100°, sta a quello dell' acqua liquida che si fa fluido elastico alla pressione di $0^{m},760$, o come la liquefazione di un vapore saturo per una determinata pressione.

E siccome ritengo quale condizione *normale* e *tipica* di un liquido perfetto lo stato di libertà e di mobilità in ciascuna delle particelle sferiche sue costituenti; siccome parmi che la causa diretta della VISCOSITÀ de' liquidi la quale cresce mentre si abbassa la temperatura; non chè del grado diverso di questa viscosità nei liquidi dovuti a sostanze diverse, consista nel *farsi variabilmente multiple* le sfere componenti; disponendosi in sistemi nei quali cresce il numero delle unità solidali in ragione del raffreddamento, *ma che rimangono sferici*, così insisto perchè un dato liquido che dopo di esser divenuto viscoso per raffreddamento graduato diviene più rigido, viepiù duro, *sempre graduatamente*, per il continuo e progressivo decrescere della temperatura, non si ammetta fra i *solidi fisicamente costituiti;* ma si lasci fra i multiformi casi di permanente liquidità. (v. Cap. seguente). Insisto perchè si ammetta uno stato *pseudostereo*, che simula la solidità presso i liquidi condensati, come lo stato di vapore simula la gassosità presso i liquidi rarefatti. E tanto più insisto su di ciò con piena convinzione, in quanto che il fenomeno cristallogenico che presiede solo alle naturali e normali solidificazioni, offre appunto il vero e positivo criterio di tali mutamenti di stato fisico della materia; mentre è, indubitatamente, il fatto più cospicuo, più grandiosamente prodotto nell' universo; la espressione massima della sintesi cui moderano le leggi della gravitazione, e delle forze per le quali il cosmos potè sostituirsi al caos.

Sussistono dovunque i casi d' illusioni possibili a proposito della solidità. Nel capitolo che segue ne son registrati alquanti fra i più notevoli. Solamente, quando una massa già liquida si irrigidisce ad una data temperatura, che è *costante* se il fenomeno si compia nelle stesse condizioni date; e quando, in conseguenza, assume proprietà fisiche diverse, di termicità, di densità, di caratteri ottici e analoghi, di qualità strutturali e geometriche, talmentechè possa dirsi uno stato *isomero*, o *allo-*

tropico della liquidità preesistente, si può ragionevolmente dire che la *solidificazione fisica* si è adempiuta.

Per ragioni identiche, non si ammetterà vera la liquefazione se non quando a una temperatura fissa, in date condizioni costanti, e con fenomeni speciali e caratteristici, avvenga, non già un aumento di fluidità o di scorrevolezza, ma il disfacimento di gruppi molecolari di una preesistente solidità.

Un concetto cotanto semplice basta a render conto di tutti i fatti osservati finora nella serie degli studî su questa parte elevatissima della meccanica molecolare, che ha tante dirette attinenze colla storia naturale dei corpi inorganici, e colla fisica terrestre.

Resta immediatamente spiegato il *costante* abbassarsi della temperatura nelle dissoluzioni dei sali nei rispettivi solventi. Le ricerche del Berthelot (C. R. 1877), sulle dissoluzioni dei sali anidri, che svolgendo calore nell' atto in cui si disfacevano nel solvente parevano dare una patente smentita alla legge dell' abbassamento di temperie ora citato, valgono a confermare invece tale medesima legge; poichè l' aumento di calore è dovuto alla previa idratazione chimica delle molecole, le quali *dopo* si disciolgono, impiegando come forza viva di disfacimento dei loro edifici cristallini quel calore che necessariamente sottraggono al mezzo dissolvente.

Ne segue che la temperatura che si fa sensibile in tali casi al termometro è la risultante di due temperature di segno diverso; è la differenza fra l' *aumento* di grado termico per una causa, e la *diminuzione* di grado termico per altra causa di diversa natura.

5. Liquido perfetto, pseudostereo.

(Liquidità con apparenza di stato solido)

Sempre più trovo naturale e logico di riguardare come stato di liquidità reale, quello nel quale fra tutti i caratteri propri di un liquido perfetto non ci apparisce modificato o soppresso che quello solo della scorrevolezza.

Subordinata come è la mobilità reciproca delle sferule, alla temperatura, essa decresce al decrescere di questa; fino a raggiungere le insensibili e progressive gradazioni di maggiore densità, di minore scorrevolezza; di viscosità incipiente e di viscosità considerevole; di stato gelatinoide, colloide, di inspessimento, di rigidità ecc., fino alla durezza più considerevole.

Ce ne danno esempio le sostanze vetrose, smaltoidi, molte resine fusibili, molti bitumi minerali, ecc.

Analogamente, altre sostanze si sciolgono o si stemperano nell' acqua, o in altro solvente, in qualsiasi dose; vi si rammolliscono, vi si diffondono, si immedesimano col liquido in guisa da divenir liquide esse pure; e se il solvente si svapora, si addensano, si prosciugano, si contraggono, si disseccano, e ritornano dure

senza che un fenomeno qualunque, un solo disequilibrio termico, abbia accompagnato il graduato e progressivo adempiersi di tali fatti. E fra queste sostanze si annoverano le gomme, certe materie gelatinose, albuminoidi ecc, la silice opalina, certi stati vescicolari, e in generale i corpi che si dissero colloidali.

Questi liquidi indurati, simulando la effettiva solidificazione, non perdono alcuna delle proprietà caratteristiche dello stato liquido normale, tranne la fluidità, che è di sua natura variabile, ad ogni oscillazione della temperatura. Non hanno struttura regolare o reticolare definita. Sono essenzialmente isotropi, se uniformemente compressi o scaldati. La rigidità che vi si osserva, si produsse nelle masse rispettive già liquide senza che alcun fenomeno termico o meccanico strutturale siasi manifestato, senza che nessun punto critico abbia indicato una repentina variazione per avvenuto mutamento molecolare.

Analogamente, nessun punto critico si manifesta, che stia a segnalare il momento nel quale non si possono più riguardare come solidi, allorquando passano per la serie inversa del crescente rammollimento, e della fluidità progressiva, per mezzo del calore.

Le masse solide, pseudosteree, obbediscono alle stesse leggi generali dei liquidi; e offrono gli stessi fenomeni di questi, in ordine alla trasmissione dei movimenti, sia di calore e di luce, sia di urto meccanico e di vibrazione molecolare.

Non assumono forme poliedriche cristalline, finchè dura il loro stato, individuato altresì dal calorico specifico della loro massa.

6. Solido imperfetto.

(Solidità con apparenza di stato liqu do)

1° Caso: Liquidi al disotto del grado termico del massimo di loro densità; *stato di superfusione.*

2° Caso: Soluzioni al di sotto del grado termico richiesto per la formazione dei cristalli; *stato di supersaturazione.*

Può citarsi ad esempio del primo caso lo stato transitorio di un liquido perfetto che *raggiunse il massimo di densità*, tendendo alla solidità reale, definitiva.

In quello stato si *predispone* la formazione dei poliedri primordiali o elementari, proprii di un solido propriamente detto.

Il volume della massa cambia e in generale cresce, diminuendo rispettivamente la densità; il cui *maximum* è perciò il punto critico in tale fenomeno.

Analogamente la *superfusione* corrisponde allo stato di una apparente liquidità, che si mantiene fino a temperatura *assai più bassa del grado di fusione.*

Nelle masse superfuse è predisposta la formazione definitiva dei poliedri primordiali, quasi essendo allo stato potenziale le polarità attrattive, orientatrici delle particelle. Vi sussistono virtualmente gli aggruppamenti geometricamente caratte-

rizzabili, ancorchè le particelle che debbono definitivamente formarli non si sieno ancora attratte, incontrate, e saldate in un sistema rigido e poliedricamente definito. Ma non si produce questo sistema senza una causa determinante; occorre un turbamento dell' equilibrio instabile che si è mantenuto nella massa inerte, cioè in istato di quiescenza relativa.

Nella *supersaturazione* si ha uno stato fisico singolare, che sembrami possa dirsi corrispondere a quello rappresentato dal *vapore*, fra il gas perfetto ed il liquido.

Difatti, col raffreddamento di una soluzione satura si sono già predisposte le orientazioni convenienti per la formazione dei cristalli delle sostanze disciolte. Potrebbe dirsi lo stato di fecondità cristallogenica delle soluzioni, pronte così a ricevere l' impulso di un germe eccitante. Ed è notissimo che un tal germe non può consistere che in una particella fisica cristallina (o multipli di essa), dello stesso sale o di *sali isomorfi*.

Le proprietà fisiche dei cristalli che si vanno disponendo, possono frattanto cominciare a palesarsi; basta poi il prodursi di una azione turbatrice dell' equilibrio instabile della massa in quiescenza, perchè si completi il nuovo e stabile equilibrio cristallogenico, in mezzo ad un solvente di cui può perdurare in parte lo stato liquido. Ma fino a questo risultato la massa conserva le apparenze di vera liquidità; e *dissimula* il suo vero stato di virtuale solidificazione cristallogenica.

Le condensazioni istantanee, e le cristallizzazioni rapidissime, paragonate ai fenomeni esplosivi.

A questo punto mi permetterò di invitare l' attenzione dei miei colleghi sopra una singolare analogia che sebbene non avvertita fin qui sussiste fra il repentino prodursi dei cristalli nelle soluzioni supersature e la istantanea liquefazione dei vapori compressi; fra la rapida soluzione cristallina nelle masse *superfuse* e la attitudine esplosiva di certi composti, le qualità detonanti di certi miscugli.

Gli effetti esteriori di questi fenomeni paiono di genere differentissimo: nondimeno fra le loro ragioni prime possono riscontrarsi notevoli correlazioni.

I gas che si liquefanno ad un tratto, se compressi oltre il punto critico, in convenienti condizioni; le masse superfuse che bruscamente si solidificano, svolgendo calore e aumentando il loro volume; le soluzioni supersature che per l' impulso molecolare di un minimo corpuscolo del sale che le costituisce, o di un sale *isomorfo*, repentinamente cristallizzano e passano ad uno stato fisico speciale, danno altrettanti esempî di azioni predisposte da una tensione e da una orientazione molecolare; i quali esempî tutti hanno a comune carattere quella brevità del tempo loro occorrente che suole chiamarsi *istantaneità*. Ed è questa appunto che caratterizza la maniera di scissione molecolare dei composti esplosivi, e delle reazioni chimiche nei miscugli detonanti.

Fatti di tale indole giammai si producono quando non avviene mutamento di struttura fisica.

Pertanto, come naturalmente si riguardano dello stesso ordine i fenomeni della lenta, graduata e progressiva *dilatazione* delle masse, per mezzo del riscaldamento (variazione con segno positivo), e quelli dell' analoga *contrazione*, per mezzo del raffreddamento (variazione con segno negativo), così parmi logico che i fenomeni *esplosivi*, siano essi di istantanea espansione (mutamento di volume con segno positivo), sieno invece di istantanea contrazione (c. s., con segno negativo), possano considerarsi quali manifestazioni di uno stesso genere di energie fisiche nella dinamica molecolare.

A parte la forma paradossale della frase, potrebbe dirsi che l' istantanea liquefazione di un gas che oltrepassò il punto critico segnato dalla legge di Mariotte; ossia di un vapore compresso, o raffreddato al grado cui si formò per ebollizione, è una *esplosione per condensamento*; è una *esplosione negativa.* Così, la istantanea solidificazione cristallogenica, in una soluzione sopra-satura, in quest' ordine d' idee equivarrebbe ad una *esplosione per consolidamento strutturale.*

In tutti questi casi preesiste uno stato di tensione; vale a dire una tendenza alla rapidissima trasformazione di lavoro interno, in lavoro esteriore; di movimento, in calore, o viceversa. L' effetto è tanto più subitaneo ed energico quanto maggiore è il coefficiente di detta trasformazione, e quanto più completamente si compie nella minima unità di tempo.

Giova pur di notare che l' energia di trasformazione istantanea nei miscugli gassosi detonanti è di carattere opposto di quella dei corpi esplodenti, come i fulminati, il picrato potassico e la nitroglicerina.

In questi, producesi la scissione istantanea di un equilibrio di molecole che ripigliano per la maggior parte lo stato elastico di gas. Nei miscugli gassosi, invece, è istantanea condensazione; è il passaggio allo stato liquido effettivo. Questo secondo modo perciò meglio risponde al rapido cristallizzare delle soluzioni supersature dove la condensazione conduce il fatto di ordine superiore che è la solidità cristallina.

Quando istantaneamente si liquefanno i miscugli gassosi detonanti lo stato potenziale del fenomeno preesisteva nella affinità chimica degli atomi. Quando invece la liquefazione ha luogo nei gas puri, raffreddati e compressi, quello stato coincide coll' equilibrio instabile delle molecole del gas, che si dispongono agli aggruppamenti caratteristici dello stato imminente di liquidità. Basta una sola molecola già liquida, per rompere quell' equilibrio; e per decidere il totale e repentino adunarsi in una massa liquida di tutte le molecole apparentemente libere nella simulata condizione di gas.

Nella massa in superfusione, la tensione risiede fra le polarità degli elementi primordiali cristallogenici, che tendono a precipitarsi gli uni sugli altri e rigenerare così lo stato di solidità, appena una particella o un urto tolgano l' instabile e precarissimo stato d' equilibrio termodinamico.

Sotto tal punto di vista, la particella cristallina che eccita in una soluzione supersatura l' immediata formazione dei cristalli ci rappresenta la scintilla elettrica che nei miscugli gassosi detonanti eccita la formazione delle molecole liquide.

Una delle più singolari analogie fra le repentine cristallizzazioni per es. delle soluzioni instabilmente supersature, e le esplosioni dei composti instabilmente affini, sta nella impressionabilità loro, come dice Dumas, rispetto a certe speciali cause eccitatrici. Per es., mentre una soluzione supersatura resta inerte, non genera cristalli, in contatto di certi sali, in presenza di moti vibratori, o in seguito a violente agitazioni entro tubi di vetro chiusi ermeticamente, per cristallizzare ad un tratto per opera di una sola particella di altri sali, o dell' impulso di altre vibrazioni, così si trovò che l' ioduro di azoto esplode sotto l' influenza di certe note musicali, non di altre, (1) ancorchè più acute e di suono più intenso. L' esplosione del piroxile, che un lieve scaldamento può produrre, non avviene in contatto della nitroglicerina che detona.

Si può quindi convenire che anche in questi ed in altri consimili casi, avvi nelle masse uno stato di tensione reciproca; fra le molecole, una predisposizione, con instabilità d' equilibrio, ad una condizione di equilibrio definitivo con mutamento di stato fisico, analogo alla predisposizione che nelle soluzioni supersature e nelle masse superfuse, come nei gas compressi ecc., presiede al cambiamento di stato, ed al definitivo equilibrio inerente ai cristalli.

Probabilmente l' ordinamento molecolare, precario nelle materie esplosive, varia da sostanza a sostanza, donde il vario grado della citata impressionabilità.

Possono aversi, dunque, esplosioni *positive* ed esplosioni *negative*. Il solo criterio distintivo, razionale, fra le prime e le seconde, si è il divenir *sensibile* istantaneamente nel 1° caso, come energia di espansione, quella che era latente, come forza di equilibrio statico; invece, nel 2° caso, il divenire istantaneamente *latente* come forza di equilibrio statico, di cristallizzazione, quella che era sensibile come energia di isorientazione, o di attrazione reciproca, molecolare.

Riesce pure indubbiamente opportuno a citarsi in tale riguardo quella maniera di esplosione per la quale potrebbe dirsi che *un solido genera un liquido con apparenza di permanente solidità;* e che dipende da una speciale maniera di TEMPRA.

Non ripeterò la storia delle lagrime bataviche e di altri notissimi esempî di vetri artificiali temprati, delle sferoidi esplodenti di ossidiana. Ricorderò soltanto che i vetri temprati polarizzano la luce, imitando siffattamente alcune delle più caratteristiche strutture cristalline, da essere agevol cosa, e naturale, il considerarli come divenuti, almeno parzialmente, cristalloidi; vale a dire, partecipi ad un grado

(1) Nota. Rambosson 181

di vera solidità, ancorchè la loro struttura regolare non si appalesi con considerevole mutamento di diafaneità, come nella *porcellana di Réamur*. Invece mi riferirò alle proprietà del vetro temprato con i nuovi processi di La Bastie, di Pieper, di Meusel ecc.; vetro del quale è tuttodì incerto se potrà vantaggiarsi in larga e durevole misura l' industria. Il Prof. O. Silvestri descrisse in un recente opuscolo, le principali fra quelle proprietà.

Il vetro temprato col processo di La Bastie, al pari delle lagrime bataviche, e delle lastre sottilissime, è assai duro, ed è difficilissimo a rompersi; ma quando si rompe, al pari delle lagrime bataviche cui si spezzi la coda sottile, dà luogo ad una vera esplosione, con effetto notevolissimo per la particolarità di produrre un *finissimo polverìo di minime sferule;* ossia, ne risulta una moltitudine di globetti, che esattamente riproducono il tipo di liquidità, proprio e caratteristico del vetro omogeneo; liquidità precariamente impegnata in un instabile equilibrio di assettamento pseudostereo, dalla tempra esercitatasi.

7. Solido reale, perfetto.

Eccomi all' argomento la cui discussione è il massimo obbiettivo che mi sono prefisso, in questo lungo e arduo lavoro. — L' affermazione cioè dell' idea esatta dello stato fisico di solidità, e delle sue manifestazioni polimorfe.

Lo stato di vera solidità è lo stato cristallino.

È il solo e vero stato caratteristico e distintivo dei composti definiti inorganici, devoluti essenzialmente e puramente alle forze fisiche molecolari, che direttamente agiscono sulle molecole chimiche monogeniche. Quindi è quello più largamente conseguito nelle materialità inorganiche del cosmos, per mezzo delle specie minerali propriamente dette; e queste specie, in ragione delle loro forme regolari poliedriche, debbono essere considerate dal Mineralista nello stesso grado rispettivo in cui il botanico considera la pianta viva e vegetante, il zoologo l' animale integro e fruente delle sue funzioni, l' antropologo l' individuo umano, sano, intelligente, nel possesso normale de' suoi fisici e morali attributi.

In un solido reale sussiste un equilibrio definitivo de' poliedri primordiali in ragione di un determinato stato termico, o del coefficiente *di calorico di costituzione;* e secondo determinate simmetrie di assettamento.

Se i gruppi se ne aggregarono confusamente, si hanno le masse più o meno *criptocristalline*. — Se regolarmente, e con forme geometriche evidenti, si hanno i *cristalli*.

Come avviene la solidificazione effettiva, normale, completa?

Il semplice fatto che il più favorevole e usitato processo per produrre una bella cristallizzazione consiste nel *progressivo* raffreddamento, in istato di riposo, di una

soluzione satura, con *frequenti fenomeni di iso-orientazioni,* fra sostanze differenti, può bastare ad escludere il pensiero che i cristalli procedano dal diretto, immediato concorso di atomi resi liberi, o di molecole chimiche libere, elementari.

È dessa il semplice effetto di un mero avvicinamento delle particelle inerenti allo stato di liquidità che la precede?

Ovvero è la naturale conseguenza di un nuovo, caratteristico assettamento di quelle particelle istesse; donde, la loro riunione in gruppi più complessi, in particelle di ordine superiore e geometricamente definite?

È forse un grado elevato di inspessimento di una qualsiasi liquidità, di una viscosità progressiva di cui sono soltanto capaci pochissime qualità di materie vitree o colloidali, o organiche? Ovvero è un fenomeno speciale, *sui generis,* di vera e assoluta cristallizzazione, proprio della universalità dei corpi inorganici, di natura chimica definita?

Può parer superfluo l' insistere sulla discussione del problema così posato, poichè dovrebbe essere ormai esaurito un argomento così decisivo nella dottrina degli stati fisici della materia, e nessuna titubanza dovrebbe tuttodì sussistere per l' adozione di quel modo d' intendere la solidificazione fisica dal quale defluiscono colle più chiare esplicazioni di tutti i fenomeni correlativi le più semplici idee sulla costituzione fisica dei corpi, delle loro allotropie, isomerie e polimorfie; dal quale conseguono leggi fisiche positive e costanti.

Ma non è così! Le vecchie idee perdurano in ampia misura; e il linguaggio di chimici e fisici contemporanei eminenti, contiene, e ne darò qualche prova, a proposito dei processi di produzione dei cristalli, delle sublimazioni in special modo, troppe frasi di quel tradizionale empirismo che dominò su questo soggetto, perchè io non sia certo di far cosa opportunissima, registrando quì alquante istruttive particolarità che concernono i processi della solidificazione, i modi della reale solidità.

Prima di tutto osserviamo che se il meccanismo efficiente della vera solidificazione consistesse normalmente nell' *impiccolirsi* delle distanze intermolecolari, per la sola ragione di decrescente energia del moto vibratorio delle molecole di una massa, non potrebbe spiegarsi il fatto, molto più generale che non si creda, del dilatarsi della masse; del suo *crescere di volume* nell' atto in cui si solidifica. Questo fatto, contradditorio a quel concetto, sarebbe paradossale. — Bisognerebbe concludere che le molecole vibrerebbero con più ampie ondulazioni appunto quando riteniamo che si muovano con minore intensità per essersi trasformata in calore una parte del loro moto di ondulazione; ovvero, ciò che torna lo stesso, che svilupperebbero maggior forza centrifuga, donde il maggior volume del sistema, appunto quando ruotassero con diminuita velocità!

D' altra parte perchè i liquidi sono in così lieve misura compressibili?

Perchè colle più enormi pressioni che sia dato ottenere mai si ottenne, e mai potrà ottenersi, quella solidificazione di un liquido, che tanto placidamente e spontaneamente è prodotta nei liquidi cristallogenici, dal semplice progressivo raffreddamento?

Perchè l' alcool, come altri liquidi non cristallogenici, si inspessisce ai freddi estremi, ma non si solidifica?

Perchè, invece, i liquidi cristallogenici offrono il loro massimo di densità alcuni gradi prima del loro congelarsi in masse solide, ad una data temperatura?

Noi vediamo invece che si esige per ogni caso di reale solidificazione un raffreddamento più o meno considerevole; vale a dire un azione interna NON AVVICINATRICE, BENSÌ ORIENTATRICE delle particelle già liquide; ossia, una causa modificatrice della costituzione fisica della massa in esperienza, e tale da spettare allo stesso ordine di quelle che inducono le isomerie e i polimorfismi nei corpi suscettibili di mutamenti strutturali.

Noi vediamo, mercè i prevedibili, ma non perciò meno splendidi risultati sulla liquefazione dei gas, che a tutto il 1877 dovettero chiamarsi *permanenti,* che se taluni giungono a solidificarsi ciò accade non per l' effetto delle pressioni eccessive, che enormemente li comprimono, e tendono a ravvicinarne le molecole, ma bensì per il brusco cadere di quelle pressioni; per il freddo prodotto dalla espansione che ne avviene, e che induce e favorisce nel liquido già prodottosi le orientazioni e gli adunamenti molecolari di solidità.

È in seguito di tali viste che il prodursi dei cristalli per *sublimazione* può risultare inteso diversamente di quello che non s' intenda dai più.

La sublimazione NON È l' immediato passaggio dallo stato di gas perfetto a quello di solidità cristallina; nemmeno è la condensazione cristallina di un vapore che vogliasi considerare, affine ad un vero gas. — Invece essa è il solidificarsi, in sistemi molecolari complessi, del vapore di una data sostanza cristallizzabile, già costituitosi in vera *liquidità rarefatta.*

Sono in generale corpi di natura complessa, *e che a temperatura elevata si sdoppierebbero o si dissocierebbero,* solo perciò tendendo a gassificarsi, quelli che sublimandosi cristallizzano. Per esempio l' acido benzoico, il cloruro ammonico e altri cloruri di radicali metallici, l' ioduro e il solfuro di mercurio. Questi composti non si gassificano; si rarefanno mercè l' espandersi delle loro particelle di liquidità; le quali particelle, in talune sostanze assumono, appena costituitesi, un sì rapido movimento da dar l' illusione di una gassificazione immediata, senza l' intermedio stato della vera fusione.

Anche l' iodio, quando cristallizza, deve le sue splendide lamelle, al suo proprio vapore saturo, ossia al proprio stato liquido rarefatto. I cristalli stellati della neve cadente dall' alto, non son generati direttamente dal gas H^2O che nelle regioni elevate dell' atmosfera non potrebbe persistere; bensì lo sono per sintesi mec-

canica di particelle già liquide, che produssero i prismetti elementari (liberi nei cirri, etc.), riunitisi poi negli elegantissimi sistemi di tipo esagonale.

In conseguenza, non avvi diversità sostanziale fra il formarsi de' cristalli in una massa fusa, in una soluzione satura e in un vapore che si condensa.

In ciascuno di tali casi, il moto intermolecolare decrescendo, si attivano le orientazioni delle particelle cristallogenicamente polarizzate; e le stesse particelle che in una massa tranquillamente fusa, o semplicemente disciolta si sarebbero aggregate in regolari poliedri, compiono questo stesso effetto se dopo essersi allontanate, per via di aumento di temperatura, ritornano vicine poi, e continue, dove la temperatura decresce, e in contatto di superficie relativamente fredde.

Reputo adesso opportuno di ricordare qui le principali particolarità del congelarsi dell'acqua, anche per viemeglio illustrare gli argomenti delle sferoedrie cristalline, e della cristallizzazione verticillata con apparenza di grandi corolle di rose, offerta testè dalla neve; argomenti trattati nelle pagine successive.

Le forme tipiche dell'acqua cristallizzata.

La cristallizzazione dell' acqua sembra predisporsi dai 4° a 0°, *colla orientazione e dilatazione progressiva fino a 0°*, delle unità cristalline, elementari; le quali assumono le simmetriche posizioni di aggruppamento e di assettamento reciproco, inerenti e necessarie al definitivo costituirsi dei cristalli.

I cristalli dell' acqua (prismi esagonali, o ortorombici, con angoli di 60° e 120°) sono ben di rado semplici, e conformati in grossi e regolari poliedri. Generalmente si associano in sistemi stellati esagonali, in fascetti intrecciati per multiple geminazioni, o in sistemi palmati o felciformi, notoriamente dotati di singolare eleganza, e varietà. Peraltro, or sono tre anni e mezzo circa, avvenne una manifestazione inusitata affatto o almeno raramente osservata e apprezzata, sebbene interessantissima, della cristallizzazione dell' acqua. Gruppi di grossi cristalli prismatici esagonali, di abito affatto simile a quello dei cristalli di quarzo, e divergenti da centri comuni, caddero come terribile gragnuola dalle nubi temporalesche addensatesi il giorno 26 Agosto del 1876 specialmente a Grotta-Ferrata, a Marino, ed a Castel Gandolfo, nei dintorni di Roma.

Il padre Secchi osservò e descrisse questa memorabile grandinata, che fu al massimo alle 4 pomeridiane.

Riproduco il disegno che si diede di uno dei gruppi più considerevoli che da essa provennero nella Fig. *b* della Serie III, alla pag. 755.

L' avvenimento di una siffatta gragnuola, a grandi cristalli prismatici esagonali, e piramidati, riuniti colle lor basi in modo da risultare divergenti da un centro comune, e sporgenti per due centimetri e più, colle loro piramidi aguzze, dai nuclei

centrali, e pesanti fin oltre a 300 grammi, aggiunse, dunque, la classica modalità della cristallizzazione dell' acqua alle altre e già note. Erano notissimi gli aghetti prismatici esagonali, semplici, o con semplici geminazioni, e fra loro confusamente intrecciati dei soliti fiocchetti delle solite nevicate; tutti conoscono le esilissime ramificazioni e le laminette felciformi o palmate delle brine, sui rami delle piante e sui cespugli, sulle erbe dei prati, sulle zolle dei campi; e così, le stellette esagonalmente multiple, cotanto variate ed eleganti nel loro unico tipo di trigeminazione, che la neve suol presentarci quando scende da una atmosfera relativamente calma; e così le dendriti, le fioriture a rosoni d' infinita vaghezza, che il congelarsi del vapore acqueo produce sui cristalli delle finestre; moltissimi videro, e studiarono le lamine di ghiaccio limpido, più o men delicatamente frastagliate secondo le incidenze di 60° e 120°, formatesi alla superficie delle acque tranquille; fu popolarizzata dal Tyndall la conoscenza della struttura cristallina del ghiaccio a grosse e limpide lastre, sulle quali la superficiale fusione od evaporazione impronta disegni stellati a sei raggi; e nelle quali l' interna liquefazione, convenientemente prodotta, genera cristalli *negativi*, che i diversi poteri rifrangenti dell' acqua liquida e dell' acqua congelata fa egregiamente distinguere sotto forma di rosoni o di fogliami, inevitabilmente di tipo e di simmetria esagonale, al pari delle citate stellette di neve.

Inutile è l' insistere sulla purtroppo esuberante notorietà dello stato di solidità cristallina, in forma di arnioni, di nuclei, di grani, di agglomerazioni, con le strutture concentrica e raggiata, della grandine, nella sua più comune condizione; piuttosto registrerò in questa serie di esempî quello offertoci dall' ACQUA DI CRISTALLIZZAZIONE.

Reputo ben pochi fatti di fisica molecolare, e dirò di chimica generale, altrettanto importanti e degni di studio, quanto lo è quello della concorrenza dell' acqua, ovvero di altre sostanze, colle loro particelle solide, di vera solidità cristallina, poliedrica, alla costruzione, all' equilibrio, alla geometrica modalità di quegli stupendi edifici che si dicono cristalli; qui ricorderò semplicemente che nel fenomeno di cristallogenesi quale l' acqua, ed altri solventi, ci presentano, facendosi cioè solidali, e *senza perdere le proprie individualità*, colle particelle dei composti che disciolsero e che ridanno libere e solide alle azioni di polarità molecolare, sta il migliore esempio, e più indiscutibilmente vero, dell' associazione molecolare o poligenica, dei composti multipli e cristallizzati.

Dunque la grandine a grossi prismi, del 26 Agosto 1876, completò la serie delle morfologie inerenti alla solidità reale dell' acqua; serie, della quale i più distinti termini, e più diversi nel lor modo di offrirsi ai superficiali nostri apprezzamenti, sono appunto i tre, dei nuclei a struttura raggiata e a strati concentrici; dei cristalli in prismi esagonali piramidati, e del e stellette poligeminate, esse pure esagonali.

A proposito della conformazione frequentissima nelle sostanze cristalline, di nuclei o sferoidi a struttura raggiata, devo quì introdurre alcune riflessioni.

Le Sferoedrie nella Cristallizzazione.

Sotto il titolo di — SFEROEDRIE NELLA CRISTALLIZZAZIONE — raccolgo ogni conosciuta maniera di produzione delle strutture fibroso-raggiate, di quelle a strati concentrici, fibrosi o fibroso-lamellari; finite da superficie normalmente sferoidali; abitualmente tondeggianti, globose, ovoidi, bernoccolute, con tumescenze mammillonari, con tubercoletti variolitici; ovvero con diffusione di irraggiamenti e di concentrazioni, indubbiamente cristallogeniche, nelle masse.

Gli esempî di tutte queste citazioni posson dirsi notissimi ad ogni naturalista; ma se si osservarono e si descrissero moltissime strutture fibroso-raggiate, moltissime forme globulari, variolitiche, mammillonate ecc., non si pose, io credo, sufficiente attenzione alle loro connessioni colle forme regolarmente e unitariamente geometriche, proprie rispettivamente delle stesse sostanze; non si tenne conto della generalità del fatto, nelle sostanze del regno minerale e del laboratorio; non si ravvisò nella struttura fibroso-raggiata che un accidentale condensazione di molecole cristalline, anzichè la dimostrazione di una vera dualità morfologica nel fenomeno universale e fondamentale della cristallizzazione; dualità, che pur ne costituisce un tratto caratteristico.

In un precedente lavoro, cioè nelle — Considerazioni critiche sopra alcuni recentissimi scritti di cristallografia (1), — sostenendo che i poliedri geometricamente isometrici e fisicamente isotropici effettivamente esistono nella serie dei cristalli, accennai al fatto delle or citate conformazioni sferoedriche, cui si aggiungono quelle discoidi, ellissoidali od ovoidali, botrioidali ecc., *se fibroso-raggiate internamente*; adducendo quel fatto come conferma di una transizione fra la simmetria sferica delle particelle di liquidità e quella dei cristalli isometrici ed isotropici sfericamente.

Adesso insisto sulla generalità di un tale portato delle attività cristallogeniche; ne affermo la normale manifestazione *nella massima parte delle sostanze cristallizzate*; e quindi la reale indipendenza sua dai tipi sistematici delle forme cristalline, dal carattere delle loro simmetrie fisiche e molecolari; implicitamente, dalla qualità delle sostanze dove si riscontra, se considerate dal lato della loro chimica costituzione.

Nei corpi indecomposti, per es. nelle cristallizzazioni isometriche del carbonio (Diamante), romboedriche dell' antimonio e dell' arsenico, ortorombiche e monocline del solfo; negli ossidi di vario grado, per es. nel monossido di rame, o di zinco nel quarzo ($Si\ O^2$), nel biossido di manganese e nel sesquiossido di ferro, ecc., tanto anidri che idrati; nei composti binarî non ossidati, per es. nei cloruri di rame, di piombo ecc., nei solfuri di zinco, di ferro, di nichel, di arsenico, di antimonio, in parecchi dei solfuri doppï antimoniferi; negli arseniuri di ferro e di cobalto, ecc.;

(1) Mem. Accad. Bologna 1878.

ed in una moltitudine di composti ternari, di sali di ogni genere, solfati (Es. Baritina, Celestina, Selenite, Copiapite, Alunite, Alumogene), carbonati (Aragonite, Witherite, Sferosiderite, Malachite, Azzurrite), silicati (Pirosseni e Amfiboli, Ilvaite, Cloriti, Lepidoliti, Epidoti, molti Feldispati, pressochè tutte le Zeoliti, la Prehnite, la Calamina, la Gismondina, e le principali Andalusiti); cromati (Crocoisite, Vauquelinite), tungstati, titanati e tantalati, fosfati, arseniati (Wavellite, Eritrina, Piromorfite, Idroapatite, Mullicite, Scorodite, Afanese, Clinoclasio, Calcofillite, Olivenite), borati ecc., con o senza acqua di cristallizzazione, ci si offrono i più istruttivi esempî delle strutture fibroso-raggiate, delle forme tondeggianti e globose; mentre gli esempî più cospicui si riscontrano nei bellissimi arnioni, spesso colossali, della Baritina, della Marcasita, del Gesso, delle Aluniti, delle Bustamiti, delle Aragoniti e via dicendo; ed i più comuni, e largamente diffusi, nelle forme pisolitiche del calcare, del perossido di ferro, e di qualche altro minerale ossidato.

A questi tipi di struttura raggiata si connettono indubbiamente parecchie concrezioni derivate da organismi viventi, segnatamente per lo stato morboso di talune delle loro funzioni; ossia, i bezoar, i calcoli intestinali e vescicali, le concentrazioni cristalline nelle cellule vegetali, o rafidi, e via dicendo.

Vi si coordinano con pari evidenza le forme discoidi o cilindroidi, a struttura raggiata, ma con elementi piani e teoricamente circolari, sovrapposti a pile, ad asse comune rettilineo; come in tante e diverse stallattiti; o tortuoso, come nelle conformazioni coralloidi.

Quando le strutture sferoedriche appariscono dalle superficie di frattura delle masse litoidi, per esservi contenute e come disseminate, può darsi che la sostanza pietrosa che le circonda sia il magmas in seno al quale agirono le azioni molecolari, concentratrici, in virtù delle quali quelle strutture, quelle sfericità, si produssero. Ne danno esempio le piromeridi, le bellissime dioriti orbicolari; i rosoni di anfibolo, o di bustamite nei calcari cristallini e saccaroidi; le pietre verdi schistoidi, dette stellarie, con irraggiamenti di Actinoto; le rose di oligisto nella dolomite lamellare; di pirite nelle ganghe quarzose; di siderite, nelle ganghe spatiche e quarzifere, come nel notissimo filone a coccarde della Chevrette; possono pur citarsi in proposito le perliti, le sferuliti, e molte roccie amigdaloidi; possono pur citarsi, a conferma di questo apprezzamento i gruppetti stellati, o irraggianti, o sferoidali, che bene spesso vedonsi disseminati nelle masse di vetro state lungamente fuse; gruppetti formati da silicati definiti, meno fusibili, specialmente di calce.

In generale, la cristallizzazione centripeta, generatrice di tutte queste modalità raggiate, è favorita dalla mollezza, dalla plasticità, e dalla incoerenza del mezzo più o meno omogeneo dove le particelle già solide e già polarizzate per le reciproche orientazioni si muovono e si aggregano graduatamente.

Ma le sole vibrazioni molecolari delle masse cristalline, già rigide, e composte da molecole di diversa natura, atte a cristallizzarsi, bastano, evidentemente, in moltissimi casi, ad eccitare ed a compiere la genesi delle sferoedrie di cui parliamo.

Può dunque ravvisarsi in questa così notevole, ma ben poco apprezzata dualità morfologica delle sostanze cristalline, un fenomeno altrettanto interessante quanto quello della formazione normale dei poliedri unitari, ossia dei cristalli propriamente detti. Può considerarsi come un caso speciale di POLIMORFISMO.

Non deve peraltro confondersi col DIMORFISMO, qualunque sia il grado, il genere, la manifestazione delle correlazioni geometriche o di *polisimmetria,* che si vogliano ravvisare fra le forme incompatibili di una data sostanza.

La superficie delle sfere aventi struttura raggiata suole offrire di fatti, se è irta di cristalli distinti e determinabili, le forme geometriche caratteristiche della sua propria sostanza.

Potrà obbiettarsi la grande difficoltà di dimostrare che la struttura degli allineamenti raggiati del nucleo centrale è veramente identica a quella dei poliedri costituitisi presso la superficie, ivi favoriti dallo spazio, e dalla più libera azione di innumerevoli centri attrattivi; ma tal quistione ha così poco interesse che basterà di averla semplicemente accennata; in alcuni casi quella identità può sussistere; può mancare in altri casi; tenendo conto dei pesi specifici delle strutture poliedriche e delle sferoedriche, associatesi, si può forse talvolta decidere su tale proposito.

Inoltre, per dimostrare viemeglio la dipendenza dell' uno e dell' altro modo di cristallizzazione che diciamo poliedrico e sferoedrico, dalle fisiche condizioni dell' ambiente, riesce veramente opportuna la descrizione di una forma singolarissima offerta da un esemplare della pirite di Traversella (Ivrea), appartenente alle collezioni del Museo Universitario di Mineralogia.

Questa forma, al pari di tante altre, a superficie curvilinee, è verosimilmente il portato delle oscillazioni di quelle azioni fisico-molecolari che presiedono alla produzione di una forma cristallina anzichè di un altra, per un dato minerale, alla comparsa di talune, o di altre modificazioni, ovvero al prodursi piane e nitide le sue faccie piuttostochè scabre, striate, ondulate e curvilinee.

Come la massima parte dei romboedri di dolomite del giacimento di Traversella i quali sono curvilinei per modo che soglion dirsi, *linguiformi, selliformi,* etc., e che veramente danno un esempio di più, e notevolissimo, di contorsione *a superficie paraboloide,* così anche la pirite concomitante ebbe, sebbene per rara eccezione, a subire l' influenza delle condizioni sopra accennate.

L' esemplare che descrivo è di tipo poliedrico, isometrico; ma in questo può a piacere ravvisarsi tanto l' ottaedro regolare, quanto il pentagono-dodecaedro o l' emi-ottaesaedro, quanto le combinazioni abituali delle faccie rispettive; e vi si ravvisa, nel tempo stesso, il tipo sferoedrico. (Fig. *A*).

La superficie ne è scabra finamente, uniformemente; pare sagrinata; ma non vi sono tubercoletti o papille; bensì addossamenti fittissimi di lamelle triangolari. Queste tendono in ciascun singolo sistema ad un generale parallellismo; si riducono a lastrine triangolari, concave, multiple, presso le incavature rispondenti ai

centri delle faccie ottaedriche. I loro sistemi risplendono ad un tratto, sotto date incidenze di luce.

A prima vista, il gruppetto tondeggiante di pirite sembra una elegante e regolare imitazione del famoso nodo gordiano. È in parte incluso nella calcite cristallizzata.

Fig. A.

Fig. B.

Fig. C.

La Fig. *C* fa vedere come le disposizioni dei suoi tratti principali morfologici si accordino perfettamente con gli elementi geometrici del dodecaedro pentagonale; ma ciò non toglie che i fasci fibroso-lamellari che vi predominano sieno palesemente diretti fra loro come gli spigoli dell' ottaedro; ed è pur chiaro che l'intero sistema sferoedrico si compone specialmente di 24 sistemi parziali, come singoli fasci fibroso-lamellari, i quali riuniti, o convergenti quattro a quattro presso i sei angoli ottaedrici ricordano la forma dell' emi-ottaesaedro.

Trovo istruttivissimo questo caso, nell' argomento delle sferoedrie cristalline; e forse gioverà richiamarlo quando vogliasi discutere la poliedria delle faccie, e ogni caso nuovo di contorsioni elicoidi e paraboloidi, negli aggruppamenti di singoli cristalli.

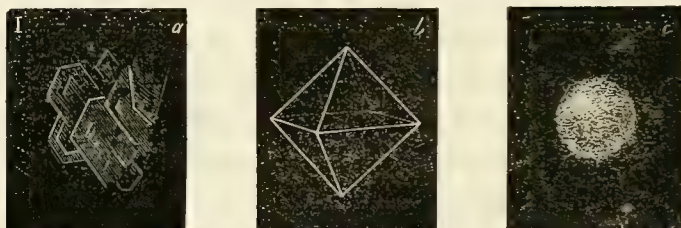
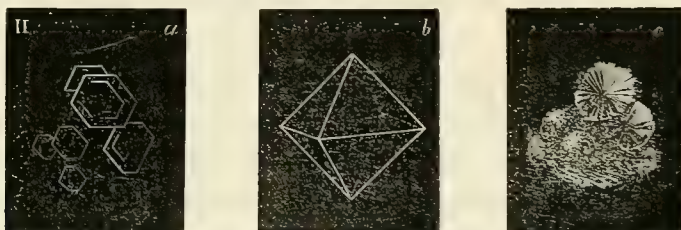
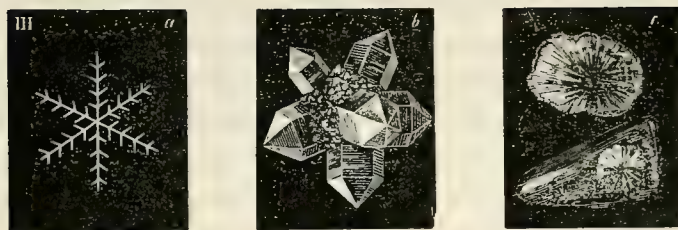
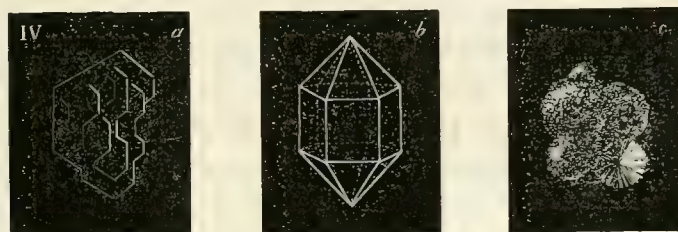
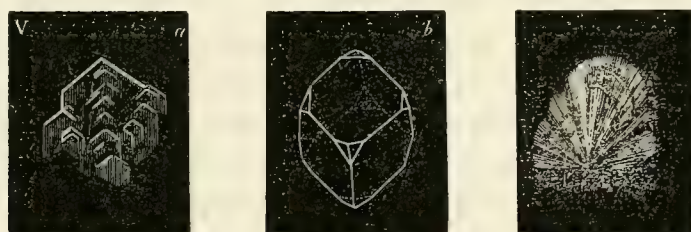
Credo altresì che sia un caso molto raro; imperocchè nessun autore ne fa cenno; le diligentissime ed estesissime ricerche dello Struever, nelle piriti di Traversella e dell' isola d' Elba, per la grande monografia dei loro cristalli certamente non glie ne offersero verun saggio, che altrimenti sarebbe stato da quel valente mineralista disegnato e descritto.

La matrice di questa pirite, a nodo gordiano, e che potrebbe dirsi — poliedro-sferoedrica —, è una confusa cristallizzazione di calcite romboedrica equiasse, incolora all' esterno, dove son più distinti i cristalli, ma mescolata nella massa con ocra gialla e bruna, argillosa, con macchie nerastre e amorfe.

Quanto al gruppo sferoedrico, che sporge dalla de ta calcite, si intrecciano fittamente altri mammelloni di pirite, con analoga configurazione, ma ivi molto meno evidente. Il colore ne è giallo-bronzato, come quello dei più comuni arnioni di pirite non alterati superficialmente. La lucentezza è viva e metallica.

Anche l' esemplare rappresentato dalla Fig. *B* riesce interessante per consimili ragioni. È un pentagonododecaedro effettivamente poco più piccolo del disegno, e mancante di quasi la metà della sua forma. Le faccie ne sono associate a quel-

le del cubo; ma sono siffattamente curvate, e rugose, che le coppie di spigoli di tal combinazione sono scomparsi. Il cristallo assume un aspetto sferoidale; pare un cubo rigonfiato, a faccie quadrangolari curvilinee. Vi stanno impiantati, sparpagliatamente, numerosi cubettini della stessa pirite, nitidi e brillanti alcuni, e ben rilevati, altri confusi e appena sporgenti (V. la figura). — Riesce perciò verosimile che il cristallo siasi iniziato in mezzo a condizioni favorevoli per divenire pentagonododecaedrico; ma che, poco a poco, si sostituissero condizioni determinanti la forma esaedrica; che durante tale sostituzione, le posizioni prese dalle particelle di accrescimento oscillassero fra le due modalità, obbedendo alla risultante progressivamente mutabile, delle condizioni suddette. Le faccie divennero curve; la forma serbò l' abito dodecaedrico pur acquistando quello del cubo; e gli ultimi cristallini che sporadicamente si aggiunsero sul cristallo tondeggiante si fecero nitidamente esaedrici.

Qualunque sia la decisione che risulti, certo si è, che il fenomeno della gragnuola di gruppi di cristalli perfettamente definiti, ancorchè generatisi rumorosamente in seno di una nube temporalesca, e con fortissima tensione elettrica, analogamente al solito modo di formazione della grandine a nuclei e ad arnioni botrioidali con struttura raggiata e con zone concentriche, vale pienamente a stabilire fra le stellette esagone, trigemine della neve e quei nuclei di grandine Fig. *a, b, c* Serie III, un termine di passaggio, un elemento intermediario di correlazione morfologica, che trova le più limpide analogie nel regno minerale. E di questo si può restare ben presto convinti per poco che si osservi il triplice modo di conformazione cristallina del carbonio, per esempio, con i suoi ottaedri di

diamante, le sue lamelle di abito esagonale e fogliettate di grafite, i suoi nuclei a struttura raggiata del Boort, o diamante di natura, (Fig. *a, b, c* Serie I.)

ovvero dell' ossido di rame con i nitidi ottaedri della ziguelina, le pagliette esagone della tenorite, ed i mammelloncini della calcotrichite, (Fig. *a, b, c* Serie II.)

ovvero quello della silice, con i cristalli di quarzo, le lamelle di tridimite, i globi raggiati del quarzo di aspetto sferoidale o prehnitoide, (Fig. *a, b, c* Serie IV.)

ovvero del perossido ferrico, con i cristalli splendidi dell' oligisto, le laminette esilissime, esagone di ematite, e i grandi irraggiamenti fibroso-mammillonari della

ematite massiccia (Fig. *a, b, c* Serie V.) e così di seguito.

Le figure quì annesse, abbenchè convenzionalmente disegnate e avvicinate soltanto al tipo più frequente e noto dei minerali che rappresentano, fanno vedere a colpo d' occhio siffatte correlazioni, e il parallelismo della triplice serie ehe ne consegue; serie che potrebbe lungamente aumentarsi con esempî non meno bene caratterizzati nel regno minerale, talvolta completati dai prodotti di laboratorio.

Lo stesso vetro può intervenire in questi istruttivissimi esempi. Ma non il vetro propriamente detto; non quella liquidità irrigiditasi senza mutar di struttura; non

quell' amorfismo omogeneo a qualunque temperatura che non valga a dissociarlo; quella massa inerte sulle vibrazioni dell' etere sia calda e pastosa, sia caldissima e liquefatta, sia fredda e dura, purchè non temprata, purchè non isdoppiatasi in una indeterminata e colloidale miscela di silicati alcalini, ed in una speciale qualità di silicati definiti, che posson cristallizzare; bensì quella massa di apparenza vetrosa e omogenea, ma risultante da questi silicati definiti, sciolti e diffusi in quella miscela, entro la quale può aggregarsi e assettarsi in veri poliedri per cristallizzazione propriamente detta, per via di lentissimo raffreddamento. I silicati infatti del vetro, segnatamente di potassa e di calce, rappresentano la più semplice formula dei silicati minerali; la formula del tipo pirossenico. Le loro molecole separandosi dalla pasta amorfa, *effettivamente vetrosa,* per l' intervento di condizioni favorevoli alle orientazioni molecolari, si adunano per lo più in sfere a struttura raggiata, o in globuli irti di cristallini alla superficie, o in stelle a più raggi, ciascun dei quali può sostenere un piccolo ma completo poliedrino. La massa bianca e translucida che spesso deriva dal loro aggregato è il *vetro devitrificato;* è la *porcellana di Réamur.* Essi riproducono così i due tipi testè segnalati per la grandine comune e per la neve, e per altre sostanze; stellette o lamelle, e nuclei botrioidali, raggiati.

Ma nel 1875 fu presentata all' Accademia delle Scienze di Parigi, una magnifica cristallizzazione dei silicati inerenti al vetro. Erasi prodotta in un crogiuolo di una vetreria a Blanzy, nel quale una pasta di vetro era stata tenuta fusa per otto mesi continui al calore di un forno Siemens. Il sig. Videau trasmise l' esemplare al Peligot, e parecchi scienziati fecero a gara per averne dei saggi per i loro rispettivi Musei. I cristalli erano limpidi, ben definiti, delle dimensioni di 2 a 3 centimetri. Analizzate che furono le tre qualità di vetro che si resero distinte, cioè quella dei cristalli, quella del vetro decantato dal crogiuolo, mentre era liquido, e quella che dallo stesso crogiuolo erasi già tratta per farne bottiglie etc., prima della avvenuta cristallizzazione, si trovarono differenti. Di più si trovò che i cristalli avevano le forme del tipo dei pirosseni minerali. Dunque, nulla di più semplice e giusto che il concluderne:

1° Che la pasta vetrosa del grande crogiuolo di Blanzy era una soluzione di silicati di tipo pirossenico, in un solvente vetroso, pur composto di silicati, ma in magmas chimicamente indefinito e incristallizzabile.

2° Che i cristalli dei silicati pirossenici vi si formarono, *non già come si formano quelli del bismuto o del solfo nelle loro masse fuse* (v. Figuier ann. scient. 1876, pag. 231), ma bensì come i cristalli di qualsiasi sale si formano nelle rispettive acque madri, come quelli di solfo si formano nelle soluzioni di solfuro di carbonio.

3° Che la cristallizzazione aveva avuto luogo per la scissione delle due qualità di silicati; e che la loro forma, la trasparenza loro, la lor nitidezza, valgono

a collocarli, rispetto ai mammelloni raggiati della porcellana di Réamur, nello stesso grado con cui i cristalli di ghiaccio stanno rispetto ai nuclei raggiati della grandine, i cristalli ottaedrici di Diamante stanno al Boort, i prismatici del quarzo, stanno alle sfere raggiate della silice anidra.

Per tanto, mi pare che anche queste considerazioni sul triplice portamento degli aggregati cristallini, e sulle correlazioni che esse stabiliscono fra la solidità dell'acqua nelle sue condizioni di neve, di grandine, di cristalli prismatici piramidati, possono fornire criterii utilissimi nella teoria della formazione della grandine, cui manca la parte che spetta alle attrazioni e orientazioni molecolari fra le particelle solide di acqua che si vanno formando. Può darsi infatti che l' intervento delle forze cristallogeniche, troppo spesso dimenticate o neglette, renda superflui, nella teoria della grandine, altre induzioni ed altre supposizioni, ogni qual volta si sappia con sicurezza che basta un particolare stato attrattivo di polarità, quale una tensione elettrica può indurre nelle particelle di acqua di iniziale solidità, perchè queste, invece di disporsi lentamente, con perfetta simmetria esagonale, in sistemi piani, di variabilissimo disegno, si precipitino violentemente sopra talune divenute centri materiali di attrazione centripeta, e vi si adunino in sferoidi a struttura raggiata e insieme concentrica, producendo una vibrazione rumorosa come l' aria che si sprigiona dall' acqua vicina all' ebollizione produce una vibrazione rumorosa in condizioni, presso che inverse, ma tuttavia paragonabili.

La grandine, starebbe, secondo tal concetto, alla neve, al ghiaccio, come il calcare pisolitico, sta ai cristalli di calcite e al calcare spatico; come il ferro ossidato pisolitico, o in arnioni, sta all' Oligisto e all' Ematite fibrosa o lamellare; come la Pirite globulare raggiata stà ai cristalli di Pirite, ed alle masse cristalline di questa stessa sostanza.

Potrebbe in qualche caso intendersi la causa eccitatrice delle disposizioni sferoidali, ellissoidali, discoidi, cilindroidi etc., supponendola in un corpuscolo estraneo, in un frammento di diversa sostanza, intorno a cui siasi depositata in completo rivestimento, o annulare, o parziale, una congerie di cristallini elementari, capaci alla lor volta di attrarre altri consimili, e di fissarli sulle loro faccie esterne, sole rimaste libere. — In ciò si trova implicitamente la spiegazione delle forme fibrose a fibre parallele, delle vene o filoncelli di molte sostanze, amianto, crisotilo, gesso, quarzo, aragonite p. es.; — imperocchè vi si ravvisa l' effetto dell' attrazione centripeta, sviluppatasi in tanti centri quanti sono i punti della superficie che è sede del fenomeno, e che risulta di sostanza diversa da quella che va formandosi in filoncelli. — La direzione delle fibre generalmente tendente alla perpendicolarità sulle superficie cui aderiscono, è in ciascun punto la risultante di tutte le direzioni divergenti da quel punto medesimo e dai suoi contigui. Ciò può darsi in vari casi, per es., nelle concrezioni di carbonato, ossalato e fosfato calcare, di cistina, di colesterina, di acido urico, di acido cistifellico, di urato ammoniacale, e via dicendo, dei calcoli vescicali, renali, intestinali, etc. etc.

Ma quando le strutture raggiate sono affatto caratteristiche di molte sostanze minerali; ovvero quando sono inerenti a certe modalità di formazione dei minerali sarebbe strano l' invocare una circostanza accidentale, fortuita, e di valore affatto incostante, come causa di un effetto che si produce regolarmente, e con una tale uniformità di modo, nei diversi luoghi e nei diversi tempi da persuaderci essere devoluto alla ordinaria manifestazione di una legge naturale di cristallogenesi.

D' altra parte le più recenti ricerche sopra quel modo di geminazione polisintetica che produce la PSEUDO-CUBICITÀ nei cristalli, e la loro apparente isotropia, condussero ad un nuovo ordine di riflessioni che allargano ed illuminano vivamente il campo della cristallogenesi.

La PSEUDO-CUBICITÀ delle forme cristalline, può scorgersi in parecchie specie minerali. Il nostro sommo Scacchi la vide e la segnalò pel primo, descrivendo gli pseudo-ottaedri dell' oligisto specolare delle Fosse di Cancarone.

L' illustre mineralista e cristallografo Prof. E. Mallard la discusse largamente in una eccellente opera edita nel 1877. Ma su questo torneremo fra poco.

In conclusione, questa benchè rapida rivista delle sferoedrie minerali ci consente di stabilire in primo luogo: Che la tendenza cotanto manifesta nelle particelle fisiche di solità cristallina, nella fase iniziale che quasi ne rappresenta lo stato nascente, a subordinarsi alle azioni attrattive centripete, per aggregarsi *sfericamente* in forme attondate, curvilinee; mentre, in circostanze diverse le stesse particelle si aggruppano *poliedricamente* in reticoli piani di veri cristalli, dimostra che il grande fenomeno della cristallizzazione *comprende due ordini diversi di energie attrattive*. — Nel 1° ordine si ha la semplice attrazione centralizzata, come causa; la concorrenza degli elementi attratti verso un centro comune, come effetto. Nel 2° ordine si ha l' attrazione con polarità orientatrici secondo determinati assi di simmetria; e la concorrenza degli elementi attratti verso i punti nodali delle maglie di un determinato sistema reticolare, suscettibile di certe determinate pianità limitatrici.

Fra questi due ordini di azioni cristallogeniche possono apparire gradazioni numerose; ma queste sono, in realtà *sintesi anzichè gradazioni;* sono sovrapposizioni, anzichè metamorfismi.

In secondo luogo: che le correlazioni fra la sfericità caratteristica dello stato liquido; la sferoedria delle globosità a struttura raggiata; la isometria dei gruppi raggiati pseudocubici, conducendoci dallo stato *amorfo* de' liquidi, a quello *assolutamente reticolare* dei veri cristalli, isotropici, ortoprismatici e clinoedrici, conferma la cubicità del primo sistema, e nel tempo stesso segna alcuni termini di più, e assai significanti nella serie progressiva degli stati fisici della materia inorganica.

Ciò posto riassumiamo in tre frasi, messe in confronto e in parallelismo, le fatte distinzioni :

I.

Cristallizzazione sferoedrica

Le particelle fisiche , concorrono al pari di quelle dello stato liquido, verso un centro di attrazione prevalentissima. Le direzioni di tale energia attrattiva sono i raggi di una sfera.

Le masse sferoidali che ne conseguono hanno la struttura caratteristica fibroso-raggiata.

II.

Cristallizzazione poliedrica

Le particelle fisiche si aggruppano, in date maniere, costanti per ciascuna sostanza, intorno ai nodi equidistanti e solidali, dei reticoli piani di assettamento cristallogenico. Ogni nodo rappresenta un centro attrattivo. — Ne conseguono le strutture regolari, e le forme poliedriche, unitarie, dei veri cristalli.

III.

Cristallizz. pseudocubica, etc.

Le particelle fisiche si coordinano nelle direzioni di tre assi di simmetria, sviluppando intorno a questi assi le forme cristalline loro proprie. — Ne derivano sia dei gruppi poligemini di evidente adunamento di poliedri distinti, ovvero delle forme isometriche con apparenti isotropie.

Questa terza condizione potrebbe considerarsi come intermediaria fra la prima e la seconda; la prima figurando come un termine di transizione fra le sfericità inerenti allo stato liquido, e le poliedrie della solidità fisica, assoluta e realmente caratterizzata da speciali coefficienti di calorico specifico, di densità, e di attitudini molecolari.

La singolare configurazione verticillata a forma di grandi rose, delle lamine cristalline di neve.

Essendomi interessato alquanto della singolarissima maniera di cristallizzazione, prodottasi con tanta varietà e magnificenza sulla nevicata del 14 Gennaio (1880), e ritenendo straordinario presso di noi, in Italia, forse dovunque, un fenomeno di tal genere ed avendovi trovate molte particolarità istruttive per la storia fisica dell' acqua nei suoi stati di equilibrio molecolare, quindi per il soggetto principale di questa Memoria, così mi permetto una digressione e sottopongo a questa illustre Accademia il risultato delle osservazioni che ne feci. Presento pure alcune fotografie e alcuni disegni per ricordare quel fenomeno agli occhi dei miei egregi colleghi.

Si tratta della improvvisa e inopinata comparsa, sul vastissimo strato di neve che già si distese sopra gran parte d' Italia, segnatamente nella regione settentrionale, dalle Marche e dalle Romagne fino all' alta Lombardia, attraverso le provincie dell' Emilia, di grandi e stupendi verticilli di lamine flessuose a contorni delicatamente curvilinei; e di espansioni fogliacee, laminari, allineate secondo am-

plissimi parallellismi, o fittamente coordinate in zone; e queste sui declivi, e sui margini occasionati dalle discontinuità delle distese di nevi.

Quei verticilli erano meravigliosamente imitativi delle corolle polipetale, doppie e stradoppie, che le rose; le camelie, le cardenie, e tante altre bellissime infiorazioni presentano; ovvero di certi strobili a brattee od a carpelle molto aperte e dilatate; ovvero di certi accartocciamenti e di certi invogli florali; ovvero di squamme e di scaglie, bianche translucide; ovvero di valve di conchiglie. I margini, o contorni di tali espansioni cristalline sempre erano incurvati graziosamente, o frastagliati con finissima modalità, come quelli dei veri petali, nel maggior numero dei fiori a grandi e regolari corolle.

Non mi tratterrò soverchiamente sulla descrizione del fenomeno che qualificai dicendolo — DEI FIORI DI NEVE —, ma che potrebbe più esattamente intitolarsi: LA CRISTALLIZZAZICNE ROSACEA E FOGLIATA DEL VAPOR ACQUEO CONGELATOSI.

Una breve notizia, firmata xx, ne comparve già fino dal 17 Gennaio decorso, come appendice di un giornale cittadino; e nel primo fascicolo di Gennaio (1880) dei C. R. dell' Accademia delle Scienze di Francia si trova pure un cenno del fenomeno istesso, fatto conoscere a quell' Istituto dal Sig. Touchembert, coll' invio di alcune fotografie. Da quel cenno rilevasi che nei dintorni di Poitiers cominciarono il 24 Dicembre a prodursi le disposizioni corolliformi, dette a *pompons*, sulla neve caduta fino dal 6 Dicembre, nel Dip. della Vienna, e altrove, in Francia; che raggiunsero due o tre decimetri di diametro; e che i petali, configurati come quelli delle rose erano longitudinalmente striati.

Chiamerò — fiori di neve —, per semplicità e chiarezza, le disposizioni verticillate di corolle simili a grandi rose, e quelle concorrenti ad estesi parallelismi, ad orientazioni largamente uniformi, delle neve cristallizzata.

Ricorderò che il meraviglioso fenomeno ebbe principio verso la metà del Gennaio decorso, per esaurirsi in questi primi giorni di Febbraio, in Bologna e nelle vicinanze, sia per il soffio caldo dello scirocco, sia per il pioviscolare che vi si aggiunse.

Dalle Romagne all' alta Lombardia, attraverso i territorî di Pesaro, di Forlì, di Bologna, di Modena, di Parma, di Piacenza, di Milano, si produssero le corolle e le lamelle di neve.

Apparvero sterminatamente diffuse, con ogni immaginabile modo di distribuzione e di agglomerazione, tanto sulle candidissime distese di neve pura ed intatta, sui campi, sulle praterie, sui margini di torrenti e di fiumi, sulle pendici delle colline, fin verso l' Appennino; quanto sugli strati o lenzuoli di neve che copersero i tetti, i terrazzi, le piazze e le vie in città; perfino sui cumuli, sugli ammassi informi e inquinati da fanghiglie, da spazzature di strada.

Trasformarono le già unite superficie degli strati nevosi, lievemente ondulate, minutamente granellose, dopo che il sole, l' aria, il rigelo, ne avevano modificata

la iniziale costituzione aghiforme, in immense aiuole, dove bene spesso apparivano così belle, così meravigliosamente sviluppate, con ogni graziosa ed elegante fillotassi di larghissimi petali, le forme delle rose e delle camelie, così vagamente disposte in gruppi flessuosamente allineati o convergenti, che faceva pena il dover pestarvi coi piedi, il doverli abbandonare, per cercarne di vieppiù sorprendenti, il dover rinunciare ad ogni tentativo di conservarne qualche privilegiato esemplare.

I bozzetti grossolanamente acquerellati che, in mancanza di migliori presento all' Accademia, per dare idea di alquanti gruppi di fiori di neve da me copiati dal vero, sono insufficienti per riprodurre la delicata e inimitabile finezza delle rose di neve (V. Tav. I e II) le fotografie stereoscopiche che pure presento, servono tutt' al più a giustificare quei bozzetti, che taluno potrebbe credere esagerati nel loro carattere, dal capriccio o dalla fantasia.

Dappertutto pareva che l' osservazione, ancorchè non zelantissima, colpisse qualche nuova particolarità degna di essere registrata. Nelle parti più difese dai raggi del sole, e declivi, si notavano i più vasti allineamenti e i parallellismi più decisi, delle lamelle a foggia di squame o di valve di conchiglie; dove il terreno irraggiava un po' più di calore che altrove, e fondeva la neve sotto lo strato superficiale ridotto a crosta più resistente per le reiterate e alternanti fusioni parziali e potenti rigeli, si potevano scuoprire ampie cavità, cunicoli nascosti, trasformati in geodi dai fitti aggregati di cristalli fogliacei che ne tappezzavano le pareti. Dove il sole agiva a lungo sui mucchi di neve, e sui grossi strati, sulle piazze, sui tetti, fondeva lentamente, perchè debole malgrado la limpidità dell'aria, la neve superficiale, producendo una infiltrazione di goccioline che appena sottrattesi alla sua azione si congelavano, cementavano li strati meno esterni, generando un curioso intrecciamento di limpidissime stallattiti, di diafani fusti e fascetti di ghiaccio, rassomiglianti ad un confuso aggregato di bastoncelli e di lamelle di vetro, che dopo di essersi ammassati si fossero parzialmente fusi, contorti e saldati insieme; e su di siffatto intrecciamento friabilissimo non tardavano a costituirsi bianche e graziose le corolle di neve, distendendosi con tale uniformità e vaghezza da far dubitare della inconsapevole naturalezza di così strano fenomeno.

Taluno credette di vedere disposti a spirale i petali interni di alcuni fiori nevosi; tutti poterono rimarcare che le lamine petaloidee di quei fiori avevano una disposizione strutturale raggiata, resa viemeglio palese verso i lembi più sottili, specialmente dopo che un incipiente fusione gli aveva resi più trasparenti e striati. Inoltre che le dette lamine parevano talvolta semplici, tal altra erano cospicuamente formate dall' addossamento di lamelle più piccole, sovrappostesi le une parallele alle altre; che le più piccole ricordavano già il tipo esagonale delle stellette di neve; infine che parecchi petali, nelle rose più grandi, erano pianeggianti, rigidi, ad angoli diedri nelle loro intersezioni reciproche, lucidi e specchianti, perciò rifulgentissimi al sole.

I più comuni fra i fiori della neve presentavano, al pari delle rose bene sboc-

ciate, dilatati e quasi cadenti i grandi petali più esterni, mentre restavano stretti e accartocciati in un bocciolo centrale quelli prossimi all' asse di ogni singolo gruppo verticillato.

Le dimensioni erano variatissime; anzi bene spesso indefinite, per il mantenersi in ampî tratti delle iso-orientazioni e delle strutture verticillate, intorno ad un centro comune. Tuttavia si notarono fiori di pochi centimetri, fino a più decimetri di diametro; petali di 5 a 8 cent. di superficie. Finalmente, avvertirò che in mezzo a tanta grandiosità ed estensione dello svolgimento dei verticilli rosacei sulle nevi, sussistevano, quà e la, in città e in campagna, plaghe, in generale non vaste, prive di fiori, ossia colla superficie dello strato di neve granellosa, ineguale, come sempre riducesi, e come sempre si vede.

Dirò adesso quale idea mi sono formato sulle cause determinanti del fenomeno di cui si tratta, e sul meccanismo efficiente che quelle cause attivarono.

Ritengo prima di tutto che il prodursi di una così vasta cristallizzazione, con tanta singolarità di carattere, *esiga il concorso di diverse favorevoli circostanze;* credo che il difetto di una qualunque di tali circostanze basti ad impedire la formazione delle corolle florali della neve, ovvero a far cangiare considerevolmente il carattere strutturale dell' acqua che mercè la neve si ricristallizza.

Questa persuasione mi spiega la rarità del fenomeno; rarità fatta probabile, almeno nei nostri paesi, dal non conoscersi alcuna descrizione chiara ed esplicita di consimili avvenimenti; dal non esser mai registrata la forma corolloide della neve in nessuno di quei trattati che tengono conto esatto delle proprietà fisiche e cristallografiche dell' acqua, delle nevi, delle gragnuole, dei ghiacci e delle brine.

Ecco le condizioni, secondo me indispensabili, ed avveratesi appunto mentre avveniva la nevicata del Dicembre, e nei giorni consecutivi:

1ª Una nevicata abbastanza copiosa per durare parecchi giorni, se le pioggie o le sciroccate non la squaglino;

2ª Purezza e calma dell' atmosfera, quale difficilmente si verifica nei mesi invernali, accompagnata da freddi intensissimi, malgrado la libera azione del sole;

3ª Formazione di vapori bastevoli a saturare di vescicole acquose lo strato sovraincombente alla neve, durante il giorno, per saturarlo poi di particelle cristalline nelle ore vespertine e notturne;

4ª Movimento molecolare, sulla superficie della neve, eccitato dalle alternative di aumento e di diminuzione nella temperatura, quindi di liquefazioni parziali, di parziali rigeli, di distruzione di prismi che si squagliano, di nascita o di accrescimento di nuovi prismi, o di nuove lamelle che si rigenerano; e tutto questo per l' alternarsi delle ore freddissime di sera e di notte alle men fredde diurne; per il continuo spostamento delle incidenze dei raggi solari, delle direzioni di ventilazione, delle ombre portate, in alcune aree, delle irradiazioni riflesse, in altre.

Quel movimento molecolare va sostituendo al confuso miscuglio di aghetti ne-

vosi e di goccioline liquide, di fiocchetti e di granelli congelati, una struttura più uniforme, e tendente ad una speciale regolarità.

Le prime tre condizioni furono soddisfatte in modo veramente eccezionale, e generalmente apprezzato, nell' occasione della neve che cadde; la nevicata fu abbondantissima, e se ne vedono tuttora le rimanenze; l' atmosfera ben presto si ridusse e poi si mantenne, pura, calma, con serenità di cielo e fulgidezza di sole; i vapori non solo si sollevarono dalla neve, saturando l' aria sovraincombente; ma si addensarono altresì sul far della sera le nebbie.

Quì in Bologna, fu appunto nei giorni successivi al sollevarsi di quelle nebbie vespertine, completamente dileguate al mattino, che si notò la prima apparizione dei fiori di neve.

Inoltre moltissime persone notarono e i giornali stessi affermarono che il condensamento di quei vapori, di quelle nebbie, avveniva in forma di finissimo nevischio. Era una finissima e quasi secca *nevicata a ciel sereno;* era una copiosa precipitazione di particelle cristalline, dagli strati poco elevati sul suolo, quale suol vedersi spesso nelle soluzioni saline sature a caldo e rapidamente raffreddate o mescolate a un tratto con acqua fredda.

Potrebbe credersi che la spiegazione della cristallogenesi dei fiori di neve si riduca a dire: il vapor acquoso, elevatosi di sera, in forma di nebbia; condensatosi durante la notte, si congelò in particelle cristalline; queste si precipitarono producendo una singolare e indescernibile nevicata a ciel sereno, sulla superficie del suolo, coperto del mantello di neve; e addossandosi tali particelle, le une sulle altre, come nelle ordinarie cristallizzazioni di soluzioni sature, fecero sorgere rose di neve, sopra quella superficie istessa.

Ma tale spiegazione, in parte giustissima, è insufficiente. Se tutto si riducesse a questo, il fenomeno della cristallizzione a grandi corolle e a verticilli di lamine sarebbe ben più frequente, sarebbe uno dei fatti più comuni delle nevicate invernali e delle nevate perenni sulle elevate montagne. Poichè è cosa ben comune che dalla superficie della neve si innalzi durante il giorno del vapore acquoso, per ricondensarsi, in particelle o in aghetti cristallini durante la notte.

D' altronde essa non rende ragione di quelle particolarità che facilmente si notavano nelle ampie distese di fiori di neve, e che le fotografie ed i disegni dimostrano. Difatti, se guardiamo le lamine o espansioni petaloidee nel loro assieme bene spesso si trovano oltrechè colle disposizioni classicamente accartocciate in grandi verticilli, in corolle rosacee, polipetale, anche in larghe e prolungatissime zone di adunamenti con dominante parallelismo, ossia con una quasi identica orientazione.

Questo fatto basta a dimostrare l' esistenza di una qualunque azione direttrice, estrinseca alle attitudini inerenti di ciascuna particella, ma valida a produrre a distanze considerevoli le iso-orientazioni delle singole particelle iniziali, stipiti di successive espansioni laminari, cristalline; e rassomiglia a quello pel quale le foglie

di un albero si dirigono verso una data parte, malgrado la loro disposizione fillotassica, se da quella parte lor giungano più a lungo e più attivi il calore e la luce; o se verso quella parte si propaghi un vento abbastanza gagliardo. Rassomiglia pure alla prevalente uniformità di direzione dei corpuscoli della limatura di ferro sotto la potente attrazione di una calamita; alla uguale orientazione dei cristalli di certi filoni, sotto l'impulso di un movimento generale, ascendente, di vapori metalliferi, di acque mineralizzate, ossia delle cagioni prime della genesi di quelli stessi cristalli; — somiglia, infine, al fatto notissimo, e da chiunque riproducibile, del sorgere i cristalli, sul fondo di un recipiente che contiene qualche soluzione satura, con identiche posizioni rispettive, con iso-orientazioni uniformi, ogni qualvolta su quel fondo preesistano altri cristalli appositamente disposti con regolare assettamento; mentre se questa condizione fosse mancata i cristalli consecutivamente nascenti e cadenti, si sarebbero aggregati fra loro confusamente, senza ordine e senza alcuna reciproca simmetria.

Un' altra particolarità è questa: le singole espansioni petaloidee dovunque accomodate fra loro in piani differenti, sopra un dato punto del terreno o della nevata, bene spesso offrivansi larghe, bene sviluppate, nelle parti più elevate, distanti dal suolo, mentre nelle parti sottoposte, da esse adombrate e difese, le fogliette cristalline vedevansi più dilicate ma più regolari, più sottili ma più lucenti, infine più facilmente accompagnate da lamelle esagone, da stellette facciettate, ricordanti le stellette della neve cadente.

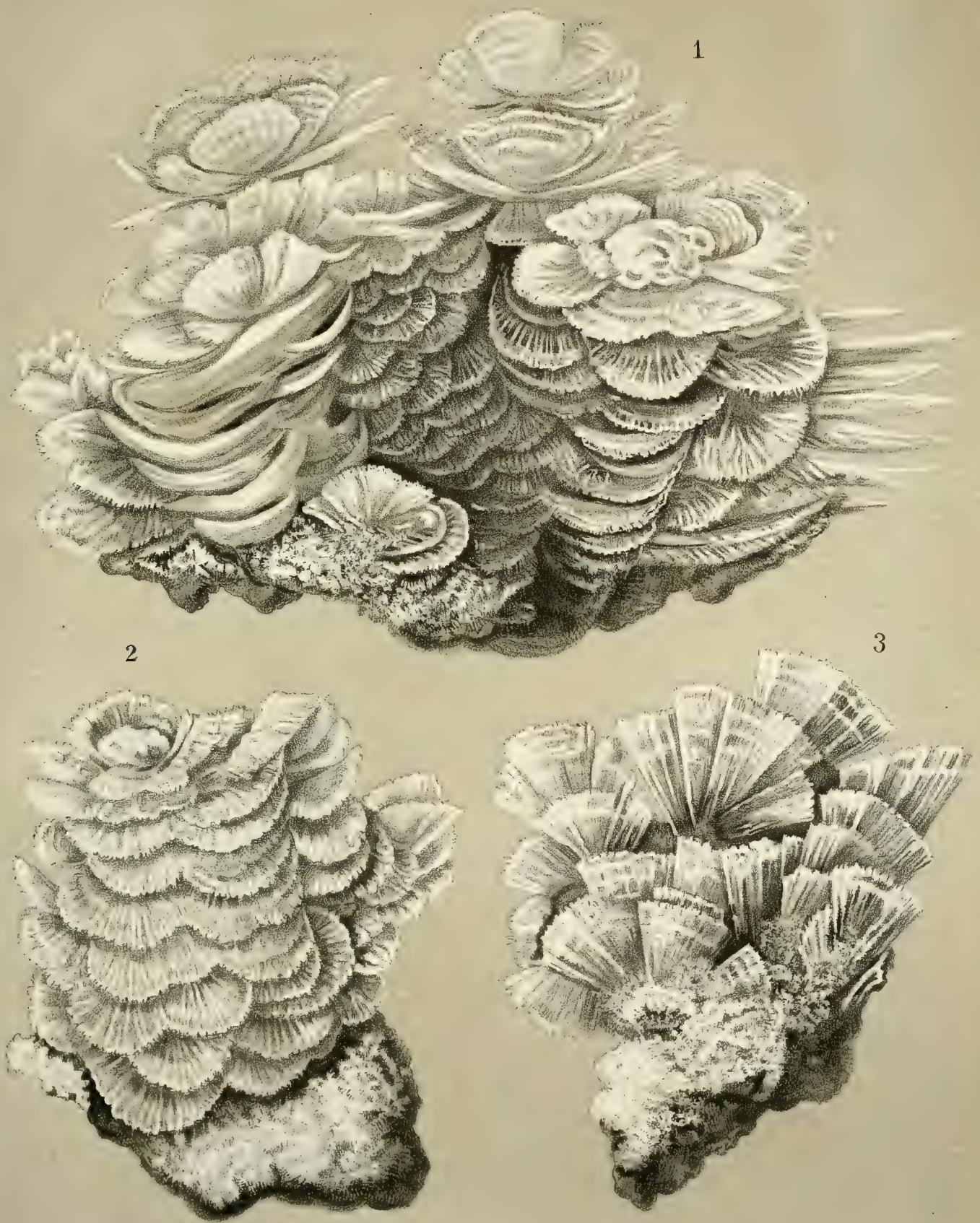
Questo esclude evidentemente la possibilità che il semplice precipitarsi di particelle cristalline, sopra di una superficie *qualsiasi,* e in qualunque modo costituita nella sua struttura, abbia, senz' altro concorso di azioni concomitanti, determinata la formazione di quei fiori di neve. — Generatisi i primi embrioni di quelle espansioni, per il deporsi dei primi cristallini, essi si sarebbero accresciuti in ragione del sopraggiungere di nuove particelle; avrebbero rivelata la confusissima loro distribuzione, casualmente avvenuta sulla superficie dove erano caduti, ed il disordinato intrecciarsi delle singole lamine, delle espansioni petaliformi sarebbe stata la naturale, inevitabile conseguenza di quelle condizioni.

La sovrapposizione di più serie di lamine, a diverse altezze; i loro fitti intralciamenti nelle cavità trasmutate in geodi, confermano l' intervento di azioni direttrici già stabilitesi, nelle superficie dipoi coperte dai fiori di neve, e manifestano l' influenza compiuta da quelle attività molecolari.

Quale era l'indole, la natura propria di tali attività? ossia, quale era la potenza direttrice derivata da quel movimento molecolare che ho ammesso come ultima condizione *sine qua non* del prodursi dei fiori di neve, e che considero come risultato delle oscillazioni termiche dell' aria ambiente?

È una cosa semplicissima; tutto riducesi ad un ampliamento della struttura cristallina, superficiale, negli strati e negli ammassi di neve, avvenuto prima del formarsi delle nebbie vespertine, e forse continuatosi nei periodi della loro formazione.

L. Bombicci dis.º dal vero C. Bettini dis.º in pietra Lit. G. Wenk.

L. Bombicci dis.º dal vero C. Bettini dis.º in pietra Lit. G. Wenk.

È cosa notissima che se una soluzione satura, dopo di aver lasciato deporre sul fondo del recipiente che la contiene uno strato di piccoli cristalli, confusamente aggruppati, subisce alternative e sensibili variazioni di temperatura, variando perciò il proprio potere dissolvente, ridiscioglie parte dei cristalli già depostisi, mentre si scalda, e torna a deporre quanto già ridisciolse mentre si raffredda. Ne consegue che *i più piccoli cristallini spariscono* durante i periodi di dissoluzione; che *i più grandi s' impossessano della sostanza da cui quelli erano già formati.* In definitiva, dove si avevano moltitudini disordinatissime di piccoli cristalli si finisce coll' averne pochi ma voluminosi; talmente che può teoricamente prevedersi la riduzione di tutta la massa ad un unico cristallo, purchè il fatto si protragga abbastanza a lungo, e con oscillazioni sufficientemente valide per indurre la necessaria alternanza di dissoluzioni e di precipitazioni di particelle cristalline.

Anche colle sostanze volatili e cristallizzabili per la così detta loro *sublimazione* può mettersi in evidenza questo fatto. Se un tubo di vetro, nel quale siasi ermeticamente chiuso del vapore di jodio, che presto condensandosi ne veste le interne pareti con una unita vernice di aspetto metallico, sia esposto a non eccessive oscillazioni di temperie, finisce collo spogliarsi di quella vernice e coll' ospitare poche e bellissime lamine di tipo romboedrico.

Quando la temperatura si eleva parte del jodio si volatilizza, e i più piccoli cristallini, evaporandosi completamente, spariscono; quando si raffredda, il vapore si condensa; e invece di ricostruire quei cristallini già disfatti, produce l' aumento dei superstiti. Ripetendosi il fatto, poco a poco ne consegue l' incremento massimo dei più voluminosi, la scomparsa dei minimi. È, quasi direbbesi, un caso speciale della lotta per l' esistenza.

Or bene; sulla neve che per migliaia di ettari rimase per più giorni esposta al sole, durante il giorno, al freddo intensissimo della notte, mentre calma e tranquilla era l' aria, limpido e sereno il cielo, avveniva, alternatamente la parziale liquefazione dei cristallini di acqua congelata, e la loro rinnovata solidificazione. I cristallini superstiti crescevano di volume, mercè le particelle rigenerate dall' acqua di quelli che si erano fusi, e che avanzava, bagnandoli per adesione e capillarità, dalla inevitabile infiltrazione, per via del loro peso. Intorno a questi viecrescenti poliedri si aggruppavano nuovi embrioni, poi nuovi cristallini, secondo le multiple geminazioni a 60° e 120°, che tanto splendidamente caratterizzano le stellette di neve, le rosette delle brine e dei veli gelati sulle superficie piane e freddissime.

Adunque, sotto l' azione di cause generali, *uniformente attive sopra aree relativamente vaste,* quali il calor diurno del sole, il notturno raffreddamento e la irradiazione verso lo spazio si predisponevano degli aggregati simmetricamente esagonali, ad elementi concentricamente coordinati,, o parallelamente disposti nelle zone di eguale orientazione. — Ed è pienamente possibile, probabile anzi, che sempre, sulle nevi che durano, simile lavoro molecolare si compia; in vario grado bensì,

ma reso indiscernibile, latente, inesplorabile, dalla piccolezza estrema degli elementi che vi concorrono, dalla loro effimera esistenza, dalla loro rapida evanescenza per poco che un alito tepido li rasenti, che una mano vi si accosti, che un urto li disgreghi e li disperda.

Supponiamo adesso che intorno a questi iniziali elementi stellari, fra loro adunati con diverse foggie , ma con simmetrie prevalenti intorno a centri di attrazione dominante, con posizioni variate sì, ma per lo più in seguito alle leggi diverse di geminazioni possibili, si addensi un' atmosfera di nuove particelle, pronte a deporsi sulle forme già costituitesi; a dar loro indefinito incremento, a sviluppare in guisa ampia e grandiosa, le simmetrie già latenti. Appariranno all' occhio, e tanto più repentinamente e grandiosamente, le forme invisibili, le disposizioni intime della massa, nella stessa guisa che nello sbocciare di una rosa, nell' ampliarsi dei suoi verticilli di petali, e dei suoi organi sessuali vediamo svolgersi ed ingrandirsi la disposizione simmetrica che nella gemma fiorifera restava latente ; come dall' ingrossare dei cotiledoni, dallo svolgersi della pianticina, si pone in vista la struttura congenita dell' embrione.

Le nebbie che si condensavano in goccioline che alla lor volta si gelavano in minutissimi cristalli, costituivano appunto quella atmosfera eminentemente propizia e indispensabile ad un tempo per lo svolgersi dei fiori di neve, sulle simmetriche strutture microscopiche e superficiali degli strati di neve ; la invisibile nevicata a ciel sereno, che nei più bassi strati dell' aria e rasente il terreno avveniva su quelli strati, e che bene spesso derivava dal congelamento di quel vapore che delle nevi stesse svolgevasi sotto i raggi del sole, faceva sì che l' aria circumambiente ai centri di attrazione poteva allora paragonarsi ad una soluzione satura, nella quale si formano, ondeggiano e si depongono i minimi poliedri che presiedono all'aumento dei cristalli già formatisi.

In conclusione, se pel concorso eventuale di circostanze non si effettui sulla superficie degli strati di neve, o dei corpi già bagnati da veli acquosi che si congelano, un lavoro molecolare, predisponente agli aggregati multipli, poligemini e stellati, a tipo raggiato, il sopravvenire di nuove particelle cristalline non vale che ad accrescere il confusissimo miscuglio di prismetti e di granuli delle ordinarie nevicate. Se invece quel lavoro molecolare può compiersi, ne consegue, pel favore delle notate circostanze uno dei fatti più belli e grandiosi che nella storia della cristallizzazione si sieno fin ora registrati.

FINE DELLA PARTE PRIMA.

RICERCHE ANATOMICHE

SULLA

RIZZOLIA PEREGRINA

MEMORIA

DEL PROF. SALVATORE TRINCHESE

(Letta nella X. Adunanza, 22 Gennaio 1880)

Rizzolia, *Trinchese.*

Corpo gracile, snello; rinofori semplici, più corti dei tentacoli; angoli anteriori del piede prolungati in forma di tentacoli; papille dorsali lunghe, sottili, cilindriche, disposte in serie trasversali sopra cuscinetti molto elevati rettilinei o piegati a ferro di cavallo. Ano latero-dorsale, situato dietro la regione pericardiaca, presso il margine posteriore del secondo cuscinetto branchiale destro; radula uniseriata, con denti muniti di cuspide molto grossa e prominente; mascelle con processo corto e margine masticatorio munito di un solo ordine di denti grossolani e di forma irregolare.

Rizzolia peregrina, *Gmelin.*

— .... *la prima delle nostre lumache.* Cavolini, Memorie per servire alla storia dei polipi marini. Napoli 1785, pag. 190. Tav. VII, fig. 3.

Cavolina, (p. p.), Bruguière. Encyclopédie meth.; planches des vers, pl. 85, fig. 4 (esclusa fig. 5).

Doris peregrina, Gm.; Systema nat. pag. 3105.

Cavolina peregrina, Cuv.; Regne anim.; Paris.; Fortin et Masson. Mollusques, pag. 82; pl. 30 bis, fig. 3.

Eolidia pellegrina, Verany. Descrizione di Genova, 1846; Vol. I, pag. 106, N. 43.

Eolidia peregrina, Costa. Annuario del museo zoologico della R. Università di Napoli, 1866, pag. 69, Tav. II, fig. 1.

Nella sessione del giorno 17 maggio 1877, presentai a questa Accademia una descrizione sommaria del genere Rizzolia da me fondato e dedicato al nostro benemerito presidente Prof. Francesco Rizzoli. Come tipo di questo genere io presi un graziosissimo animale scoperto da Cavolini nel golfo di Napoli e da lui descritto come una *lumaca* nel 1785.

Gmelin nel *Systema naturae*, pubblicato nel 1789, diede all' animale descritto e figurato da Cavolini, il nome di *Doris peregrina.*

Bruguière nelle tavole dell' *Encyclopédie methodique*, pubblicate nel 1792, staccò giustamente questo mollusco dal genere Doris e ne formò il genere *Cavolina* (meglio *Cavolinia*), senza sapere che questo nome era stato adoperato da Gioeni sin dal 1783 per indicare un genere di pteropodi tecosomi.

Più tardi Cuvier accettò il nome creato da Bruguière, ignorando pur esso che quel nome era stato già applicato ad un altro gruppo di animali.

Nel 1864 R. Bergh fondò il genere Cratena (1) e vi incluse le Cavolinie senza pensare che queste ultime hanno gli angoli anteriori del piede prolungati in forma di tentacoli, mentre le Cratene li hanno arrotondati. Le cratene hanno i tentacoli più corti dei rinofori, mentre le Cavolinie li hanno molto più lunghi. Io credo che Bergh abbia giustamente incluse nel genere Cratena le seguenti forme comprese già da Alder e Hancock nel genere Aeolis:

Cratena pustulata, A. e H.
„ amaena, A. e H.
„ aurantiaca, A. e H.
„ viridis, A. e H.
„ olivacea, A. e H.
„ glottensis, A. e H.
„ arenicola, Forbes (2);

alle quali io credo si debba aggiungere la:

Cratena vittata, A. e H.

Cavolini descrisse così esattamente le forme esterne di questo animale, che oggi poco si può dire a questo proposito senza ripetere il già detto da lui.

Ecco in fatti come egli si esprime:

„ Due lumache frequentano le grotte e sulle descritte sertolarie hanno piacere
„ di aggirarsi e massime sulla racemosa, ove le fila delle uova attortigliano e
„ forse dei vivi loro fiori si pascolano......

(1) R. Bergh. Anatomiske Bidrag til Kundskab om Aeolidierne. Copenaghen 1864, pag. 75.

(2) R. Bergh. Malacologische Untersuchungen — Nel Reisen im Archipel der Filippinen di C. Semper; zweiter Theil, zw. Band, pag. 1-12.

„ Queste due specie di lumache (la *Rizzolia peregrina* e la *Flabellina affinis*)
„ hanno il corpo allungato e sulla fronte hanno quattro corna, ossian tentacoli,
„ i quali entro di loro stessi non si ritirano come accade alle Doridi: inoltre la
„ bocca è provveduta di un labbro mobile ed ha sotto di se due palpi ossiano
„ orecchiette nei quali par che lo stesso piede inferiore si allunghi.

„ Il colore della prima delle nostre lumache (la Rizzolia peregrina) è un can-
„ dido color di latte ed il dorso è guernito di dieci ordini trasversi di cirri fosco-
„ azzurri. I due tentacoli che sono sulla nuca nascendo tra loro assai dappresso,
„ son bianchi fino al terzo dell' altezza, dove prendono una tinta di elegante coc-
„ ciniglia fin presso alla cima, nella quale sono bianchi; e di questi due tentacoli
„ ciascuno rispettivamente viene nella base congiunto cogli anteriori per una piccola
„ striscia formata da contigue lineette trasverse dello stesso color di cocciniglia;
„ e questi tentacoli anteriori son poi assai più lunghi ed assottigliati in cima.
„ Cominciando dalla nuca, cominciano gli avvisati ordini di cirri, e ciascun or-
„ dine è formato di due gruppi di quelli collegati come in un cespo ed in ciascun
„ gruppo gli esteriori cirri sono sempre più corti. Questi cirri son quasi cilindrici
„ e bianchi, ma compariscono di altro colore per avere come un midollo di color
„ fosco cilestre; il quale midollo si avvolge come una spirale, è fosco nel basso,
„ cilestre in cima: e l' animale movendosi, muove variamente i suddetti cirri come
„ i tentacoli. Dalla parte di sotto dopo la bocca è posto il largo piede della lu-
„ maca, col quale striscia su i corpi e col quale volgendosi all' aria supina cam-
„ mina sulla superficie dell' acqua..... Dalla parte di sopra della nostra lumaca,
„ tra il secondo e terzo ordine di cirri, si vede il dorso elevarsi alquanto e dentro
„ di esso, per cagione della trasparenza della pelle dell' animale, si osserva una
„ pulsazione che obliquamente si fa da sotto in sopra da un corpo che colla base
„ stia attaccato alla parte d' avanti nel basso di quella elevazione; e questo fa
„ pensare essere il cuore..... — Lateralmente a destra, sotto il secondo ordine di
„ cirri e dietro il terzo ordine, comparisce una verruca e ciascuna si apre in un
„ forame, il primo pei genitali, l' altro per gli escrementi; e dall' anteriore forame
„ ho osservato ben sovente nelle lumache serbate nei vasi che due coniche pa-
„ pille si alzino che penso essere gli ordigni della generazione non allungati......
„ delle uova si riempie il loro ventre dal secondo ordine di cirri fin presso la
„ coda, dove per la trasparenza del corpo compariscono di un colore tra il giallo
„ e il rosso: la lumaca se ne sgrava cacciandole in forma di glutinose fila come
„ fanno le ranocchie, e le attortiglia ai rami delle nostre sertolare, o altro corpo „.

La lunghezza del corpo, misurata dal margine anteriore della testa all' apice della coda, varia da $0^m,025$ a $0^m,040$.

I tentacoli sono molto lunghi e raggiungono ordinariamente un terzo della lunghezza totale del corpo, in qualche raro caso però oltrepassano questa misura; essi sono ordinariamente bianco-opachi nella loro metà superiore, bianco-lattei trasparenti nell' inferiore. In qualche raro individuo sono trasparenti in tutta la loro lunghezza.

I rinofori sono più corti dei tentacoli e non offrono la menoma traccia di perfoliazione. La loro lunghezza è ordinariamente circa un quinto della lunghezza totale del corpo; in qualche caso però sono alquanto più lunghi.

Queste misure sono state prese sopra individui viventi nel momento della loro massima estensione.

Le macchie rosse che si trovano sul capo tra la base dei tentacoli e quella dei rinofori, sono bislunghe e formate di otto o nove lineette contigue di color minio che volge talvolta al carminio. Queste lineette si dirigono obliquamente dal di dentro all' infuori, è dal di dietro all' innanzi.

Il piede, secondo Bergh, è più stretto del corpo negli individui conservati nell' alcool; però nell' animale vivente è alquanto più largo. Il suo margine anteriore presenta un solco profondo il quale si continua sugli angoli laterali molto prolungati in forma di tentacoli. Il colore generale di questo organo è bianco-latteo trasparente.

Le papille dorsali sono disposte in serie trasversali sopra cuscinetti molto elevati, il cui numero varia da 9 a 11 per lato, secondo le osservazioni di Bergh, da 8 a 9 secondo le mie. L' epitelio dei due terzi inferiori di ogni papilla è incoloro, quello del terzo superiore è azzurro schietto; questo colore non appartiene dunque al lobo epatico, come credeva Cavolini. Il lobo epatico contenuto nelle papille è ora di color di terra d' ombra scuro, ora di color ranciato nei suoi due terzi inferiori; di un bel rosso carminio nel terzo superiore.

Negli individui da me osservati, il primo cuscinetto branchiale era piegato a ferro di cavallo, colla sua concavità rivolta in basso ed un poco in avanti. Sulla branca anteriore di questo cuscinetto v' era una doppia linea di papille. In qualche individuo è piegato nel modo suddetto anche il secondo cuscinetto branchiale, il quale porta anch' esso una doppia serie di papille nella sua branca anteriore.

Le papille sono sottili, allungate e a sezione trasversa circolare; sono rivestite di epitelio cilindrico a cellule molto lunghe, aventi un nucleo molto piccolo. L' epitelio poggia sopra uno strato di fibre muscolari trasversali, sotto il quale ve ne è uno di fibre longitudinali; quest' ultimo è più spesso del primo (Tav. III, fig. 3, *b*). La cavità papillare è piena di tessuto congiuntivo lasso.

Il sacco cnidoforo è allungato, piriforme e sessile; la sua cavità è divisa in due parti ben distinte; una superiore (Tav. III, fig. 3, *d*), trasparente e priva di epitelio, l'altra inferiore (*c*) opaca e contenente le cellule cnidofore. Da quest' ultima parte un tubo trasparente (*e*) il quale s' inoltra nel mezzo della porzione superiore e si spinge probabilmente sino all' orifizio esterno del sacco cnidoforo. Le pareti di questo sacco sono formate in massima parte di fibre muscolari liscie longitudinali e trasversali; la sua porzione superiore presenta talvolta due o tre strozzamenti trasversali (Tav. II, fig. 7, *a*, *b*). Le cnide sono piccolissime e piriformi.

Il lobo epatico contenuto nella cavità delle papille è sottile e bernoccoluto. Le cellule epatiche sono rotonde e riunite in gruppi che fanno sporgenza nel

lume del lobo. In un individuo conservato nel liquido di Owen, esse mostravano nel loro interno tre o quattro granuli rifrangenti la luce fortemente (Tav. III, fig. 3, *f*) ; questi granuli erano forse l' effetto di una profonda alterazione prodotta nel nucleo di queste cellule dal suddetto liquido.

Il bulbo faringeo è piuttosto piccolo ed allungato (Tav. II, fig. 1-3). L' orifizio orale posteriore è piuttosto piccolo (fig. 2, *b*) ed è circondato da un cercine muscolare robustissimo (*a*). Le mascelle sono molto robuste e di colore giallastro scuro, corneo; il loro fulcro è grosso, semplice e conico (Tav. II, fig. 4, *a*) ; sulla loro faccia esterna vi è una cresta conica, allungata, diretta dall'avanti all' indietro (fig. 5, *a*) al di sopra della quale trovasi un infossamento, un solco (*b*) diretto dall' alto in basso. Il processo masticatorio è corto ma largo e robusto (fig. 4, *b*) ; il suo margine masticatorio è munito di un solo ordine di denti di forma molto irregolare, alcuni dei quali presentano delle piccole eminenze nella loro faccia interna. In generale essi sono molto piccoli, nella parte anteriore del margine masticatorio (Tav. III, fig. 1, *a*); ma poi ingrossano rapidamente andando verso la regione posteriore del suddetto margine.

Non ho potuto fare ricerche molto estese sulla lingua, perchè il materiale da me raccolto, per una imprevedibile circostanza, andò a male in gran parte.

La radula è formata di una sola serie di denti in forma di ferro di lancia, con cuspide triangolare molto grossa e prominente (Tav. II, fig. 6 ; Tav. III fig. 2). I dentini laterali variano in numero nei diversi denti: ve ne sono da 6 a 10. Il colore dei denti è giallognolo-scuro, quasi corneo. Secondo Bergh il loro numero va sino a 25.

L' esofago è piuttosto corto e stretto e mette in uno stomaco corto pur esso e lievemente allargato nella sua regione anteriore (Tav. II, fig. 9, *b*). Dalla sua estremità posteriore, a destra, parte l' intestino (*e*), il quale in principio è molto largo, ma poi si restringe gradatamente scorrendo attraverso il dorso. Esso rasenta il margine anteriore del pericardio, e giunto al margine destro di quest' organo, si volge in basso e inaddentro; poi, facendo gomito, si dirige in alto e in addietro, e va a terminare nella papilla anale che trovasi immediatamente dietro il margine posteriore del secondo cuscinetto branchiale destro. Talvolta questo cuscinetto è piegato, come il primo, a ferro di cavallo ; allora la papilla anale trovasi tra le due branche di esso.

Lo stomaco si continua insensibilmente col condotto epatico principale posteriore (Tav. II, fig. 9, *c*, *d*), e non si può dire veramente dove quello finisce e dove questo principia. Il condotto epatico principale posteriore si approfonda alquanto nella glandula ermafrodisiaca (*d*) e scorre in essa dall' avanti all' indietro coperto da un sottile strato di lobuli ermafrodisiaci.

La glandula ermafrodisiaca (Tav. II, 9, *g* ; fig. 8, *h*) è formata di lobuli i quali sono stati molto bene figurati da Bergh. Essi sono composti di 10 o 12 acini ovigeri, i quali sboccano in uno spazio che occupa il centro del lobulo ed

è pieno di spermatozoidi. I lobuli sono liberi, cioè non riuniti in lobi come accade nel maggior numero di Aeolididae.

R. Bergh ha veduto una spermatoteca di forma rotonda ed il sacco del pene piriforme.

La papilla genitale trovasi sotto la branca posteriore del primo cuscinetto branchiale (Tav. II, fig. 8 *i*).

Il sistema nervoso centrale non è stato figurato da alcun osservatore. I gangli cerebro-viscerali sono ellittici, molto allungati e non mostrano la menoma traccia di divisione tra la loro porzione cerebrale e la viscerale (Tav. III, fig. 5 *a*). I gangli del piede (*c*) sono quasi sferici ed hanno un diametro che raggiunge appena la metà di quello dei cerebro-viscerali. La commissura cerebrale (*b*) è molto breve ed è più vicina alla faccia inferiore che alla superiore dei gangli cerebro-viscerali. La commissura pediea è alquanto più lunga della cerebrale (fig. 4 *c*).

Gli occhi, molto piccoli e sessili, sono in parte nascosti sotto i gangli cerebro-viscerali. Non ho potuto vedere i gangli ottici; i gangli buccali e gastroesofagei furono descritti da Bergh.

Non ho potuto vedere le otocisti.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Rizzolia peregrina vivente × 5.

Tavola II.

Fig. 1ª — Bulbo faringeo veduto dalla sua faccia superiore, × 35.
a, Cercine muscolare dell' orifizio orale posteriore (orifizio faringeo anteriore).
b, Mascelle sulle quali si vedono i muscoli retrattori laterali del bulbo faringeo.
c, Strato muscolare che unisce i margini superiori delle due mascelle.
d, Esofago.
e, Estremità posteriore del bulbo.
f, Gangli buccali.
g, Nervi che dai gangli buccali si portano entro il bulbo faringeo.

Fig. 2ª — Bulbo faringeo veduto dalla sua faccia inferiore.
a, Cercine muscolare dell' orifizio orale posteriore.
b, Limite della cuticola.
c, Mascelle.
d, Estremità posteriore del bulbo.

Fig. 3ª — Bulbo faringeo veduto dalla sua faccia laterale destra.
a, Cercine muscolare dell' orifizio orale posteriore.
b, Mascelle.
c, Muscoli retrattori del bulbo.
d, Estremità posteriore.
e, Esofago.

Fig. 4ª — Mascella destra veduta dalla sua faccia interna, × 100.
a, Fulcro.
b, Processo masticatorio.

Fig. 5ª — Mascella destra veduta dalla sua faccia esterna, × 100.
a, Cresta esterna.
b, Solco che termina in basso presso l' apice della cresta esterna.

Fig. 6ª — Quattro denti della radula, × 400.

Fig. 7ª — Lobo epatico di una papilla dorsale col sacco cnidoforo.

a, Parte superiore del sacco cnidoforo divisa, per uno strozzamento della sua parete, dalla parte mediana *b.*

c, Parte inferiore del sacco cnidoforo contenente le cellule cnidogene.

d, Lobo epatico.

Fig. 8ª — Alcuni visceri messi allo scoperto per l' asportazione del comune integumento. Essi sono veduti dal lato destro., × 11.

a, Primo cuscinetto branchiale.

b, Stomaco (porzione anteriore).

c, Stomaco (porzione posteriore).

d, Condotto epatico principale posteriore.

e, Porzione discendente dell' intestino.

f, Intestino troncato alla base della papilla anale.

g, Massa formata dalle glandule dell' albume e del nidamento.

h, Glandula ermafrodisiaca.

i, Papilla genitale.

Fig. 9ª — Alcuni visceri messi allo scoperto per l' asportazione del comune integumento e veduti dalla faccia superiore, × 11.

a, Estremità posteriore dell' esofago.

b, Porzione anteriore dello stomaco.

c, Porzione posteriore dello stesso.

d, Condotto epatico principale posteriore.

e, Intestino (prima porzione).

f, Ultima porzione dell' intestino.

g, Glandula ermafrodisiaca.

h inferiore, Ampolla del condotto ermafrodisiaco.

h superiore, Massa formata dalle glandule dell' albume e del nidamento.

Tavola III.

Fig. 1ª — Processo masticatorio della mascella destra, veduto dalla faccia interna, × 400.

a, Porzione anteriore del margine masticatorio con piccoli denti.

b, Un dente irregolare della porzione posteriore del margine masticatorio.

Fig. 2ª — Un dente della radula veduto dalla sua faccia superiore, × 400.

Fig. 3ª — Sezione longitudinale di una papilla dorsale, × 300.

a, Epitelio esterno.

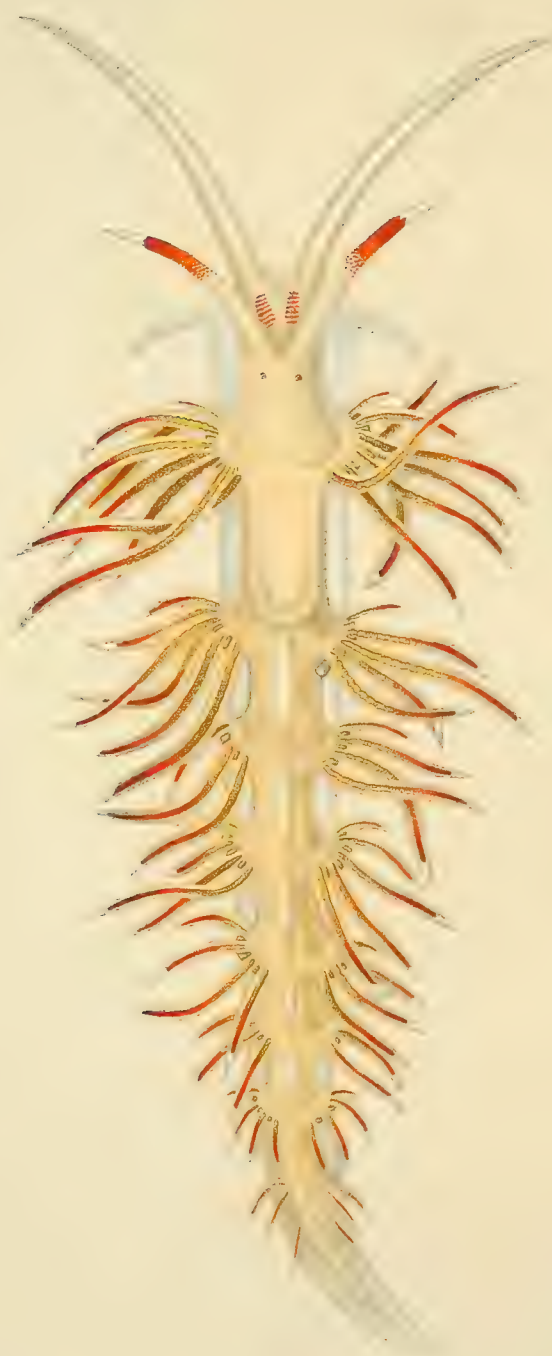
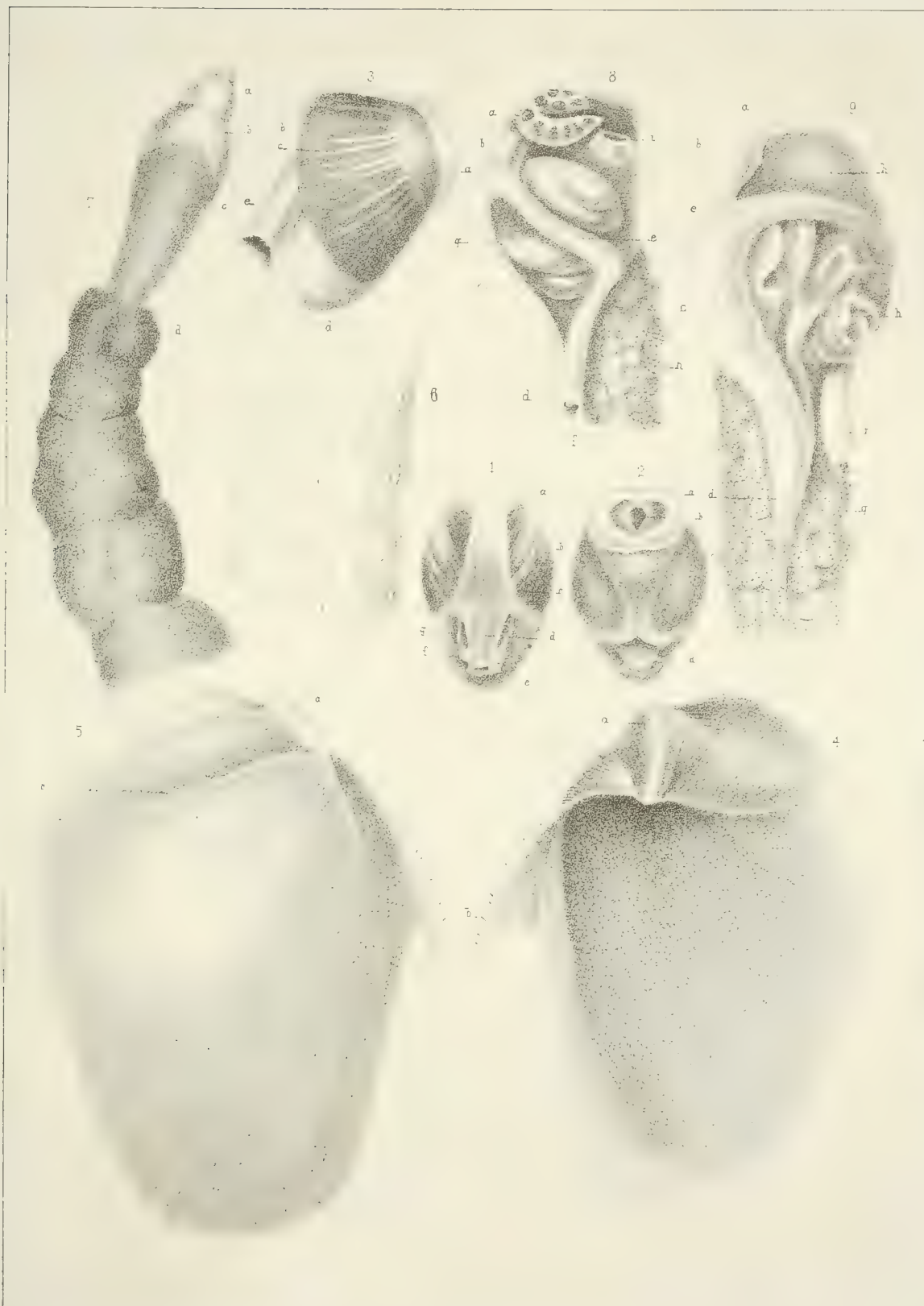
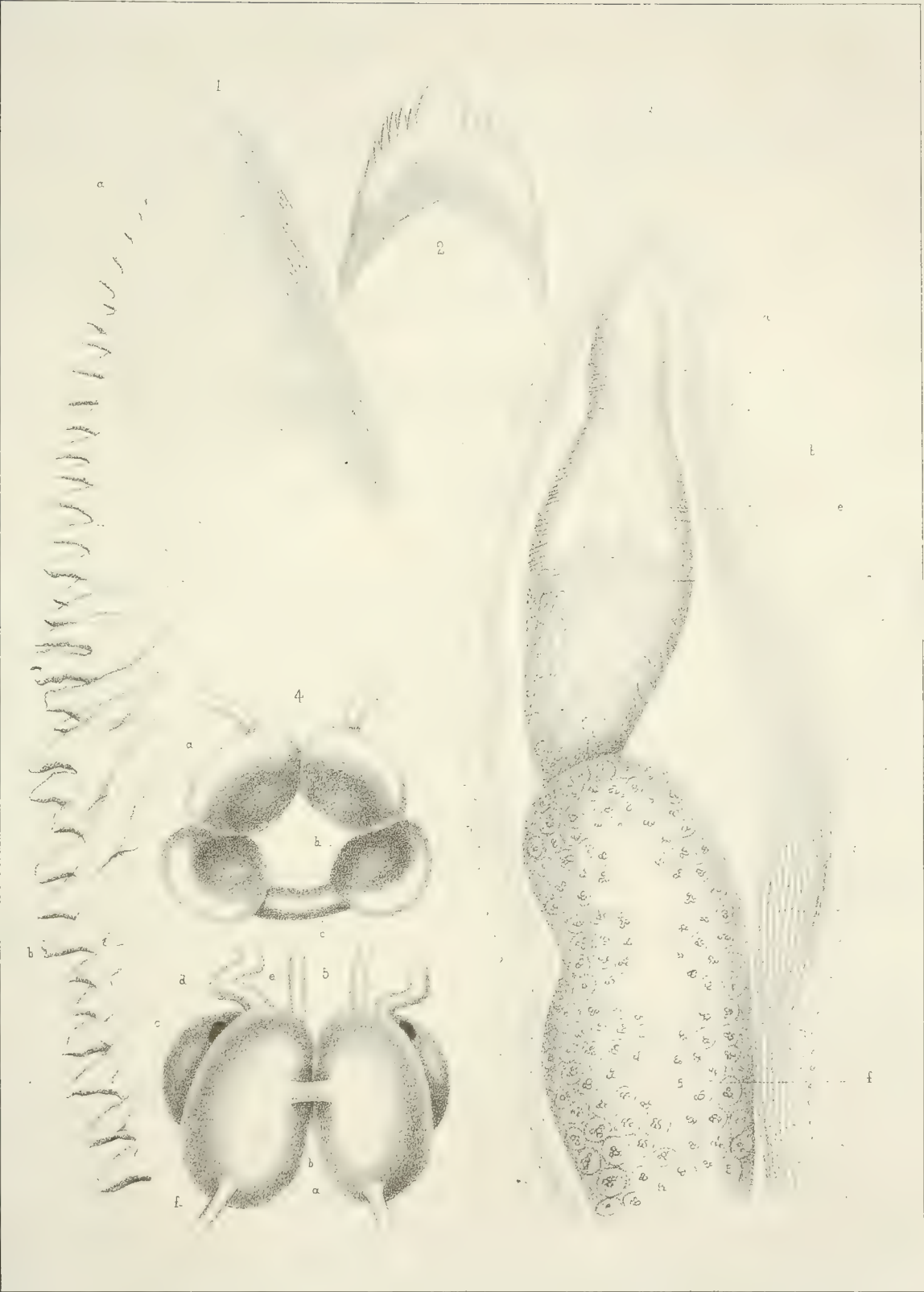
b, Strato muscolare profondo di fibre muscolari longitudinali, situato sotto lo strato di fibre trasversali.

c, Porzione inferiore del sacco cnidoforo contenente le cellule cnidogne.

d, Porzione superiore del sacco cnidoforo priva di cellule cnidogene.
e, Tubo trasparente che dalla porzione inferiore del sacco cnidoforo s' inoltra nella superiore.
f, Cellule epatiche.

Fig. 4ª — Sistema nervoso centrale veduto di dietro, $\times$ 50.
a, Gangli cerebro-viscerali.
b, Gangli del piede.
c, Commissura pediea.

Fig. 5ª — Sistema nervoso centrale veduto di sopra, $\times$ 50.
a, Gangli cerebro-viscerali.
b, Commissura cerebrale.
c, Gangli del piede.
d, Nervi tentacolari.
e, Nervi olfattivi.
f, Nervi viscerali.

Trinchese dis. Pacchioni lit Lit G Wenk.

Trinchese dis. Pacchioni lit. Lit. G. Wenk.

NUOVO ESAME

DI URINE FOSFORATE;

FOSFINE VENEFICHE CHE SE NE RITRAGGONO

MEMORIA

DEL PROFESSOR FRANCESCO SELMI

(Letta nella XXIV Adunanza 20 Maggio 1880)

In una *Memoria* che lessi in questa Accademia nella sessione del 1° Aprile, anno corrente, esposi quali i metodi con cui esaminai l' urina d' un avvelenato con fosforo e quali i prodotti ottenuti, e siccome i risultati furono tali da giudicarli di non poca importanza, mi rimase il desiderio di ripetere le indagini sopra altre urine della stessa maniera, non solo a conferma dei fatti osservati, quanto anche per riconoscere quale fosse l' azione fisiologica di taluno di quei prodotti. Una buona occasione mi si offerì poco dopo, essendovi stati in Bologna nel detto Aprile due casi di tentato suicidio con pasta di fiammiferi fosforata, uno dei quali susseguito da guarigione, e l' altro pur troppo da esito letale.

Il primo caso fu di una ragazza di 15 anni che nel mattino del 18, verso le ore 6, $^1/_2$, ingollò del rum, in cui aveva messo a macerare i fiammiferi di due scattolette grandi e di cinque piccole.

Alle ore 10 e $^1/_2$ soltanto incominciarono i primi disturbi gastrici, accompagnati da dolore e bruciore, poi nausee, ed in appresso vomito continuo. In sulle 2 e $^1/_2$ pom. fu condotta all' Ospedale Maggiore ed affidata alle cure del chiarissimo mio collega Prof. Brugnoli e del suo egregio Assistente Dott. Ramlot, ai quali rendo grazie quanto so e posso per la premura di avermi avvertito sollecitamente e di avermi somministrate le urine.

L' ammalata era pallida ed accusava forte dolore all' epigastrio; l' alito esalava odore di fosforo. Le furono amministrati un emetico e bevande albuminose e magnesiache, indi nel giorno stesso prescrittale l' essenza di trementina. Fu raccolta l' urina prima dell' amministrazione dell' antidoto e dopo, e ciò separatamente. Siccome poi la cura coll' essenza riuscì efficacissima, tanto che l' inferma conseguì

in un certo tempo la piena guarigione, perciò potei ricevere le urine dei dì seguenti tanto da averne in quantità copiosa abbastanza per le ricerche necessarie. Ma di questo parlerò più innanzi.

L' altro caso si riferisce ad un infermiere della Clinica, che il 23 Aprile alle 11 e $^1/_2$ ant. inghiottì una quantità ignota, ma abbondante, di pasta da fiammiferi stemperata nell' acqua. Alle 2 p. aveva già vomitato, ed indi ebbe due scariche alvine. Alle ore 5 fu trasportato in Clinica. Era molestato da rutti frequenti di odore agliaceo e da vomiti di scarse materie verdastre del detto odore. Era in sonnolenza ed abbattimento, e si lamentava di bruciore allo stomaco ed alla gola e di sete ardente. Aveva le estremità fredde e cianotiche, la faccia pallida e contratta, il polso piccolo e un po' frequente, e frequente il respiro.

Gli si somministrarono vomitori di solfato di rame con ipecacuana, una pozione di magnesia idrata, e gli si fece un copioso lavacro dello stomaco valendosi della tromba gastrica. In appresso gli si diede un purgante di olio di ricino ed essenza di trementina non rettificata, a piccole dosi e ripetute. Ne succedette una scarica alvina ed emissione di urina, che fu conservata per le ricerche chimiche.

In conseguenza delle cure fatte gli cessò il vomito; se non che i sintomi di abbattimento si aggravarono onde si dovette aiutarlo con iniezioni sottocutanee di tintura di muschio e clistere di cognac.

L' ammalato non si riebbe; gli continuò il freddo generale, la pelle gli si coperse di sudore gelido; insorsero dolori addominali, senso di peso nello stomaco, mentre i polsi divennero più esili e frequenti ed il respiro più frequente ed affannoso. La temperatura che dapprima segnava 37° discese fino a 34°, e così finì di vivere alle 3 del mattino seguente. La coscienza si mantenne chiara fino quasi all' ultim' ora.

Facendo la necroscopia si riscontrarono iperemici il cervello, il polmone, le reni ed il fegato, il quale in qualche punto della superficie, del taglio appariva giallastro. Lo stomaco conteneva un liquido verde sporco con odore di trementina, e la mucosa era un po' arrossata e coperta di muco. Arrossata pure qua e là si scorgeva la mucosa dell' intestino, bagnato da un liquido verdastro che tramandava odore di fosforo.

Debbo questi dati all' egregio Sig. Dott. Felletti assistente del chiarissimo Prof. Cav. Murri, dal quale per gentilezza ottenni non solo l' umore urinoso, ma ben anche il cervello ed il fegato del cadavere: me gli dico riconoscentissimo.

URINE DEL PRIMO CASO

L' urina raccolta prima dell' amministrazione dell' antidoto fu emessa nella notte dal 18 al 19 Aprile. Quella consegnatami misurava 100 c. c. Era scolorita, quasi limpida, con pochissimi fiocchetti bianchi, inodora ed acidissima. Per l' aspetto somigliava piuttosto ad acqua sporca che ad umore urinoso. Non conteneva albumina. Il suo peso specifico fu di 2,5 all' urometro.

Versata in palloncino e sospesavi sopra una cartolina imbevuta di nitrato d' argento, non vi produsse annerimento di sorta.

L' urina raccolta, dopo l'antidoto nella notte del 19 al 20, misurava 140 cmc. Era un po' colorita, torbidissima, acida un po' meno della precedente ed esalava odore aromatico. Lasciata a sè per 16 ore in pallone con due cartoline di *acetato di piombo* e di *nitrato d' argento*, imbrunì la seconda ma con poca intensità. Aveva formato un sedimento di fiocchi bianchicci piuttosto copioso, rimanendo tuttavia torbida come un' emulsione. Inutilmente tentai, filtrandola, di averla limpida, perchè attraversava il feltro tale e quale appariva.

Scaldandola, a poco a poco si schiarì perfettamente verso 40°; ma portando la temperatura a 65° e 70°, s' intorbidò di nuovo deponendo fiocchi di albumina.

L' urina raccolta nelle notti dal 20 al 22 Aprile misurava 1030 cmc. Era limpida, del colore dell' urine normali e di odore alquanto aromatico. Era acida come la seconda. Non conteneva albumina. Tenendovi sopra le due cartoline di piombo e d' argento, la seconda in mezz' ora divenne alquanto bruna. Rinnovata la carta argentica, non imbrunì quasi più quantunque vi fosse tenuta per 16 ore. Le urine delle notti successive fino al 26 erano limpide, di colore naturale, esalavano odore aromatico, possedevano reazione acida e non contenevano albumina. I rispettivi volumi furono di 500, di 920, di 850 e di 610 c. c.

Dacchè il lavoro avrebbe durato troppo a lungo quando ciascuna di tali urine fosse stata sottoposta a parte a parte alle osservazioni necessarie, e dacchè giudicai che tornava meglio procedere sopra un volume di liquido di una certa ampiezza per meglio conseguire in copia sufficiente i varii prodotti, stimai acconcio di dividerle in modo che, fatte le ricerche separatamente sulla 1ª e sulla 2ª, per le rimanenti procedessi su quelle mescolate insieme raccolte dal 20 al 24 (2450 c. c.) e su quelle dal 25 al 26 (1460 c. c.) pure mescolate insieme.

Per brevità dell' esposizione chiamo urina del *I° periodo,* quella che fu raccolta in precedenza dall' amministrazione dell' antidoto ; del *II° periodo* quella emunta subito dopo l' antidoto ; del *III° periodo* la mescolanza delle urine raccolte dal 20 al 24 dell' aprile ; del *IV° periodo* quelle dei giorni posteriori, unite insieme.

PROCESSO OPERATIVO

Dapprima mi era nato il pensiero di seguire una via diversa da quella tenuta per l'urina che fu tema della *Memoria* antecedente (1), allo scopo di evitare possibilmente l' azione del calore e le distillazioni del liquido urinoso, temendo che i composti fosforati soggiacciano ad uno sdoppiamento od a qualche altra maniera

(1) Ricerca del fosforo nelle urine in caso di avvelenamento e prodotti che vi si riscontrano. Bologna. Tip. Gamberini e Parmeggiani 1880. (Vol. I, Serie IV delle Memorie dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna).

di decomposizione, quando sono scaldati, specialmente dopo l' alcalizzazione colla barite; se non che, pel riflesso che mi conveniva confermare ciò che aveva osservato nelle prime ricerche, ed anche nella speranza di raccogliere una proporzione sufficiente di fosfine su cui istituire le prove fisiologiche, mi risolsi di nulla mutare e tutto al più d' introdurvi qualche modificazione, allorchè mi venissi accorgendo che sarebbe tornata opportuna.

In riassunto: alcalizzai le urine coll' idrato di bario fino a forte reazione sulla curcuma; aggiunsi tanto d' alcole di 99° quanto ne abbisognò perchè il liquido non più s' intorbidasse; raccolsi il precipitato baritico su feltro e lo lavai con alcole di 66°; distillai il liquido urinoso-alcolico fino a ricuperare tutto l' alcole; saturai con acido cloridrico l' alcole distillato (essendo alcalino) per ridistillarlo nuovamente ed avere nel residuo acquoso le basi volatili convertite in cloridrati; feci ambidue le distillazioni in corrente di acido carbonico, disponendo l' apparecchio in guisa che il gas uscente in ultimo gorgogliasse nell' acido nitrico puro e mantenuto tiepido; trattai il liquido urinoso dalla 1.ª distillazione dibattendolo più volte con cloroformio ad estrarne quelle basi che potesse contenere; ossidai col cloro l' alcole ridistillato, ad accertarmi se conteneva qualche composto fosforato, volatile o neutro.

Premesse tali avvertenze, passerò ad esporre quali i risultati ottenuti.

CASO PRIMO

Urine del I. Periodo.

Fatto il trattamento dell' urina (100 c. c.) con idrato di bario, indi con alcole di 99° fino a cessazione di precipitato, lavato questo con altro alcole della densità di 66°, lo misi a sgocciolare per indi esperimentarlo in apparecchio a svolgimento di idrogeno. A questo effetto lo stemperai in acido solforico diluito, decantai il liquido dal solfato di bario depostosi, e lo versai in boccia a due gole, con entro dello zinco. La reazione durò lenta per 24 ore; l' idrogeno gorgogliò nell' acido nitrico tiepido; da questo, seguendo le norme indicate nella *Memoria* precedente, ottenni ben palese col reattivo molibdico la formazione del noto sedimento cedrino.

Il liquido alcolico feltrato, distillato in corrente di acido carbonico, che nell' uscire dall' apparecchio gorgogliava in acido nitrico tiepido, passò nel pallone con reazione alcalina.

L' *acido nitrico* in cui aveva gorgogliato l' anidride carbonica durante la distillazione diede la reazione del fosforo.

Il residuo urinoso rimasto nella storta fu messo a parte per le ricerche susseguenti.

Saturai l' alcole distillato col sufficiente di acido cloridrico diluito nell' alcole fino a risultarne lieve reazione acida, indi lo sottomisi a ridistillazione con corrente di acido carbonico.

L' acido nitrico in cui il gas aveva gorgogliato fornì una reazione molto palese di fosforo. Dopo ciò ossidai l' alcole ridistillato con cloro e l' evaporai a secco con un cristallino di cloruro di sodio, ridisciolsi il piccolo residuo nell' acido nitrico e lo provai col reattivo molibdico che mi diede abbondante la reazione del fosforo.

Dunque da queste prime osservazioni risultò:

1° che l' urina conteneva qualcuno degli acidi minori del fosforo od un composto capace di simularne la reazione coll' idrogeno nascente;

2° che conteneva pure un prodotto volatile fosforato e neutro;

3° che conteneva una base volatile, la quale passò coll' alcole della prima distillazione.

Il residuo acquoso della ridistillazione dell' alcole era opalino appena, e conteneva la sostanza alcalina e volatile, che era stata neutralizzata coll' acido cloridrico: lo evaporai a blanda temperatura e n' ebbi un residuo cristallino bianco, che misi a seccare sotto campana con idrato di sodio. Era di pochi milligrammi, conteneva ammoniaca ed un' altra base, poichè:

Col *tannino* precipitò in bianco;

Col *cloruro d' oro* s' intorbidò appena;

Col *bicloruro di mercurio* divenne opalino dopo un certo tempo;

Coll' *ioduro di bismuto e potassio* precipitò in giallo chiaro.

Coll' *acido iodidrico iodurato* fornì goccioline brune, indi coprendo con vetrino sottile, le goccioline dopo un' ora si erano convertite in fascetti di lamine brune accoppiate a due a due, con aspetto e forma somiglianti ai cristalli che col detto reattivo ebbi dal cloridrato della base volatile ottenuto dall' urina di cui discorsi nella *Memoria* antecedente, come si può vedere consultando la fig. B. della tavola annessavi.

Non fu possibile spingere più innanzi le indagini a cagione della piccolissima quantità di materia.

Venendo ora al residuo urinoso-acquoso rimasto nella storta della prima distillazione della parte alcolica, lo alcalizzai con barite e dibattei con cloroformio; trattai questo con acqua inacidita dall' acido cloridrico. Evaporata l' acqua cloridrica quasi a secco e tenuto il residuo sotto campana con idrato di sodio, n' ebbi pochi milligrammi di un sale cristallizzato per la massima parte in lunghe lamine sottili terminate a sbieco, insieme con rari cristalli a croce, i cui bracci si componevano di una sequenza di ottaedri inseriti uno dietro all' altro. Sciolsi il sale nell' acqua, che divisi in due parti, ciascuna delle quali ne conteneva circa due milligrammi.

Una delle parti fu esplorata coi reattivi.

Col *tannino* precipitò in bianco immediatamente.

Col *cloruro d' oro*, lieve intorbidamento, indi cristallini aghiformi uniti a stella, e poi riduzione leggera.

Col *cloruro di platino* non diede precipitato, sibbene depose col tempo alcuni cristalli di forma ottaedrica uniti insieme a rosetta.

Col *bicloruro di mercurio*, intorbidamento immediato che non crebbe.

Coll' *ioduro di bismuto* e *potassio*, precipitato immediato giallo chiaro che passò al rosso di Kermes.

Coll' *acido picrico* non avvenne intorbidamento, che scorso un certo tempo.

Coll' *acido iodidrico iodurato* precipitato immediato in goccioline brune.

L' altra parte della soluzione essendo stata ossidata, diede reazione col reattivo molibdico.

Il liquido urinoso, già esaurito col cloroformio, reso lievemente acido con acido cloridrico, evaporato fin presso a secco, e messo sotto campana con idrato di sodio, lasciò un residuo che fu ripreso con alcole assoluto per tre volte. Feltrato l' alcole e posto ad evaporare, fornì una materia contenente urea, la quale cristallizzò. L' acqua madre, o parte deliquescente, rimasta col collocare la cassula in iscolo, era un tantino giallognola e conteneva una base, che possedeva le proprietà seguenti :

Col *tannino* s' intorbidò in bianco.

Col *cloruro d'oro* precipitò copiosamente in giallognolo sporco, succedendo poi la riduzione.

Col *bicloruro di mercurio* precipitò in bianco.

Coll' *ioduro di bismuto* e *potassio* e coll' *acido picrico* non diede reazione.

Coll' *acido iodidrico iodurato* precipitò gocciole brune.

Col *reattivo di Nessler* diede un precipitato bianco giallognolo, cui successe riduzione in bruno.

Per conoscere se la base di cui furono descritte le reazioni contenesse fosforo, fu divisa in due parti, una delle quali trattata con acqua regia ed un poco di cloruro di sodio per meglio distruggere la materia carbonosa, avendola riscontrata molto resistente alla distruzione; il residuo produsse forte reazione di fosforo. A togliere il sospetto che il fosforo provenisse da acido fosforico che accompagnasse la base, una parte della soluzione fu trattata con acqua di barite, indi con cinque volumi di alcole assoluto e due di etere, cioè sino a cessazione di precipitato; fu feltrato il liquido alcolico-etereo e messo ad evaporare. Durante l' evaporazione si depose del carbonato di barite. Il residuo lavato con acqua gli trasfuse reazione alcalina, ed il precipitato baritico trattato con acido solforico per separare la barite e poi con acido nitrico, non manifestò che un lievissimo indizio di fosforo. Ciò dimostra che il fosforo apparteneva alla base, e non ad acido fosforico che le fosse commisto.

Evaporata una parte della soluzione acquosa contenente la base ne restò un residuo cristallino in aghetti ramificati, che stando all' aria cadde in deliquescenza.

Sebbene la quantitá rimasta della base fosse tenue, nondimeno se ne tentò uno esperimento fisiologico sopra una rana, d' onde nulla si ottenne.

(Seguita il 1. caso)

Urina del II. Periodo.

L' urina del secondo periodo in quantità di 140 c. c. fu versata in pallone, al quale unii un apparecchio a sviluppo d' acido carbonico, che dopo avere gorgogliato nel liquido, finiva pel cannello di sfogo, nell' acido nitrico tiepido. Fu tenuta per tre ore in B. M. bollente: pochissimo ne distillò, cioè qualche goccia appena. Dall' acido nitrico in cui aveva gorgogliato il gas ottenni la reazione del fosforo.

Smontato l' apparecchio, vidi che si eran deposti fiocchi di albumina, la quale fu separata per feltrazione; al feltrato aggiunsi barite fino ad alcalinità sulla curcuma e poi alcole di 99° fino a cessazione di precipitato.

Feltrato il liquido urinoso-alcoolico e distillato nel solito modo, dall' acido nitrico posto in fine non ebbi la reazione del fosforo, onde sembra che il composto volatile fosforato, che riscontrai distillando il liquido alcolico-urinoso tanto nelle ricerche descritte nella *Memoria* precedente quanto in quelle dell' urina del 1° Periodo, sussista, almeno in gran parte, già formato nell'urina.

Il precipitato baritico messo a reagire coll' idrogeno nascente, operando come di consueto, cedette del fosforo al gas che gorgogliò nell' acido nitrico ecc. come fu evidente col reattivo molibdico.

L' alcole distillato possedeva reazione alcalina, per cui fu saturato con acido cloridrico e ridistillato in corrente d' acido carbonico.

L' acido nitrico messo in fine dell' apparecchio in cui feci la ridistillazione dell' alcole, produsse reazione di fosforo, la quale però fu molto lieve; per lo contrario l' alcole ridistillato, dopo ossidazione con corrente di cloro, evaporazione ecc. la manifestò molto distinta.

Il residuo acquoso della ridistillazione, rimasto nella storta, era colorato di un giallo bruniccio poco intenso. Evaporandolo a blanda temperatura, depose quasi tutta la materia colorante, insieme con una materia salina bianchiccia, da cui fu sottratto il poco acido cloridrico eccedente col mezzo dell' esposizione sotto campana con idrato di sodio. Riprendendola con alcole assoluto restò indisciolto del sale ammoniaco in quantità notevole; la soluzione alcolica evaporata in vetro d' orologio su B° Mª mi fornì una tenue proporzione di un cloridrato bianco, con all' orlo condensata la parte maggiore della sostanza colorante che l' accompagnava.

Con acqua il cloridrato si sciolse subito e la sostanza colorante quasi nulla, onde il liquido risultò presso che scolorito, e reagì come segue:

Col *tannino* s' intorbidò in bianco, poi a poco a poco depose del precipitato.

Col *cloruro di platino* precipitò immediatamente in cristalli come quelli della figura D della *Memoria* precedente.

Col *cloruro d' oro*, intorbidamento leggerissimo.

Col *bicloruro di mercurio* nulla nell' istante, intorbidamento in appresso.

Coll' *ioduro di potassio e bismuto,* precipitato immediato di un rosso di minio.

Coll' *acido iodidrico iodurato*, precipitato immediato in goccioline brune.

Colla *soda* svolse odore di pesce fracido.

Ossidando con *acido nitrico* ebbi reazione assai manifesta di fosforo.

La poca materia impedì che facessi maggiori ricerche ed in ispecie le fisiologiche.

Dalla prima distillazione dell' alcole era rimasto nella storta un liquido urinoso-acquoso molto bruno, che fu alcalizzato con barite indi trattato con cloroformio, replicate volte. Il cloroformio fu ripreso con acqua inacidita dall' acido cloridrico, la quale s' impadronì di quasi tutta la materia colorante che il cloroformio aveva estratta dal liquido urinoso; onde quando venni ad evaporarla lasciò un sale bianco e cristallino fortemente imbrattato di una sostanza deliquescente e brunicciа. Il sale constava in parte di cloruro di ammonio, il quale, ripigliandolo con alcole assoluto, rimase indisciolto in notevole proporzione. L' alcole s' impadronì della materia colorante e d' alquanta materia salina; aggiuntogli dell' etere ad un volume per volta fino a sei volumi, depose dell' altro sale ammoniaco insieme a quasi tutta la materia colorante. Il liquido alcolico-etereo poi fornì per evaporazione un cloridrato gialliccio vischioso che cogli alcali svolse odore acuto di pesce fracido, e che si comportò coi reattivi in modo uguale a quanto aveva osservato per la base volatile contenuta nell' alcole della prima distillazione, e che inoltre era similmente fosforata. Da ciò apparisce che una parte soltanto dell' ammoniaca e della base volatile erano passate coll' alcole nella distillazione, e che perciò, ripigliando il residuo urinoso colla barite ed il cloroformio, ne ottenni una nuova quantità.

Dopo l' esaurimento cloroformico, il liquido urinoso che esalava odore quasi agliaceo, fu saturato con acido cloridrico fino ad acidità lievissima, evaporato quasi a secco a blando calore, e seccato del tutto sotto campana con idrato di sodio.

Ne rimase una massa quasi nera e peciosa, che macinai con alcole assoluto fino a che in ultimo questo non quasi più si colorasse. La maggior parte della massa non si disciolse.

Evaporata la soluzione alcolica fino a secco, posto il residuo sotto campana con idrato di sodio e ripreso con alcole assoluto, questo lasciò indisciolto del sale ammoniaco, colorandosi frattanto di giallognolo. Col sufficiente di etere precipitò quel tanto di sale ammoniaco che si era disciolto; feltrai, lo misi ad evaporare, con che ebbi per residuo un liquido giallognolo in cui stemperai idrato di bario, dibattendo poscia con etere per due volte. Dall' etere tolsi le basi che avesse disciolte valendomi di acqua inacidita di acido cloridrico: dall' acqua acida evaporata raccolsi una piccola proporzione di un sale bianco che sprigionava odore di pesce fracido cogli alcali e che sciolta in acqua:

Col *tannino* precipitò in bianco;

Col *cloruro di platino* non precipitò immediatamente, ma col tempo depose cristalli di un giallo dorato a forma di arnioni;

Col *cloruro d' oro* precipitò in giallo sporco;

Col *bicloruro di mercurio* s' intorbidò alquanto e di più coll' *acido picrico*;

Coll' *ioduro di bismuto e potassio* precipitò in rosso aranciato;

Coll' *acido iodidrico iodurato* depose gocciole brune che non cristallizzarono.

Il cloridrato che era deliquescente, stando sotto campana con idrato di sodio cristallizzò in cristalli a croce che pareano ottaedri l' uno susseguente all' altro.

Ossidandolo coll' *acido nitrico* diede la reazione del fosforo.

Sembra da quanto ora esposi, che il liquido urinoso-acquoso contenesse due basi-volatili, ambedue fosforate, oltre l' ammoniaca, una delle quali passò nel cloroformio, e l' altra rimase nel liquido mentovato, certamente per notevole solubilità nell' acqua; seppure non prese nascimento da qualche prodotto complesso, il quale si fosse decomposto dopo l' inacidimento cloridrico, durante l' evaporazione operata in bagno maria.

Il liquido a cui era stato aggiunto idrato di bario e che fu esaurito con etere, decantato l'etere, venne evaporato a secco e ripreso il residuo con alcole assoluto. Poco si sciolse; l' alcole rimase torbido e di feltrazione difficile; conteneva traccie di barita. Tolta questa con qualche goccia di acido solforico allungatissimo, fornì per evaporazione un residuo gommoso d' un bel giallo d' oro, che

Col *tannino* precipitò copiosamente in bianco;

Col *cloruro di platino* diede, dopo qualche tempo, alcuni cristallini a forma di granelli associati a corona ed a croce;

Col *bicloruro di mercurio* precipitò in bianco;

Coll' *acido picrico* precipitò in giallo, poi il precipitato andò dileguando mentre si formarono dischetti gialli punteggiati, di aspetto cristallino non bene discernibile con ingrandimento di 600 diametri;

Coll' *ioduro di bismuto e potassio* precipitò in giallo.

Convertito in cloridrato lo sciolsi nell' alcole assoluto con aggiunta di 5 o 6 volumi di etere, indi presi il residuo della soluzione alcolico-eterea che ossidai con acido nitrico per cercarvi il fosforo, che di fatto vi trovai.

(Seguita il caso 1.)

Urine del III. Periodo.

Trattai al solito quest' urina con barita, poi con alcole di 99° centesimali, separai il precipitato baritico, lo lavai con alcole di 66° etc, indi distillai il feltrato alcolico in corrente di anidride carbonica: l' acido nitrico in cui questa gorgogliò in fine dell' apparecchio conteneva del fosforo.

Decomposi con acido solforico diluito il precipitato per separarne tutta la

barite, versai il liquido risultante in bottiglia di Woolf con zinco ed acido solforico e dopo ciò esaminai l' acido nitrico in cui l' idrogeno aveva gorgogliato: ne ottenni pure la reazione del fosforo.

Si noti frattanto che, quantunque la quantità dell' urina fosse assai più cospicua (2450 c. c.) rispetto a quella del II° Periodo (140 c. c.) nondimeno risultò dal detto precipitato una reazione più scarsa; segno evidente che era diminuito d' assai l' acido minore del fosforo o quel qualsivoglia composto che s' incontra nelle urine degli avvelenati dal fosforo, ed è capace di fosforare l' idrogeno nascente.

L' alcole che era stato distillato possedeva reazione alcalina; saturato con acido cloridrico e ridistillato in corrente d' acido carbonico, questo rese fosforato l' acido nitrico in cui aveva gorgogliato.

Questa volta non credetti opportuno di cercare il fosforo nell' alcole ridistillato sembrando che bastasse per supporvelo con certezza, il fatto della reazione ottenuta dall' acido nitrico in cui aveva gorgogliato l' anidride carbonica.

Il liquido acquoso rimasto dalla ridistillazione conteneva pur anco un poco di alcole; svanito il quale per evaporazione, esso divenne torbido, per cui lo dibattei con etere affine di togliere la materia indisciolta come in effetto avvenne.

L' etere fu messo a distillare con 3 o 4 c. c. d' acqua e qualche cristallino di carbonato di sodio purissimo: fornì un residuo di colore giallognolo e di un odore aromatico speciale simile a quello delle gemme di pioppo. Saturai l' alcali con acido cloridrico con che avvenne precipitato, che ridisciolsi in nuovo etere il quale ne acquistò un odore grato, una tinta giallognola ed una reazione acida manifesta. Evaporando l' etere ne rimase finalmente un residuo acido, odoroso e vischioso, da cui dopo averlo alcalizzato con soda e ossidato con acido nitrico ottenni la reazione del fosforo.

Il liquido acquoso, già reso limpido col mezzo dell' etere, posto ad evaporare lasciò un residuo salino, da cui l' alcole assoluto separò molto sale ammoniaco. Feltrato quest' alcole ed evaporato, ripresi il nuovo residuo con una mescolanza di cinque volumi d' etere ed uno di alcole assoluto, replicando tre o quattro volte tale trattamento; indi ricuperai il solvente per distillazione, mediante la quale raccolsi dalla storta una materia salina che seccai sotto campana con idrato di sodio.

N' ebbi un cloridrato che con un alcali esalava forte odore di pesce, e cristallizzava a forma di croci, e che stando in aria un po' umida si liquefaceva. Si avverta che l' odore di pesce era differente da quello della trimetilammina, che era repugnante e che fiutandolo non potevasi tollerare a lungo.

Pesato nel vetro da orologio in cui era stato raccolto e seccato corrispondeva a gr. 0,06 ; ne furono tolti gr. 0,011, per le ricerche fisiologiche (Documento A) ed adoperato il rimanente per le reazioni chimiche e la ricerca del fosforo.

Col *tannino* nulla diede in principio, indi s' intorbidò alquanto, poi tornò a schiarirsi.

Col *cloruro di platino* fornì un precipitato immediato copioso di un giallo ce-

drino a croci ed a stelle, composte di ottaedri uno in seguito all' altro e con quelle dendridi piuttosto lunghe come nel cloridrato, tranne che formate di ottaedri susseguenti.

Col *cloruro d' oro* nulla dapprincipio; col tempo cristalli di un bel giallo vivo a forma di arnioni isolati, punteggiati, senza che in appresso avvenisse riduzione di metallo.

Col *bicloruro di mercurio*, leggerissimo intorbidamento.

Coll' *acido picrico*, formazione susseguente di prismi esaedri, terminati in piramidi, talvolta isolati e talvolta a stella.

Coll' *ioduro di bismuto e potassio*, precipitato di un rosso di minio che si mantenne tale.

Coll' *acido iodidrico iodurato*, precipitato bruno con formazione alla superficie di lastrine colore di iodio, che sotto il microscopio si vedevano coll' aspetto di cristalli in laminette brune impiantate una nell' altra in modo da prendere l' apparenza dei corni di cervo. Parecchi giorni dopo, avendo voluto replicare la reazione, mancarono le lastrine mentovate, ed una parte solo delle goccioline brune del precipitato assunse la forma di laminette od isolate od appaiate parallelamente.

Una parte, ossidata con acido nitrico, diede ben manifesta la reazione del fosforo. Trattavasi adunque di una fosfina.

Il liquido urinoso rimasto dalla prima distillazione dell' alcole, possedeva leggera reazione acida; lo alcalizzai con barita, con che si formò un precipitato, il quale dopo i lavacri fu trattato per la ricerca degli acidi minori del fosforo, ma non ne ebbi verun contrassegno. Il feltrato alcalino, fu dibattuto con cloroformio più volte, ed il cloroformio con acqua inacidita dall' acido cloridrico. L' acqua acida ne riuscì colorata, dacchè era colorato anche il cloroformio. Essendo stati fatti tre sbattimenti coll' acqua acida, ed i due primi essendo colorati, li mescolai insieme, mentre tenni separato il terzo che era scolorito. Dall' evaporazione dei due primi rimase una materia bruna e vischiosa, che ripresi con alcole assoluto, aggiungendo poi nella soluzione alcolica tanti volumi di etere quanti ne abbisognarono per produrvi dell' intorbidamento.

Feltrai il liquido etereo-alcolico, lo posi ad evaporare e n' ottenni un cloridrato discretamente scolorito in proporzione di 50 milligrammi.

Dall' acqua acida del terzo sbattimento, che era scolorita come dissi, ebbi evaporando il cloridrato perfettamente bianco, in proporzione di pochi milligrammi, ma sufficiente per esaminarne le proprietà principali. Era desso un po' deliquescente in lunghi aghi che dalla circonferenza si adunavano verso il centro. Scioltone un poco nell' acqua in modo da avere una soluzione piuttosto satura, lo esplorai come sto per dire:

Con un *alcali* svolse odore di pesce fracido.

Col *tannino*, lieve intorbidamento in principio che crebbe a poco a poco.

Col *cloruro di platino*, precipitato immediato in cristalli un po' sbiaditi ed aventi la forma della figura D. della tavola della *Memoria* precedente.

Col *cloruro d' oro*, intorbidamento immediato ; evaporando si deposero cristalli.

Col *bicloruro di mercurio* nulla dapprima, poi intorbidamento che incominciò dalla circonferenza e si propagò al centro. Osservando con ingrandimento di 600 diametri il dischetto, vidi che quello che pareva ad occhio nudo una pellicola continua bianca, risultava invece da una moltitudine di lunghissimi cristallini capillari, ora disposti come i fili di un tessuto, ora a lunghe fibre ravvolte variamente.

Coll' *acido picrico*, intorbidamento immediato; col tempo si deposero cristalli ovali, parte isolati e parte a stella, la cui forma non potè essere determinata.

Coll' *ioduro di bismuto e potassio*, precipitato scarso di un rosso di minio.

Coll' *acido iodidrico iodurato* precipitato in goccioline brune che non cristallizzarono.

Con quel poco che mi sopravvanzò, unito a 50 milligr. dell' altra evaporazione, mi fu concesso di determinare se conteneva fosforo, e, visto che ne conteneva, di sperimentarlo sulla rana (1). (Documento B).

Dunque nella prima distillazione del liquido alcolico-urinoso passò coll' alcole una fosfina volatile e che fisiologicamente si dimostrò *molto venefica;* mentre rimase nel residuo urinoso-acquoso della storta una seconda fosfina, diversa per caratteri chimici dalla precedente, di azione fisiologica differente, che potei estrarre mediante la barita ed il cloroformio.

Seguitando le indagini sul liquido urinoso-acquoso, dopo estratta la suddetta fosfina, trovai molta urea, altre sostanze indeterminate, ed una tenue quantità di una base a odore di pesce, non diversa forse dalla precedente e rimastavi per essere stato incompiuto l' esaurimento cloroformico.

(Seguita il caso 1.)

Urina del IV. Periodo.

Constava di 1460 c. c. Il precipitato baritico coll' idrogeno nascente fornì una debole reazione, indicante gli acidi minori; per l' opposto l' acido nitrico in cui gorgogliò l'anidride carbonica, durante la distillazione del liquido urinoso-alcolico, ne diede una ben manifesta, ed anche la diede più copiosa il detto acido in cui aveva gorgogliato l' anidride nella ridistillazione dell' alcole.

L' alcole raccolto dalla prima distillazione era alcalino al solito; fu saturato con acido cloridrico ; il residuo acquoso rimasto dalla ricuperazione dell' alcole, a differenza dei precedenti, non era torbido, e soltanto depose nell' evaporarlo, alcuni fiocchetti che rimasero aderenti alla cassula. Ad evaporazione compiuta lasciò un residuo salino, da cui fu separato molto sale ammoniaco con alcole assoluto e poscia con etere che vi fu aggiunto.

(1) La quantità del cloridrato non fu determinata col peso; tuttavia avendo per solito di adoperare la metà della sostanza per la ricerca del fosforo, l' altra restò per le ricerche fisiologiche, onde non credo scostarmi troppo dal vero, supponendola di circa 30 milligrammi.

La soluzione alcolica-eterea, dopo feltrazione ed evaporazione, fornì insieme col cloridrato un qualche fiocco di materia bruniccia, pochissimo solubile nell' acqua, per cui ripigliando il residuo con acqua ed evaporando questa, n' ebbi un sale bianco, in ottaedri, avente questo di particolare che in ciascuna forma si scorgevano righe parallele che partivano dalla base della faccia. Non apparve deliquescente e svolse forte odore di pesce fracido mediante un alcali. In soluzione si comportò come segue :

Col *tannino*, nulla da principio ed intorbidamento durevole in appresso.

Col *tetracloruro di platino*, quando fu in soluzione un po' diluita, depose ottaedri isolati di un bel giallo; in soluzione concentrata gli ottaedri si univano a croce. Questo cloro-platinato in confronto di quello della fosfina del III. periodo era evidentemente più solubile.

Col *cloruro d' oro,* nè precipitazione, nè riduzione; col tempo si deposero cristalli di un giallo vivo, associati a gruppi e di forma ottaedrica.

Col *bicloruro di mercurio* non avvenne intorbidamento nemmeno quando la soluzione era molto concentrata.

Coll' *acido picrico* nessuna reazione; col tempo cristallizzarono separati l' *acido picrico* ed il sale in ottaedri rigati.

Coll' *ioduro di bismuto e potassio*, precipitato immediato d' un rosso di minio.

Coll'*acido iodidrico iodurato*, precipitato bruno che in breve si coperse di laminette di un grigio di acciaio e dell'aspetto dell' iodio libero, le quali viste sotto il microscopio apparivano ramificate a foglia di felce, di un rosso bruno per trasparenza, e che coperte di vetrino sottile si conservarono tali sebbene un po' deformate fino al giorno seguente.

Ossidatane una parte con acido nitrico n' ebbi forte reazione di fosforo, maggiore proporzionatamente di quella che diede la fosfina volatile del III. Periodo.

Con 30 milligr. sciolti in acqua si fece l' esperienza fisiologica su piccola rana vivace, d' onde si conobbe che la detta fosfina era venefica, come dai particolari contenuti nel Documento C.

Il liquido urinoso-acquoso rimasto nella storta della prima distillazione dell' alcole fu alcalizzato con barita fino a reazione sulla curcuma; e dibattuto due volte con cloroformio, il quale si colorì di gialliccio e che poscia fu trattato con acqua inacidita con acido cloridrico.

L' acqua acida trasportò con sè quasi tutta la materia colorante che conteneva pur anche un alcaloide.

La evaporai a blanda temperatura e poi la misi sotto campana con idrato di sodio, per riprendere con acqua sola il residuo secco : un poco della materia colorante rimase indisciolta. Feltrata la soluzione acquosa e rievaporata, tutto il residuo si sciolse in acqua, per cui ad ottenere il cloridrato, scolorito per quanto si potesse, procedetti nel modo seguente:

Evaporai di nuovo il liquido, sciolsi il residuo nell' alcole assoluto, vi aggiunsi

dell' etere a poco a poco fino che avvenne precipitato di sale ammoniaco ed incominciarono a deporsi dei fiocchi bruni. Decantai subito il liquido alcolico-etereo, da cui raccolsi per evaporazione un mezzo centigrammo circa di un cloridrato bianco che bastò per le reazioni e la ricerca del fosforo, ma con cui non fu possibile istituire indagini fisiologiche. Sciolto in acqua, divisi la soluzione in due parti, una delle quali servì per l' esplorazione coi reattivi:

Col *tannino* s' intorbidò in bianco, e l' intorbidamento venne crescendo.

Col *cloruro di platino* precipitò lentamente in ottaedri separati e di un giallo pallido.

Col *cloruro d' oro* diede alcuni fiocchetti, indi cristallizzazione in sottili lamine rettangolari senza riduzione.

Col *bicloruro di mercurio* produsse un lieve intorbidamento in sul principio e poi lunghe lamine sottili frangiate di altre minori impiantatevi perpendicolarmente; parte delle lamine erano unite a fasci e formanti belle ramificazioni.

Coll' *ioduro di bismuto e potassio* precipitò in fiocchi di un giallo pallido.

Coll' *acido picrico* s' intorbidò alquanto.

Coll' *acido iodidrico iodurato* precipitò in goccioline di un giallo bruniccio chiaro che non cristallizzarono.

Con un *alcali* sviluppò odore di pesce.

L' altra porzione del cloridrato ossidata nel modo solito, diede la reazione del fosforo.

Si vede adunque che trattavasi di una fosfina, diversa però da quella che fu riscontrata nel liquido acquoso della ridistillazione dell' alcole.

Finalmente avvertirò che sul liquido urinoso già esaurito col cloroformio non istituii indagini posteriori, dacchè mediante i trattamenti coll'acido ossalico, la separazione dell' ossalato d' urea, poi la precipitazione colla calce dell' acido ossalico eccedente ed infine l' esaurimento coll' alcole, nulla si ebbe che fornisse contrassegni di basi estraibili o fisse o volatili, o di altri prodotti degni di essere esaminati in conformità dello scopo propostomi in queste ricerche.

URINA DEL SECONDO CASO

Dal collega Prof. Murri come notai in principio ricevetti il 23 Aprile una boccetta della capacità di 30 c. c., contenente parte dell' urina emessa dall' ammalato che aveva inghiottito la pasta fosforata, e che aveva urinato dopo la somministrazione dei vomitivi e del purgante. Appariva di colore pallido; esalava odore di fosforo, che meglio si sentiva nel versarla; possedeva reazione acidissima, e s' intorbidava scaldandola, deponendo fiocchetti di albumina.

La travasai in campanella che chiusi con tappo di sovero portante due cartoline, una bagnata di acetato di piombo e l' altra di nitrato d' argento : le cartoline erano state tagliate da un pezzo maggiore di carta berzeliana già purificata per tali e somiglianti esplorazioni.

La cartolina di piombo non mutò colore, mentre quella di argento cominciò ad imbrunire 15 minuti dopo; nel giorno seguente, scorse cioè 18 ore, appariva tutta nera nel lembo inferiore. Per accertarmi che l' annerimento proveniva da fosforo tagliai la parte annerita, la digerii con acido nitrico fino a che si scolorisse, la spremetti, la lavai con acqua, aggiunsi il lavacro all' acido, precipitai l' argento con acido cloridrico, decantai il liquido dal sedimento di cloruro, lo evaporai fino a secco, ripresi con acido nitrico lo scarso residuo, e stillandovi alcune goccie di reattivo molibdico vidi che si svolse una forte reazione di fosforo.

Nel dì 24 un' altra quantità della stessa urina, in proporzione di 120 c. c. mi fu trasmessa.

Essa pure annerì fortemente la carta di nitrato d' argento, dalla quale poscia ottenni reazione gagliarda del fosforo. Questa pure era stata emessa durante la vita.

Contemporaneamente ricevetti in boccia separata una terza quantità di urina colla indicazione che erasi estratta dalla vescica del cadavere. A differenza delle due precedenti, la somiglianza delle quali era perfettissima, possedeva tinta alquanto più pallida, acidità minore e meno di albumina. Non ne esalava odore aromatico e neppure fosforoso, e non isvolse il primo quand' anche vi aggiunsi a caldo qualche goccia di acido nitrico. Annerì la carta di argento non meno delle precedenti, se non che il fosforo riscontrato nella parte annerita fu di poco conto ed in proporzione molto scarsa; in breve gli indizii di fosforo apparvero, ma leggieri.

Noterò che nella prima delle tre urine, d' onde come dissi esalava odore somigliante a quello del fosforo, volli tentare se dava lampi di luce all' oscuro, e perciò intiepiditala alquanto in palloncino chiuso, poi tolto il tappo e dibattendola, per quanto osservassi in istanza ottenebrata compiutamente, non venni mai a capo di cogliere contrassegni di fosforescenza.

Siccome le tre urine misuravano complessivamente 430 c. c., ed avendo concepito il dubbio che i prodotti di eliminazione vi dovessero sussistere in dosi tenui per la rapidità onde avvenne la morte, perciò mi deliberai di mescolarle insieme e sperimentarle complessivamente. Vi aggiunsi barite fino a forte alcalinità; poscia dell'alcole di 99° fino a che si formasse del precipitato, che raccolsi su feltro e lavai con alcole di 66°, mettendo poi insieme ed il primo feltrato e il lavacro.

Il precipitato baritico venne decomposto con acido solforico allungato ed il liquido acido fu versato in boccia per reagire collo zinco; l' idrogeno gorgogliò nell' acido nitrico tiepido, da cui dopo concentrazione ottenni una reazione gagliarda di acido fosforico. Questo fu il caso in cui dal precipitato baritico mi si offerì nella reazione collo zinco e l'acido solforico un assai forte contrassegno d'idrogeno fosforato, sviluppatosi; d' onde potrebbesi desumere, essere l' urina nell' avvelenamento acuto ricca assai più di acidi minori del fosforo di quello che negli avvelenamenti senza esito letale.

Avendo distillato il liquido urinoso-alcolico in corrente d' acido carbonico, i

prodotti volatili, che insieme col gas andarono a gorgogliare nell' acido nitrico, produssero scarsa reazione di fosforo, come scarsamente alcalino fu l' alcole distillato. Quando però dopo la saturazione con acido cloridrico procedetti a ridistillarlo in corrente di acido carbonico, in allora la reazione del fosforo data dall' acido nitrico si manifestò copiosa.

Il liquido acquoso, da cui l' alcole era stato separato ridistillando, appariva torbidiccio, ma fu reso limpido dibattendolo con etere. Evaporandolo fornì un residuo composto quasi tutto di sale ammoniaco; la porzione che si sciolse nell' alcole con etere, fu tanto esigua da non poterla assaggiare che con pochi reattivi:

Col *tannino* s' intorbidò.

Coll' *acido iodidrico iodurato* precipitò scarsamente in goccioline, di cui qualcuna pigliò forma di laminette o parallele od unite e stelle.

Col *cloruro d' oro* non precipitò; s' intorbidò in rosso arancio coll' *ioduro di bismuto e potassio.*

Rimaneva da esperimentare questo cloridrato cogli altri reattivi, se non che preferii di valermi di tutto l' avvanzato per verificare se si trattava di una base fosforata; diffatto ossidando con acido nitrico, la reazione del fosforo successe molto manifesta.

Il liquido urinoso rimasto dalla prima distillazione dell' alcole, arrossava lievemente la carta azzurra di tornasole; fattomi a saturarlo con barite diede un precipitato copioso, che decomposto con acido solforico fece molta effervescenza; il liquido acido, decantato dal solfato baritico, reagendo collo zinco, trasfuse nel gas qualche indizio appena di idrogeno fosforato.

In ultimo avendo ripreso con cloroformio il liquido urinoso, da cui per feltrazione erasi separato il nuovo precipitato baritico, non ne ottenni che traccia appena di sostanza basica.

Laonde l' urina del secondo caso, se mostrava di racchiudere qualche acido minore del fosforo od un prodotto capace di reagire somigliantemente coll' idrogeno nascente, risultò poi scarsa assai di composti d' indole alcaloide.

Concludendo: le due urine fosforate che esaminai in questa *Memoria* contenevano:

1° Un prodotto fosforato volatile e neutro;

2° Gli acidi minori del fosforo od un composto capace com' essi di fosforare l' idrogeno nascente;

3ª Alcune fosfine, di taluna delle quali, quando si potè raccogliere in quantità sufficiente per le esperienze fisiologiche, si potè riconoscere l' alta azione venefica.

Uguali sostanze anomale per le urine furono anche riscontrate nella *Memoria* che precede alla presente, e che, come dissi, fu letta in Accademia il 1° dell' Aprile di quest' anno.

RICERCHE CHIMICO-TOSSICOLOGICHE

SOPRA

IL CERVELLO DI UNO CHE SI AVVELENÒ CON FOSFORO

MEMORIA

DEL PROFESSORE FRANCESCO SELMI

(Letta nella 24 Adunanza 20 Maggio 1880)

Essendomi stato mandato dal mio chiarissimo collega il Prof. Augusto Murri il cervello ed il fegato tolti di fresco dal cadavere di quel tale, che avvelenatosi con fosforo, n' ebbe perduta la vita, e della cui urina feci un breve esame (1), tosto disposi che fossero tagliuzzati minutamente, introdotti ciascuno separatamente in vasi di vetro a tappo smerigliato e versatovi tanto di alcole assoluto da sopravvanzare per l' altezza di 20 centim. le materie solide (2). Nel vaso contenente il cervello sospesi, attaccata al tappo, una cartolina imbevuta di nitrato di argento; visitandolo nel giorno successivo vidi che la cartolina era divenuta grigia a mala pena, da potersi piuttosto credere per effetto riduttivo di qualche sostanza volatile, che non per fosforo libero. Staccatala, masticai il tappo con cera accuratamente ed in modo da impedire l' ingresso dell' aria, e tenni il recipiente in camera fresca e male illuminata per 28 giorni, dacchè nel frattempo ero occupato in altri lavori.

Quando il vaso fu aperto non ne esalò il più che menomo odore di putrefatto; l' alcole reagiva debolmente acido. Fu feltrato, fu lavato il residuo con alcole di 66 centesimali, unito il lavacro al feltrato precedente, poi aggiuntovi tanto di alcole assoluto finchè s' intorbidava ed indi rimesso a feltrare.

Avverto innanzi tutto, che le mie indagini furono dirette più che ad altro ad

(1) Vedi la *Memoria precedente a questa.*

(2) In questa MEMORIA dirò soltanto ciò che si riferisce ai prodotti, che ritrassi dal cervello; in altra che verrà in appresso esporrò ciò che si riferisce al fegato.

investigare se si riuscisse a risultati utili per la tossicologia, tali cioè da poterli applicare in caso di perizia chimico-legale per avvalorare le prove di avvelenamento con fosforo, e che, per conseguenza, operando a tale scopo tenni quella via che più mi parve conducesse ad ottenere il mio intento.

Misi il liquido alcolico, già feltrato, a distillare con corrente di anidride carbonica, che finiva gorgogliando nell' acido nitrico; la distillazione fu condotta fino a metà volume. Dall' acido nitrico ebbi, procedendo nel modo già indicato per le urine, una forte reazione di fosforo.

La parte alcolica distillata possedeva reazione acida, e non diede il più che menomo contrassegno o di coloramento o di precipitato o di riduzione colle soluzioni alcoliche del nitrato d' argento e del biioduro di mercurio, neppure dopo un giorno intiero; con che furono esclusi il fosforo libero e l' idrogeno fosforato.

Questo alcole non manifestava odore diverso da quello che gli appartiene. Presane una parte, gorgogliatovi del cloro per più di mezz' ora, poi evaporato, ne rimase un residuo a cui aggiunsi, come di consueto, qualche granello di cloruro di sodio, poi lo calcinai. Si formò un carbone di notevole resistenza all' ossidazione, tantochè dovetti riprenderlo più volte con acido nitrico ed anche con acqua regia affine di distruggerlo compiutamente. Quando il poco residuo apparve scolorito, lo sciolsi nell' acido nitrico e lo esperimentai col reattivo molibdico; la reazione del fosforo risultò considerevole. Su ciò che mi era rimasto dell' alcole non potei continuare le ricerche, essendo andato perduto per uno dei soliti incidenti nei laboratorii.

Dissi che la distillazione del liquido alcolico fu condotta a metà volume; ciò che rimase nella storta possedeva reazione acida gagliarda, onde occorse molto idrato di bario per avere quella sulla curcuma. Si formò un precipitato copioso e leggero, che raccolsi su feltro e che designo colla lettera A, sul quale tornerò più innanzi. Il feltrato, messo a distillare in corrente di acido carbonico che gorgogliava infine nell' acido nitrico tiepido, produsse la reazione del fosforo. Frattanto nel liquido acquoso rimasto dentro la storta erasi deposto un precipitato bianco scarso che chiamo B, e di cui pure sarà discorso più innanzi.

A questo punto aveva ottenuto adunque: 1° la prima metà dell' alcole di macerazione, separata per distillazione e che non conteneva nè fosforo libero nè fosfuro d' idrogeno, ma conteneva un composto fosforato; 2° il precipitato baritico, A; 3° un altro precipitato baritico, B; 4° la seconda metà dell' alcole di macerazione, pure raccolta per distillazione, su cui procedetti tosto nelle mie ricerche.

Esaminatolo, esso non diede reazione col biioduro di mercurio in soluzione alcolica, mentre col nitrato d' argento s' intorbidò fortemente in bianco, che a poco a poco imbrunì. Evaporando la quantità di quest' alcole (35 c. c.) a cui aveva aggiunto il nitrato d' argento, precipitando l' argento coll' acido cloridrico, decantando l' acido scolorito, per separarlo dal cloruro d' argento aderente alla cassula, e provato col reattivo molibdico, n' ebbi la reazione molto manifesta di fosforo.

Il detto alcole possedeva leggera reazione alcalina, che fu saturata con acido cloridrico; indi lo ridistillai in corrente di acido carbonico coll' acido nitrico in fine, da cui venne pure la reazione del fosforo.

Il residuo di tale ridistillazione era torbido; fu dibattuto con etere che lo rese limpido e sciolse una materia grassa, acida e di colore giallo bruniccio. Separato l' etere, evaporata blandemente la soluzione acquosa, ne rimase un residuo salino bianco, che tendeva alla deliquescenza e che fu ripreso con alcole assoluto per separarne il più del sale ammoniaco. La soluzione alcolica feltrata apparve un tantino giallognola; le aggiunsi tanto di etere finchè cessò di intorbidarsi, con che si depose dell' altro sale ammoniaco. Evaporando il liquido alcolico-etereo ne ebbi un sale cristallino deliquescente ed un po' colorato, da cui tolsi circa 10 milligrammi, che sciolsi in acqua per ottenere una soluzione discretamente concentrata da sottoporre ai reattivi:

Col *tannino*, nulla nell' istante, un po' d' intorbidamento in appresso, che si dileguò col tempo.

Col *cloruro di platino* nulla nel primo istante, poi s' incominciarono a formare cristallini isolati gialli, che visti col microscopio avevano la forma di ottaedri isolati e di un giallo intenso.

Col *cloruro d' oro* nessun precipitato all' istante quando la soluzione non era molto concentrata; colla concentrata assai, il precipitato fu istantaneo. Nel primo caso i cristalli si formarono dopo breve tempo ed andarono crescendo. Od istantanei o di formazione successiva, erano ottaedri trasparenti, uniti per lo più a croce od a stella, ma in modo che ciascun raggio di stella o braccio di croce constava di un seguito di ottaedrini, l' uno inserto nell' altro e con disposizione quasi identica a quella della figura D della tavola annessa alla prima *Memoria* sull' urina fosforata.

Col *bicloruro di mercurio* non avvenne precipitato; col tempo si deposero lunghi prismi cogli spigoli tondeggianti e che per lo più finivano a becco di flauto; avevano l' aspetto di esaedri.

Coll' *acido picrico*, leggero intorbidamento, a cui susseguirono lunghi cristalli gialli, che erano tavole romboidali, una sovrapposta all' altra come gli embrici, taluna però isolata tanto da poterne chiaramente scorgere la forma.

Coll' *ioduro di bismuto e potassio*, precipitato immediato di un rosso di minio, che permaneva.

Coll' *acido iodidrico iodurato*, precipitato in gocciole brune, in breve apparvero alla superficie cristalli del colore dell'iodio che, esaminati col microscopio, avevano in forma di lamine brune arborescenti e che tendevano a guastarsi col tempo.

Con un *alcali*, sviluppo di un odore acuto di pesce fracido.

Quattro goccie soltanto della soluzione rimaste dalle reazioni descritte, ossidate con acido nitrico, fornirono una reazione relativamente forte di fosforo.

Messo il rimanente sotto campana con idrato di sodio e lasciatovi parecchi

giorni acciò si disseccasse del tutto, ne rimaso un residuo cristallino, leggermente colorato, di cui furono presi milligr. 14 per un' esperienze fisiologica (Documento D). In tutto, il cloridrato di questa fosfina pesava milligr. 42, compresa la quantità adoperata per le reazioni e la ricerca del fosforo.

Il residuo acquoso rimasto dalla distillazione della seconda metà del macerato alcolico primitivo, e che pel trattamento colla barita aveva deposto il precipitato *B*, fu chiuso in pallone per esaurirlo con etere il giorno seguente. Era di un giallo bruniccio, e s' imbrunì di più stando a se, quantunque avutasi, come dissi, la precauzione di chiudere il recipiente. Dibattuto per due volte coll' etere, gli cedette una sostanza alcalina ed una materia colorante giallastra: come di giallognolo si colorì l' acqua cloridrica con cui trattai l' etere stesso per sottrarne la base contenutavi. L' acqua messa ad evaporare lasciò un residuo, che sciolsi in un poco di alcole assoluto, con che si separò una parte della materia colorante. La soluzione alcolica era alquanto bruniccia; versatovi a poco a poco dell' etere fino a formazione di precipitato, si scolorì alquanto, dacchè si deposero fiocchetti bruni che si ridussero in gocciole. Il liquido alcolico-etereo, non decolorato del tutto, fornì per evaporazione un residuo che fu seccato sotto campana con idrato di sodio e che restò vischioso, indi cristallizzò. Invano tentai di scolorirlo con qualche granello di carbone animale puro e scaldando. Riposto ad evaporare, rimase il cloridrato in cristallini insudiciati alquanto da un poco di materia bruniccia ed amorfa. Ne furono presi 14 milligr. che vennero sciolti in acqua e sperimentati su piccola rana, per iniezione, con fenomeni fisiologici di non poco valore (Documento E). Col rimanente del cloridrato di questa base feci le prove coi reattivi.

Tannino. Intorbidamento immediato bianco che crebbe alquanto.

Cloruro di platino. Verun precipitato; col tempo si deposero ottaedri per lo più uniti a due.

Cloruro d' oro. Nulla nell' istante; s' intorbidò però dopo qualche minuto, poi si deposero cristalli gialli a rosetta, e avvenne parziale riduzione.

Bicloruro di mercurio. Non succedè intorbidamento; seccandosi la goccia, cristallizzò un sale bianco a forma di foglie, profondamente frastagliate.

Acido picrico. Nulla immediatamente, ma s' intorbidò dopo un po' di tempo; seccandosi la goccia si formarono cristalli scoloriti in un liquido giallo.

Ioduro di bismuto e potassio. Intorbidamento immediato in gialliccio chiaro, che permane.

Acido iodidrico iodurato. Precipitato bruno che sotto il microscopio si vide formato di sottili laminette di un giallo bruniccio pallido, parte delle quali lunghe acuminate ed associate variamente, parte isolate e di forma rombica.

Con un *alcali* non isvolse odore sensibile.

Ossidatone qualche milligrammo con acido nitrico diede fortissima reazione di fosforo.

Messo a distillare l' etere già esaurito coll' acqua cloridrica, ne rimase un residuo contenente anche un poco di etere, che evaporando s' intorbidò deponendo una materia grassa. Ripreso questo con acqua, l' acqua divenne acidissima e lievemente giallognola; per evaporazione mi fornì un residuo non cristallizzato, una cui soluzione acquosa :

Col *tannino* s' intorbidò immediatamente, e l' intorbidamento crebbe.

Col *cloruro di platino* nulla fece, se non che dopo un certo tempo depose alcuni cristalli informi e tondeggianti.

Col *cloruro d' oro*, nè precipitato nè cristalli in appresso.

Col *bicloruro di mercurio* non avvenne precipitato; col tempo si formarono sottili tavolette di apparenza quadrangolare unite a rosette.

Coll' *acido picrico*, lieve intorbidamento, che andò crescendo, senza che si formassero cristalli.

Coll' *ioduro di bismuto e potassio,* nel primo momento qualche indizio di precipitato, che crebbe a poco a poco, onde la gocciola divenne opaca e del colore del Kermes.

Coll' *acido iodidrico iodurato*, precipitato in gocciole brune che cristallizzarono a poco a poco in laminette sottili, più o meno lunghe e di un giallo bruno chiaro.

Con un *alcali*, sviluppo di un odore leggero speciale, che rammentava quello dell' acqua in cui si bollono le patate: sottoposto a nuova disseccazione, rimase coll'aspetto di un residuo gommoso, poco colorito, del peso di 70 milligrammi, di cui fu presa la metà per lo sperimento su di una rana (Documento F). Questo cloridrato nell' atto del discioglierlo non palesò odore, se non che provandolo con un alcali svolse quello della nicotina, quantunque di poca acutezza e fugace. Colla ridissoluzione e la nuova disseccazione aveva adunque sofferto qualche alterazione, dacchè in sul principio con un alcali dava sentore di patate bollite, come già fu notato.

Ossidandone un poco con acido nitrico ecc., ne avvenne forte reazione di fosforo.

La materia grassa fu di lavacro difficilissimo, perchè vi si emulsionava, onde dovetti ridiscioglierla nell' etere, separare l' etere per decantazione e ricuperarlo distillandolo.

Era liquida, di colore rosso un po' gialliccio, di un odore rancido speciale, di reazione acida. Stemperata in acqua formava un' emulsione, da cui a poco a poco saliva a galla a modo e con consistenza di crema bianco-gialliccia; l' acqua di sotto rimaneva torbida. Avendo cercato di meglio raccoglierla tutta alla superficie, collo sciogliere del cloruro di sodio nell' acqua e scaldare in bagno-maria, non ottenni l' effetto. Introdotta in una liscivia densa di potassa caustica pigliò un rosso cupo e si agglomerò al punto da poterla facilmente portar via con una spatola. Sciolta in alcole assoluto e poi versata nella liscivia alcalina, agitando, la sostanza si raccolse in alto in forma di un liquido rosso gialliccio. Aggiuntovi in allora a poco a poco dell' acqua, indi dell' alcole in modo da diluire la liscivia, si sciolse in un liquido rosso giallognolo perfettamente limpido.

Versatane una parte in palloncino contenente limatura di zinco e liscivia di potassa concentrata, scaldando, e conducendo l' idrogeno in boccetta con acido nitrico tiepido, ed un palloncino frammezzo fra questa e l' altro della reazione, continuando a scaldare fino a che buona parte dell' alcole fosse distillato nel palloncino di mezzo, indi, evaporato l' acido nitrico fino a poco volume, ed esaminatolo col reattivo molibdico, avvenne reazione ben manifestata di fosforo.

Siccome tale materia grassa era molto fosforata e poteva nascere il dubbio che la reazione del fosforo palesatasi nell' acido nitrico provenisse da una fosfina volatile ingenerata tra la potassa e la sostanza, perciò presi l' alcole che era distillato nel palloncino di mezzo, e che esalava odore di pesce, lo saturai con acido cloridrico, lo evaporai e ripresi il residuo salino con alcole eterizzato, affine di separarne quel tanto di cloruro di potassio che erasi potuto formare in ragione dell' alcali, trasportato meccanicamente dal vapore alcolico. Diffatti ve ne era. La soluzione alcolico-eterea fornì per evaporazione un lieve residuo salino e bianco, che fu ridisciolto in acqua, poi rievaporato. Ne restarono 2 o 3 milligrammi di un sale-bianco in cristalli a foglia di felce che esalò odore di pesce colla soda e che manifestò le reazioni seguenti: fornì col tempo ottaedri di un bel giallo col *cloruro di platino;* lunghe lamine di un bel giallo col *cloruro d' oro;* intorbidamento e poi cristalli lamellari e lunghi col *bicloruro di mercurio;* il simile coll' *acido picrico;* nulla coll' *ioduro* di *bismuto* e *potassio;* goccioline brune coll' *acido iodidrico iodurato.* La soluzione era concentrata al possibile, non avendo adoperato che due sole goccie d' acqua per sciogliere il cloridrato.

Tutto ciò che rimase dalle reazioni (e furono due terze parti, perchè procedetti in esse col massimo risparmio su lastrine di vetro) lo ossidai con acido nitrico ed un granellino di cloruro di sodio: non n' ebbi reazione sensibile di fosforo, onde m' indussi a ritenere, che la reazione abbastanza forte prodotta dall' acido nitrico in cui aveva gorgogliato l' idrogeno derivasse da fosforo proveniente dalla materia grassa e non da fosfina trasportata dal gas.

Quella parte della soluzione alcolico-potassica della sostanza, che non aveva messo a reagire collo zinco, da limpida che era s' incominciò ad intorbidare a poco a poco e si empì di cristallini luccicanti e scoloriti, i quali, osservati col microscopio, si vide che erano di colesterina, e di cui ebbi le reazioni coll' acido solforico ed il cloroformio, coll' acido solforico e l' iodio e coll'acido nitrico e l' ammoniaca. Oltre a ciò, avendo sciolti in alcole i cristallini minuti rimasti sul feltro e messa la soluzione ad evaporare spontaneamente, la colesterina si depose in cristalli macroscopici ben definiti.

Da quanto precede parrebbe, che la sostanza grassa risultasse da un accoppiamento della colesterina con un composto fosforato acido, capace di dar nascimento all'idrogeno fosforato in reazione coll'idrogeno nascente. Non potrebbe essere veruno degli acidi fosforici copulati normali contenuti nel cervello, poichè, come è noto, derivano dall' acido fosforico, in taluno de' cui idrossili avvenne sostituzione

di qualche residuo acido o di qualche idrocarburo. È noto che l'acido fosforico o nello stato normale od in quello di sostituzione ricevuta non è riducibile dall'idrogeno nascente.

Il liquido alcolico-potassico che era limpido dopo la feltrazione rimase tale anche nel dì successivo, e di un rosso bruniccio alquanto intenso. Per separare la sostanza derivante dal cervello e rimasta in soluzione, vi aggiunsi una liscivia concentrata di potassa, e dibattei due volte con un volume e mezzo di etere. L'etere si colorò di rosso bruniccio senza che frattanto esaurisse il liquido alcalino. Decantato accuratamente, era limpido e possedeva forte reazione alcalina sulla carta arrossata di tornasole, per cui affine di togliere la potassa che vi si era disciolta lo dibattei con acqua inacidita dall'acido cloridrico, e poscia con acqua stillata sola. L'etere perdendo l'alcali mutò dal rosso bruniccio al giallognolo. Dopo i lavacri acquosi lo distillai per ottenere a residuo la sostanza, che rimase di colore giallo e che poscia trattai con acqua, nella quale si emulsionò parzialmente. Non potendo procedere per feltrazione per separarla dall'acqua, le sopravversai dell'etere e dibattei; ma l'etere mentre la sciolse in parte, ne lasciò un'altra porzione in istato emulsivo, a distruggere il quale riuscii aggiungendo del solfuro di carbonio, che mescendosi coll'etere formò una soluzione limpida e di un bel giallo dorato. Tale soluzione messa ad evaporare spontaneamente lasciò una materia oleosa, di un odore acuto, che direi fosforato, di reazione acida quando fu sciolta nell'alcole, e che ossidata con acqua regia fornì fortissima la reazione del fosforo. Aveva consistenza oleosa, se non che a poco a poco si ossidava cristallizzando in granellini.

La potassa che operò lo sdoppiamento della sostanza primitiva poteva contenere un acido minore del fosforo, caso che la materia grassa sdoppiata lo avesse contenuto, onde la saturai fino ad acidità con acido solforico; concentrai la soluzione salina fino a che buona parte del solfato potassico avesse cristallizzato; ne decantai l'acqua madre, che trattai con alcole assoluto il quale ne separò nuovo solfato potassico. Evaporai l'alcole, che era acidissimo, fino a che la parte alcolica fosse svanita, e versai il liquido rimasto in apparecchio con zinco ed acido solforico diluito. L'acido nitrico in cui gorgogliò l'idrogeno non diede contrassegno di fosforo.

Il lettore rammenterà che fu rimandato più innanzi l'esame dei precipitati baritici *A* e *B*, perchè lo studio che dovetti farne, essendo piuttosto minuto e lungo, avrebbe intralciato il discorso intorno ai risultati ottenuti dagli altri prodotti del cervello fosforato: al presente verrò a parlarne.

Ambedue furono raccolti su feltro. lavati con alcole e poscia con acqua. Avverto subito che il precipitato *B* constava quasi totalmente di carbonato di bario e che si sciolse con effervescenza nell'acido cloridrico diluito; precipitata la barite con acido solforico, decantata la parte liquida, concentrata e sperimentata col reattivo molibdico non manifestò che un leggerissimo contrassegno di fosforo.

Avvenne l' opposto del precipitato *A*. Dopo i lavacri con alcole di 66°, lo tolsi dal feltro mentre era umido, lo stemperai in acqua, poi lo misi a lavare. Il lavacro acquoso era alcalino per barite libera ed anche un tantino colorato. I lavacri acquosi furono continuati a lungo, cioè fino al punto che quasi più nulla si sciogliesse.

Il precipitato diminuì di molto durante il lavamento; lo stemperai di nuovo nell' acqua ed aggiuntovi dell' acido solforico per la precipitazione della barita, feci reagire il liquido acido con zinco ed acido solforico diluito, conducendo a gorgogliare il gas nell' acido nitrico tiepido, da cui poscia ottenni una forte reazione col reattivo molibdico.

In appresso, nei lavacri di *A* indirizzai una corrente di acido carbonico che ne precipitò carbonato di bario, il quale si ridisciolse in parte in istato di bicarbonato, per decomporre il quale collocai il recipiente in bagno caldo, tenendovelo più ore. Siccome, dopo ciò, il liquido aveva acquistato una debole reazione acida, perciò a neutralizzarla vi aggiunsi acqua di barite fino ad alcalinità, e lo lasciai a se all' aria; con ciò depose del carbonato di bario per opera dell' acido carbonico atmosferico, e questo giovò a decolorarlo quasi del tutto, poichè il carbonato di mano in mano che si produceva e si deponeva trasse con se la materia colorante.

Il complesso dei lavacri acquosi, così decolorato, e perduta la barite eccedente, conteneva però un discreta quantità di questa base in soluzione; prova evidente di un sale baritico solubile.

In allora precipitai con acido solforico diluito, in proporzione di esatta equivalenza, tutta la barite del composto baritico; decantai, e presa una porzione del liquido, lo sottoposi a distillazione; il distillato risultò acido leggermente. Saturatane l' acidità con carbonato di sodio, ed evaporatolo fino a cristallizzazione, il sale rimasto svolgeva forte odore di acido formico coll' aggiungervi qualche goccia di acido solforico diluito. Per meglio determinare l' acido formico, lo distillai in piccola storta e trattai lo stillato con bicloruro di mercurio, con che avvenne intorbidamento e precipitazione di calomelano.

Il liquido rimasto nella storta d' onde per distillazione erasi separato dell' acido formico, posto a reagire con zinco ed acido solforico, trasfuse all' idrogeno sprigionatosi tanto di fosforo, che l' acido nitrico tiepido, in cui il gas aveva gorgogliato, diede col reattivo molibdico una reazione assai manifesta.

Tutta l' altra porzione del liquido, che non fu distillata, saturata esattamente con carbonato di sodio, ed evaporata, formò un sale in forma vischiosa, che non cristallizzò e che provai con alcuni reattivi.

Non precipitò coll' *acetato neutro di piombo,* nè col *percloruro di ferro,* nè col *solfato di rame;* precipitò in bianco col *nitrato d' argento* ed il precipitato s' imbrunì per bollitura; col *bicloruro di mercurio* nulla nel primo istante, poscia s' intorbidò in bianco; col *nitrato mercuroso* diede un precipitato bianco che a poco a

poco s'imbrunì e che scaldando depose un sedimento grigio di mercurio metallico. Ossidandolo coll'acido nitrico fornì un residuo carbonoso, d'incenerimento difficile, per cui fu duopo adoperare l'acqua regia a distruggere tutto il carbone, e donde ottenni forte reazione di fosforo.

Trattavasi adunque di un acido fosforato organico e producente effetti riduttivi, e siccome la parte messa già a reagire collo zinco e l'acido solforico, da quanto dissi, svolse idrogeno fosforato, perciò era da argomentarne che fosse un acido del fosforo non al massimo dell'ossidazione.

Affine di averlo puro ne precipitai il sale di sodio con soluzione di acetato basico di piombo fino a che si formava precipitato, raccolsi questa su feltro e lo lavai più volte senza tuttavia protrarre troppo innanzi i lavacri, perchè si scioglieva alquanto nell'acqua. Dopo spremitura, stemperai il composto piombico in acqua, lo decomposi coll'acido solfidrico, indi evaporai il liquido fino al punto che incominciò a cristallizzare. Lasciato poscia a se, cristallizzò per intero, e l'acido rimase in aghetti, scoloriti, solubili facilmente nell'acqua, insolubili nell'alcole assoluto, il quale anzi li rendeva opachi, perchè ne sottraeva l'acqua di cristallizzazione. La soluzione acquosa era acidissima, non precipitava che scarsamente col *nitrato d'argento* ed il precipitato ed il liquido s'imbrunirono scaldando ad ebollizione. Non precipitò col *solfato di rame* nè col *percloruro di ferro*, su cui tuttavia produsse decoloramento, onde il sospetto che avesse ridotto parte del percloruro come difatti lo riconobbi col mezzo del prussiato rosso di potassa. Nulla da principio col *bicloruro di mercurio*, se non che in breve avvenne intorbidamento in bianco; col *nitrato mercuroso* un intorbidamento immediato bianco, il quale a poco a poco si fece grigio; ridusse scaldando il *cloruro d'oro*.

Ossidatane una piccola quantità diede forte reazione di fosforo.

Il lavacro acquoso del precipitato piombico dal quale ottenni poi libero l'acido testè descritto doveva contenere l'acetato di piombo adoperato in eccedenza e di più anche il formiato, sempre che l'acido formico, che ebbi per distillazione, come notai in addietro, fosse semplicemente commisto all'acido fosforato e non un prodotto di decomposizione o di sdoppiamento. Evaporato adunque il lavacro coll'acqua madre fino a secco, ripresi il residuo con alcole, che scioglie gli acetati di piombo e non i formiati, e su ciò che rimase indisciolto procedetti con acido solforico fino a precipitazione del piombo; decantai, distillai fino ad un certo punto, ed il distillato lo esperimentai con *permanganato di potassa* che tosto si ridusse; con *percloruro di ferro* che diede il rosso come coll'acido acetico; col *cloruro d'oro* che a poco a poco depose oro metallico; col *bicloruro di mercurio* che produsse calomelano. Inoltre saturato l'acido con potassa, evaporato fino a secco ed aggiuntavi qualche goccia di acido cloridrico diluito svolse l'odore acuto e speciale dell'acido formico. Dunque la parte solubile separatasi, lavando con acqua, dal precipitato baritico *A* conteneva: 1° un acido fosforato e cristallizzabile fornito di azione riduttiva, e che sprigionava idrogeno fosforato coll'idrogeno nascente; 2° dell'acido formico.

Concludendo: il cervello oggetto delle ricerche descritte, fornì:

1° Un prodotto fosforato volatile e neutro;

2° Composti acidi che si comportarono come gli acidi minori del fosforo in reazione collo zinco e l'acido solforico;

3° Fosfine, di qualcuna delle quali fu verificata l'azione venefica;

4° Un composto complesso, che per l'azione della potassa si sdoppiò in colesterina ed in prodotto oleoso fosforato, e che in soluzione alcalina reagendo collo zinco cedette fosforo all'idrogeno nascente.

RICERCHE CHIMICO-TOSSICOLOGICHE

SUL

FEGATO DI UNO CHE SI AVVELENÒ CON FOSFORO

MEMORIA

DI F. SELMI E C. STROPPA

(Letta nella 24 Adunanza 20 Maggio 1880)

Nella *Memoria* in cui fu descritto quali le ricerche ed i prodotti ottenuti dal cervello di quel tale che si suiccise inghiottendo una dose forte di fosforo, venne indicato, che si era anche avuto il fegato, che fu sminuzzato e conservato nell' alcole concentratissimo, per indi procedere ad indagini somiglianti a quelle che si erano eseguite sull' altro organo.

Il recipiente che conteneva il fegato era stato chiuso con tappo portante due cartoline probatorie, una imbevuta di nitrato di argento, l' altra di acetato di piombo. Dopo alcune ore, la prima imbrunì lievemente, ma non fornì contrassegni evidenti della presenza del fosforo.

Fatta tale osservazione, fu rimesso il tappo a smeriglio e masticatovi ad impedire l' ingresso dell' aria, il quale non venne tolto che il 16 del Giugno, quando cioè s' incominciarono le indagini. Togliendolo, e fiutando nel vaso, non si manifestò verun odore di putrefazione; l' alcole possedeva reazione acida molto sensibile.

Fu feltrato, si spremette la materia solida, che poi si lavò con alcole assoluto, già inacidito con qualche goccia di acido solforico; si feltrò l' alcole di lavacro, che poi s' unì a quello della macerazione.

Per l' andamento delle operazioni analitiche non si mutò punto quello che fu seguito pel cervello, dimodochè non crediamo opportuno di spendere parole per farne la descrizione.

L' alcole venne introdotto in apparecchio distillatorio, disposto nel solito modo e con un lento afflusso di acido carbonico, che continuò a percorrerlo durante la distillazione, e che infine gorgogliava nell'acido nitrico mantenuto tiepido. La distillazione fu condotta fino al punto in cui metà dell'alcole era passata nel collettore refrigerato.

L'acido nitrico in cui gorgogliò l' acido carbonico, messo ad evaporare, previa aggiunta di cloruro di sodio, fornì un residuo carbonoso sul quale si dovette insistere più volte, perchè risultasse incoloro. Sciolto in ultimo in un poco d' acido nitrico ed aggiuntovi del reattivo molibdico, successe un tenue ingiallimento, indi una posatura lievissima di fosfomolibdato, molto inferiore a quello ch' era stato ottenuto dall' acido nitrico nell' operazione corrispondente sul cervello.

L' alcole che si era raccolto nel collettore possedeva reazione alcalina leggera. Versatone in due bicchierini d' assaggio, in uno si stillò qualche goccia di soluzione alcolica di nitrato d' argento, e nell' altro qualche goccia di soluzione, pure alcolica, di biioduro di mercurio.

Nulla si palesò col primo reattivo; col secondo invece apparve in sul principio un coloramento giallo, a cui successe un' opalescenza bianchiccia, che crebbe col tempo e divenne di un giallo aranciato. La mancanza di reazione col nitrato di argento indicava l' assenza del fosforo libero e dell' idrogeno fosforato; quella che si ebbe col biioduro di mercurio, non poteva derivare nè dall' uno, nè dall' altro dei due corpi, perchè il biioduro è meno squisito del nitrato d' argento, perchè reagisce con quelli in modo differente dall' accennato, onde indicava piuttosto il sussistere nell' alcole, di una qualche sostanza speciale capace di produrre sul biioduro, le mentovate apparenze.

Ciò eseguito, si saturò l' alcalinità dell' alcole col sufficiente di acido cloridrico, fino a reazione acida, e si procedette alla ridistillazione nel noto apparecchio, colla corrente di acido carbonico e l' acido nitrico infine.

L'acido nitrico anche in questo caso fornì una traccia appena sensibile di fosforo.

Volendo verificare se l'alcole ridistillato, e da cui ridistillando si era sottratta la base volatile convertita in cloridrato, contenesse qualche prodotto neutro, passato con esso nella ridistillazione, fu ossidato con vapori nitrosi e rimesso a distillare fino a scarso residuo nella storta; il residuo fu versato in cassula di porcellana, aggiuntovi un cristallino di cloruro di sodio e fu evaporato a secco.

Ripreso tante volte con acido nitrico quante ne occorsero per averlo incoloro, fu poscia assaggiato col reattivo molibdico con che precipitò in giallo, e il precipitato fu in quantità discreta.

Si venne ora alla ricerca sul cloridrato della base volatile che era rimasto dalla ridistillazione dell' alcole alcalino e saturato con acido cloridrico. S' incominciò a concentrarlo in bagno maria, ad espellere quel tanto di alcole che vi era rimasto. Essendosi intorbidato, forse per materia grassa, fu dibattuto con etere che lo schiarì, e, separato l' etere, fu evaporato fino a secco a blanda temperatura. Si riprese il cloridrato con alcole assoluto, che lasciò indisciolto del sale ammoniaco; la soluzione alcolica esalava odore di pesce fracido ed era tinta alquanto di gialliccio. Vi si versò il sufficiente di etere, per separare quel tanto di sale ammoniaco che si era pur disciolto nell' alcole, si feltrò il liquido alcolico-etereo dal quale, per evaporazione, si ottenne un cloridrato cristallizzato in aghetti visi-

bili ad occhio nudo, e che trattato coi reattivi, si comportò nel modo seguente:

Col *tannino* non diede precipitato.

Col *cloruro di platino* depose rari ottaedri isolati.

Col *cloruro d' oro* diede un precipitato immediato e copioso di cristallini gialli con forme all' incirca, quali si hanno nei cristalli di neve.

Col *bicloruro di mercurio* nulla avvenne da principio; scorso qualche tempo, si formarono cristalli incolori di due forme, una di tavole quadrangolari, e l' altro di lunghe lamine a palma.

Coll' *acido picrico* produsse un leggero intorbidamento, a cui susseguirono dopo alcuni minuti, lunghi cristalli aghiformi variamente disposti.

Coll'*ioduro di bismuto* e *potassio* ingenerò un precipitato immediato di color del minio.

Coll' *acido iodidrico iodurato* precipitò immediatamente in gocciole brune, le quali in breve si convertirono in cristalli ramificati a un dipresso come le corna di daino.

Colla *soda caustica*, odore acuto di pesce fracido.

Ciò che avanzò dalle reazioni notate fu posto sotto campana con idrato di sodio, acciò si disseccasse del tutto: il cloridrato secco pesava gr. 0,050.

Era deliquescentissimo. Fu sciolto in acqua e la soluzione fu divisa in due parti eguali.

La prima metà venne ossidata con *acido nitrico*, replicando più volte l' azione dell' acido a caldo affine di distruggere la parte organica e cercare il fosforo.

Devesi avvertire che fatta l' evaporazione, dopo aggiunto per la prima volta l' acido nitrico, il residuo apparve assai poco incarbonito e che esalava con persistenza l' odore di pesce fracido. Il residuo quando in ultimo restò incoloro, ingiallì e precipitò fortemente col reattivo molibdico.

Da ciò si vede evidentemente che questa base volatile era una fosfina.

La seconda metà della soluzione acquosa, iniettata sotto la pelle di una rana, produsse effetti venefici con fenomeni speciali, come dal Documento *G*.

Quando fu messo a distillare il liquido alcolico in cui era stato macerato il fegato, fu detto che nella distillazione, fu ricuperata la metà soltanto dell' alcole. Ciò ch' era rimasto nella storta possedeva reazione molto acida per cui si sovrassaturò con latte di barite, d' onde si ottenne un precipitato discretamente voluminoso, che fu raccolto sul feltro e lavato più volte con alcole di 66° centesimali.

Mescolato il lavacro col primo feltrato, si versò nell' apparecchio distillatorio colla corrente di acido carbonico e l' acido nitrico in fine: la distillazione fu spinta fino a che passasse tutta la parte alcolica.

L' *acido nitrico* in cui aveva gorgogliato l' anidride carbonica diede una reazione sensibile appena di fosforo.

Il distillato manifestava reazione alcalina; col *nitrato d' argento* alcolico non appalesò nè fosforo libero, nè idrogeno fosforato; s' intorbidò e precipitò in giallo col *biioduro di mercurio*, facendolo tuttavia in modo alquanto diverso da quello

che era stato osservato per l'altro distillato alcolico, onde nacque il sospetto che contenesse una base volatile diversa da quella che fu esaminata in addietro.

Si saturò l'alcalinità con acido cloridrico e si ridistillò secondo il consueto; l'acido nitrico posto in fine dell'apparecchio fornì un tenuissimo contrassegno di fosforo, e l'*alcole* che si era ricuperato colla ridistillazione, ossidato coi vapori nitrosi ecc. lasciò un residuo in cui col reattivo molibdico si ottenne un precipitato cedrino più copioso che non fu quello del primo ridistillato alcolico.

Il liquido acquoso rimasto nella storta in conseguenza della ridistillazione dell'alcole, messo ad evaporare s'intorbidò alquanto, ma fu reso limpido mediante lo sbattimento con etere, il quale s'impadronì d'un poco di materia grassa. Decantato l'etere, evaporata fino a secco la soluzione acquosa ne rimase un sale lievemente colorato di giallognolo, che fu ripreso con alcole assoluto. Una certa quantità di sale ammoniaco non si disciolse, e l'alcole rimase colorato di gialliccio. Per aggiunte frazionate di etere si fece deporre quella parte di sale ammoniaco che si era sciolta nell'alcole. Feltrato l'alcole-etereo e indi posto ad evaporazione spontanea, ne risultò un cloridrato un po' meno deliquescente di quello di cui fu parlato in addietro, e che assaggiato con soda caustica non isvolse l'odore di pesce fracido, come la prima base volatile, ma esalò invece un odore acuto di conina.

Quest'odore fece nascere il sospetto di essersi abbattuti nella base volatile della cicuta, che si fosse ingenerata tra i prodotti dell'avvelenamento del fosforo, per cui si credette opportuno, di procedere all'esame delle reazioni in confronto col *cloridrato di conina*. Una certa differenza tuttavia si conobbe sussistere fra i due cloridrati esaminati di confronto, anche prima di procedere coi reattivi, in quanto che quello di conina, esalava l'odore della base, sebbene di reazione debolmente acida, mentre l'altro non dava odore di sorta se non quando vi si aggiungeva un alcali.

Ecco il quadro delle reazione di confronto fra i due cloridrati:

Cloridrato della base volatile del fegato.	Cloridrato di Conina
Tannino. Non diede precipitato.	S' intorbidò e l'intorbidamento crebbe alquanto.
Cloruro di platino. Precipitato di piccoli ottaedri inserti l'uno nell'altro con disposizioni a croci ed a stelle, ma in modo diverso da quanto si osserva pel sale ammoniaco e pei cloridrati di altre basi volatili.	Verun precipitato.
Cloruro d'oro. Precipitato immediato cedrino somigliante per l'aspetto a quello che dà il sale ammoniaco in soluzione piuttosto concentrata col cloruro di platino.	Precipitato immediato di un giallo pallido in goccioline che non cristallizzarono.

Bicloruro di mercurio. Nulla immediatamente, indi evaporando, formazione di cristalli a stelle composti di quattro lamine romboidali unite per uno degli angoli acuti.	Intorbidamento immediato che crebbe con posatura di goccioline lattee.
Acido picrico. Intorbidamento istantaneo piuttosto copioso, indi formazione di lunghi aghi e di laminette esagonali con frammezzo ottaedri scoloriti.	Intorbidamento senza formazione di cristalli.
Ioduro di bismuto e potassio. Precipitato rosso che permane.	Precipitato di un rosso di minio che a poco a poco va dileguando tanto che la goccia diviene quasi limpida.
Acido iodidrico iodurato. Grosse gocciole brune che non cristallizzano.	Verun precipitato.

Dal paragone dei risultati ottenuti coi reattivi venne confermato, che questa base volatile del fegato fosforato non poteva essere identificata colla conina, quantunque le assomigliasse tanto strettamente per l' odore; ma un nuovo argomento che ne dimostrò la diversità assoluta fu quello desunto dalla ricerca se contenesse del fosforo e fosse perciò una fosfina, e dai fenomeni fisiologici.

Quel tanto di cloridrato che sopravvanzò alle indagini coi reattivi, fu concentrato sotto campana con idrato di sodio, acciò si disseccasse compiutamente. Pesato dopo la disseccazione si trovò che ragguagliavasi ad 1 decigrammo.

Sciolto in acqua, si divise la soluzione in due parti uguali, una delle quali fu ossidata con acido nitrico per distruggere la materia organica. Anche in questo caso si notò, che nella prima ossidazione il residuo salino svolgeva odore di pesce fracido, il che significa che la base a odore di conina si era modificata in contatto dell' acido nitrico, forse divenendo uguale all' altra base volatile che fu già esaminata a pag. 805

Insistendo coll' acido nitrico a cui si era aggiunto un cristallino di carbonato di sodio, fino a che rimanesse scolorito, e poi esplorato col reattivo molibdico, diede un abbondante precipitato cedrino, indicante perciò una certa abbondanza di fosforo nella base.

L' altra metà della soluzione acquosa fu iniettata in una rana che morì in breve tempo con fenomeni di pronto avvelenamento, come dal Documento *H.*

Dopo di avere esaminate le due basi volatili, la prima contenuta in quella porzione di alcole che fu distillata senza alcalizzare il macerato alcolico del fegato, e la seconda che fu riscontrata nell' altra porzione dell' alcole distillato dopo l' alcalizzamento, si passò alla ricerca sul residuo acquoso ed alcalino che era rimasto nella storta, e che frattanto erasi messo in disparte.

Era torbidiccio, un po' colorato di giallo e con sopra galleggiante qualche gocciolina di materia oleosa; aveva pure lasciato deporre un sedimento bianchiccio, piuttosto scarso che si verificò consistere di solo carbonato di bario.

Decantato il liquido dal sedimento si dibattè con uguale volume di etere, che portó via una materia alcalina in modo che la parte acquosa, dopo la separazione dell' etere non fece passare all' azzurro la carta rossa di tornasole.

L' etere fu dibattuto con acqua inacidita dall' acido cloridrico, e ciò per due volte; l' acqua si colorò lievemente di giallo.

Evaporatala a blando calore su bagno maria, lasciò una tenue quantità di una materia vischiosa e colorata, che si sciolse compiutamente nell' alcole assoluto, da cui nulla precipitò aggiungendo dell' etere, e che fu ricuperata evaporando il solvente. Ripresa con acqua e saggiata questa coi reattivi generali degli alcaloidi, non diede veruna reazione; come pure non isvolse odore sensibile con qualche goccia di soda caustica.

L' etere ch' era stato esaurito coll' acqua cloridrica fu messo a distillare, con che rimase una sostanza oleosa di un giallo d' oro, e di odore rancido nauseoso, la quale dibattuta con acqua, la colorò un tantino di giallo e le trasfuse una leggera reazione acida.

Per evaporazione fornì una materia gialliccia non cristallina, di odore simile a quella dell' olio cotto, e che in soluzione acquosa coi reattivi degli alcaloidi si comportò nelle seguenti maniere:

Col *tannino* intorbidamento immediato che poi si dilegua col tempo.

Col *cloruro di platino*, nessuna reazione, neppure stando a sè.

Col *cloruro d' oro*, lieve intorbidamento bianchiccio, che svanisce eccedendo appena col reattivo: col tempo, riduzione d' oro metallico.

Col *bicloruro di mercurio*, opalescenza in sul principio, che va crescendo senza che tuttavia si formino dei cristalli.

Coll' *acido picrico*, nulla.

Coll'*ioduro di potassio* e *bismuto*, precipitato gialliccio, solubile in un' eccedenza del reattivo.

Coll' *acido iodidrico iodurato*, intorbidamento sensibile appena.

Con un alcali svolgimento di odore di olio cotto.

Essendo tenue la quantità della materia non si potè sperimentarla sulla rana; si adoperò invece a distruggerla coll' acido nitrico per cercarvi il fosforo, di cui fu trovato qualche traccia soltanto.

Dopo l' esaurimento acquoso la sostanza oleosa rimase liquida, limpidissima, del giallo d' oro e dell' odore rancido nausante che furono già indicati, non miscibile coll' acqua e solubilissima nell' alcole. La soluzione alcolica, concentrandola, divenne d' un rosso scuro ed assunse l' aspetto e l' odore dell' olio di fegato di merluzzo. Volendo riconoscere se conteneva qualche composto fosforato da cui l' idrogeno nascente sottraesse del fosforo, ne fu saponificata una parte con liscivia concentrata di potassa caustica, e questa versata in palloncino fu fatta reagire a caldo con limatura di zinco; l' idrogeno che si venne sprigionando fu condotto a gorgogliare nell' acido nitrico tiepido, nel quale in appresso fu cercato vanamente

il fosforo col reattivo molibdico. Siccome tra il palloncino della reazione e quello contenente l' acido nitrico ne era stato intrapposto uno vuoto che fu mantenuto freddo, e siccome in esso si era condensata una certa quantità di acqua, perciò si credette opportuno di esaminare il liquido acquoso così raccolto ad accertarsi se per caso vi sussistesse qualche base volatile prodotta dalla reazione; ma nulla vi fu riscontrato. Uno sciolto potassico-alcolico della sostanza oleosa, non depose cristalli di colesterina come era avvenuto pel cervello.

Rimaneva da indagare se la sostanza oleosa fosse fosforata, quantunque non avesse ceduto fosforo all' idrogeno nascente; per conseguenza fu ossidata con acqua regia ripetute volte; ma siccome resisteva pertinacemente, perciò aggiuntovi qualche cristallino di cloruro di sodio, poi evaporando a secco, si calcinò il residuo carbonoso in crogiuolino di porcellana, insistendo fino al punto che fossero scomparse le ultime particelle di carbone. Sciolto quel poco di materia salina nell' acido nitrico ed assaggiando col reattivo molibdico ne nacque un precipitato copioso di fosfo-molibdato, d' onde si vide che la detta sostanza era fosforata.

Per compiere le ricerche sui prodotti contenuti nel macerato alcolico del fegato, seguendo le norme osservate per quello del cervello, dobbiamo rammentare che dopo avere distillato metà dell'alcole, il liquido che rimasto stato trattato con idrato di barita, con che erasi formato un precipitato, il quale fu lavato per decantazione con alcole di 66° indi raccolto su feltro e lasciato a sgocciolare. Dopo lo sgocciolamento fu spremuto tra carta bibula e stemperato in acqua, la quale sciolse un sale di barita, onde la necessità di proseguire l' esaurimento con acqua fino a che l'ultimo lavacro non precipitava più coll'acido solforico.

I lavacri acquosi uniti insieme furono messi da un lato per tosto investigare se il precipitato baritico, rimasto insolubile, contenesse qualche acido minore del fosforo. Si stemperò di nuovo in acqua e vi si aggiunse dell' acido solforico affine di separare tutta la barite in istato di solfato, e la parte liquida ed acida fu versata in bottiglia di Woulf con zinco granulato ed acido solforico un po' diluito. L' idrogeno che si venne sprigionando, dopo avere attraversato un palloncino vuoto, fu condotto a gorgogliare nell' acido nitrico tiepido; la reazione che procedette piuttosto lenta, fu continuata per 24 ore. Nell' acido nitrico non si riscontrò neppure una traccia di fosforo. Dunque il precipitato baritico del fegato, si comportò in modo diverso da quello corrispondente del cervello, che messo in uguale reazione aveva ceduto del fosforo all' idrogeno nascente.

Sui lavacri acquosi, che erano stati messi a parte ed alquanto giallognoli si fece reagire una corrente di anidride carbonica, che non vi produsse intorbidamento. In allora ne fu precipitata la barita con una proporzione esatta d' acido solforico diluito, fu separato per feltro il solfato di barite e raccolto il feltrato ch' era limpido e meno colorito di prima. Fu diviso in due parti una delle quali, versata in istorta, si distillò fino ad un terzo di residuo.

Il distillato non possedeva reazione acida ben manifesta, nondimeno fu alcalizzato con un poco di carbonato sodico, poi concentrato a piccolo volume in bagno

maria e ridistillato dopo aggiunta di qualche goccia d' acido solforico. Il nuovo distillato esalava odore somigliante a quello dell' acetone, non ridusse il *bicloruro di mercurio* come avrebbe fatto se avesse contenuto *acido formico*, quale si era ottenuto nell' operazione corrispondente eseguita sull' estratto del cervello.

Il residuo liquido rimasto nella storta era acidissimo. Volendo verificare se l' acidità provenisse da qualche acido fosforato capace di cedere fosforo all' idrogeno nascente, fu posto a reagire con zinco ed acido solforico, in guisa che l' idrogeno si svolgesse lentamente e continuando per 24 ore. Il gas che gorgogliava nell' acido nitrico tiepido, mostrò di contenere tracce di fosforo, poichè l' acido nitrico, dopo concentrazione, s' ingiallì a poco a poco e precipitò col molibdato d' ammonio.

L' altra parte del liquido ch' era stato precipitato coll' acido solforico e non sottoposta a distillazione, venne saturata con carbonato di sodio, ed evaporata in bagno maria quasi a secchezza; così facendo lasciò un sale che non cristallizzò ma che si coprì di una pellicola semigommosa.

Fu provato con parecchi sali metallici, e dacchè precipitava coll' acetato basico di piombo, se ne trasse partito per ottenere l' acido puro. Il precipitato piombico era bianco; fu raccolto su feltro e lavato fino ad un certo punto poichè non del tutto insolubile nell' acqua. Spremuto fra carta bibula, si stemperò in acqua e si decompose con acido solfidrico, si feltrò il liquido e si evaporò fino a consistenza di sciloppo in bagno maria. Per ridurlo a secco fu posto il vetro di orologio che lo conteneva sotto campana con idrato di sodio: nel dì seguente era cristallizzato per intero in aghetti incolori, insolubili nell' alcole assoluto e solubili nell' acqua.

La soluzione acquosa che era acidissima e inodora produsse le raezioni seguenti:

Col *nitrato d' argento* precipitò dei fiocchi leggeri di un bianco gialliccio che imbrunirono per ebollizione.

Col *solfato di rame* non precipitò.

Col *percloruro di ferro* divenne alquanto opalino, ma tosto si schiarì con qualche decolorazione del liquido, in cui il prussiato rosso svelò la riduzione del sale ferrico a ferroso.

Col *bicloruro di mercurio* si manifestò opalescenza immediata, poi un intorbidamento più forte in bianco.

Col *nitrato mercuroso* si formò nel primo istante un precipitato bianco che tosto imbrunì.

Calcinandone una porzione s' incarbonì; per distruggere la parte organica con acido nitrico e un cristallino di cloruro di sodio, tornò indispensabile che si replicasse più volte l' azione dell' acido nitrico; il residuo reagì copiosamente col molibdato di ammonio.

Il sale baritico solubile nell'acqua ed insolubile nell'alcole, che era trapassato nei lavacri acquosi del precipitato complessivo conteneva adunque un acido fisso, cristallizzabile, organico-fosforato.

RIEPILOGO E CONSIDERAZIONI

SULLE

QUATTRO MEMORIE PRECEDENTI

DEL

PROF. FRANCESCO SELMI

Gli studî dei prodotti anomali fosforati riscontrati nell' urina, nel cervello e nel fegato degli avvelenati con fosforo, che compresi nelle quattro *Memorie* lette in quest' Accademia, nelle sessioni del 1° Aprile e del 20 Maggio, mi condussero a svelare dei fatti di non poca utilità per le ricerche tossicologiche.

È certo oramai che, dato il caso nel quale il tossicologo non trovi più fosforo libero od acidi minori di esso nello stomaco, negli intestini e nel fegato, può nondimeno rendere palese il veneficio avvenuto, operando sui materiali che furono argomento delle mie ricerche, attenendosi al modo di procedere che fu da me seguito, come quello che mi fornì i migliori risultati. Siccome mi tornò necessario frattanto di diffondermi con tali particolarità che forse a taluno parranno soverchie nella narrazione dei procedimenti usati e degli effetti ottenuti, onde può esserne derivato che il lettore si formi con qualche difficoltà un concetto chiaro e comparativo del loro complesso; perciò ho reputato opportuno di far seguire alle dette *Memorie* il presente riepilogo, il quale sia quasi un' esposizione molto compendiosa di quanto già discorsi a lungo.

Incominciando dal ridire in breve quanto si riferisce alle urine esaminate, noterò:

1.° Che parecchie di esse svolsero un vapore fosforato, il quale imbrunì la carta d' argento, senza d' uopo di scaldarle, verificandosi con questo l' osservazione de' miei allievi i Dottori Pesci e Stroppa, pubblicata un anno e mezzo fa;

2.° Che in tutte le urine si riscontra od un acido minore del fosforo, oppure un composto capace di cedere fosforo all' idrogene nascente, e ciò pur anche in conferma di quanto antecedentemente io stesso aveva notato, e l'avevano pure notato i due miei allievi mentovati;

3.° Che per distillazione se ne ritrae un prodotto volatile fosforato, circa al quale tutto induce a credere che sia d' indole neutra;

4.° Che se ne ritraggono ammoniaca, e basi volatili fosforate, le quali, quando si ebbero in proporzione bastevole per esperimentarle fisiologicamente, si dimostrarono di natura venefica.

Intorno a questi quattro punti è indispensabile che m' intrattenga con qualche considerazione non inopportuna.

Cominciando dalle URINE è da avvertire in ordine al *vapore fosforato* che si svolge dall' urina fresca e che annerisce la carta di argento, ma non si può reputare di fosforo libero, dacchè quantunque mi accadesse di esaminarne una (quella del secondo caso pag. 890) esalante odore di fosforo libero, nondimeno non riuscii ad osservarne la fosforescenza, per quanto m' industriassi di ottenerla. Il sussistere degli *acidi minori* del fosforo, od almeno di un composto fosforato che si comporta com' essi coll' idrogeno nascente, si rinnovò costante per tutte le urine fosforate, cominciando da quella esaminata da me nel 1874, poi all' altra studiata nel 1878 da Pesci e Stroppa, e procedendo alle tre diverse, di cui mi occupai in queste ultime indagini. Cosa degna di osservazione parmi il fatto, che gli acidi minori furono copiosi nell' urina dell' uomo che soggiacque per avvelenamento acuto e letale; che apparvero tosto anche nelle prime urine della donna che fu salva ma più scarsi, nelle quali vennero poi rapidamente diminuendo sotto la cura dell' essenza di trementina, senza che cessassero affatto.

L' albumina si appalesò sino dal principio, ma poco copiosa; in appresso venne diminuendo, indi non fu più trovata, allorchè la somministrazione dell' antidoto, seguitando, giunse sempre più a temperare la malattia prodotta dal tossico.

Non fu l' egual cosa del *prodotto volatile fosforato e neutro,* il quale manifestatosi sino dalla prima urina, e prima dell' antidoto, continuò sino all' ultimo, in quella cioè emessa nei giorni in cui la guarigione era ben incamminata. Tre circostanze sono da non dimenticare in proposito. La prima è che parte di esso si svolse dall' urina, quando la tenni in bagno maria e fu attraversata da una corrente di acido carbonico; mentre dalla stessa ne ottenni poi de' contrassegni soltanto, allorchè dopo il trattamento colla barita e l' alcole, distillai il liquido urinoso-alcolico. La seconda cosa da considerare è, che il prodotto volatile pare s' ingeneri in parte per decomposizione delle materie fosforate contenute nell' urina, in conseguenza dell' azione alterante del calore, essendo che ridistillando l' alcole della prima distillazione in cui sussisteva una fosfina volatile convertita in cloridrato, ricomparve il prodotto più copioso che nella distillazione antecedente. La terza infine, che tale prodotto volatile e neutro non cessò di rendersi palese, sino dalle ultime urine, dove anzi (per quella dell' avvelenata e guarita appartenente al IV periodo) lo riscontrai in maggiore abbondanza che nelle urine dei giorni precedenti.

Per le *fosfine* o *basi fosforate* che sussistono nelle urine è notevole il fatto, che

nell' urina dell' avvelenato per avvelenamento acuto non ne trovassi che traccie, mentre vi abbondava l'ammoniaca e vi abbondarono gli acidi minori; nell' urina degli avvelenati guaribili (i quali senza dubbio avevano trangugiato minore proporzione di fosforo) esse apparvero meno scarse. Difatto, mentre da quella dell'avvelenamento letale in quantità di 430 c. c. non potei estrarne che il sufficiente per determinarvi il fosforo ed una parte soltanto delle reazioni chimiche; nelle altre poi dei due avvelenati con guarigione successiva, n' ebbi complessivamente in quantità maggiore, da poterle esplorare con tutti i reattivi, ed in alcuni casi da tentare l' esperienza fisiologica. Si aggiunga in proposito che i volumi di queste urine furono:

per quella dell' avvelenato guarito (1ª *Memoria*), raccolta in precedenza dell' antidoto, 210 c. c.; per quella subito dopo l' antidoto, 300 c. c.

dell' avvelenata guarita (2ª *Memoria*), per quella in precedenza dell' antidoto, 100 c. c.; per quella subito dopo l' antidoto, 140 c. c.

Un altro fatto merita attenzione, ed è che le *fosfine* continuano ad ottenersi dalle urine, in copia sensibilmente non diminuita, quand' anche si procede innanzi nella cura, e per più giorni dopo l' ingestione del fosforo; che pajono mutare di caratteri di mano in mano che seguita la loro eliminazione dall' organismo; e risultano più fosforate nei periodi posteriori di quello che negli anteriori; che se ne riscontrano costantemente due di volatili, una più facilmente dissociabile dal composto salino, che distillai coll' alcole e che estrassi col mezzo dell' etere, mentre un' altra resta nel residuo urinoso divenuto di reazione acida, d' onde la ricavai col mezzo del cloroformio; che in principio ne trovai pure una terza, volatile anch' essa, non estraibile col mezzo del cloroformio, formatasi forse da qualche prodotto fosforato per influenza dei reattivi e del calore; che, in riguardo all' azione venefica, le prime furono assai più potenti di quelle che susseguirono quando la cura era in pieno corso.

A somiglianza degli acidi minori del fosforo e del prodotto fosforato volatile e neutro, le *fosfine* possono tornare di grande giovamento al tossicologo, considerando alla loro continuata eliminazione, non ostante l' amministrazione non interrotta dell' essenza di trementina.

Venendo ora ai risultati che fornì il cervello fosforato, debbo notarne l' acidità ragguardevole, onde occorse molto idrato di bario per saturarla, come pure che si svolse nelle distillazioni alcoliche il *prodotto volatile fosforato*, quale si ha dalle urine, ed esso tanto prima dell' alcalizzamento del macerato alcolico, quanto dopo.

Nel cervello pure sussistevano le *fosfine*, una volatile e due fisse, tutte più ricche di fosforo delle basi trovate nell' urina; in cui, come avvertii (tranne un caso solo) furono sempre volatili. In oltre noto un altro particolare degno di essere rammentato, ed è, che la sola fosfina volatile del cervello diede contrassegni di velenosità leggiera, a differenza specialmente della prima volatile dell' urina del III pe-

riodo (dall' avvelenata con guarigione) che si mostrò velenosissima: tossiche in alto grado riuscirono per l' opposto le fosfine fisse del mentovato viscere.

La *materia grassa,* non possedente le proprietà del protagone, conteneva un composto fosforato capace di fosforare l' idrogene nascente: il precipitato che la barita indusse nel macerato alcolico (da cui la metà dell' alcole era stata separata per distillazione) conteneva similmente un *acido* che pure fosforava l' idrogene nella detta condizione; e tutti i varî prodotti erano ricchi assai di fosforo, onde pare che il metalloide trangugiato dal suicida si fosse trosportato in buona parte nella massa cerebrale, l' avesse invasa, ed intaccatine i principii immediati.

Finalmente facendo trapasso ai prodotti ricavati dal FEGATO, la prima osservazione che si offre alla mente è quella della mancanza nel precipitato baritico insolubile degli *acidi minori* del fosforo, ovvero di quei corpi precipitabili dalla barita, che cedono fosforo all' idrogeno nascente; con cui coincide l' altra osservazione, che il sale baritico insolubile nell' alcole, ma solubile nell' acqua, conteneva un acido molto fosforato ma incapace di fosforare l' idrogeno. Con questo concorda la terza osservazione sul prodotto *oleoso* e *fosforato considerevolmente,* non pertanto incapace nel modo indicato di cedere fosforo al detto gas.

Dal complesso sembra potersene concludere, che i prodotti acidi sussistenti nel fegato appartenevano piuttosto alla classe degli acidi del fosforo nel massimo grado di ossidazione, che non a quella degli acidi minori.

Un' altra differenza, non solo in confronto del cervello, ma ben anche dell' urina, fu la scarsezza relativa del *prodotto fosforato volatile* e *neutro;* mentre si ripetè il fatto, che notai per taluna delle urine, di aver cioè riscontrato più di tale prodotto nell' alcole ridistillato che in quello della prima distillazione. Circa alle *fosfine* ambedue volatili, ambedue piuttosto ricche di fosforo, ambedue fortemente venefiche: della terza non accenno, perchè esaminata appena per la scarsa quantità. Debbo non tacere che per le proprietà si mostrarono diverse da tutte le corrispondenti trovate nelle urine e nel cervello; singolarissima l' una e l' altra per la resistenza all' ossidazione; singolarissima in oltre la seconda per la sua poca volatilità e l' odore somigliantissimo a quello della conina.

Comunque sia, emerge dalle esperienze eseguite sul fegato, che questo viscere potrà tornare di grande aiuto al tossicologo nei casi di avvelenamento col fosforo, quando non fu concesso di riscontrare il metalloide libero.

Ma ciò che parmi abbia da arrecare qualche sussidio maggiore nelle ricerche periziali, è nel caso in cui il cadavere fu sepolto, ed in cui vanamente si tenterebbe di scoprirvi il fosforo per via di fosforescenza, o per essersi convertito in idrogeno fosforato, od in acidi minori etc. Essendo probabile assai che le fosfine permangano a lungo inalterate, in un mezzo riduttivo come è quello in cui avviene la putrefazione, si potrà procedere ad investigare se sieno per anco nel fegato e nel cervello, coi caratteri, dal più al meno, indicati nelle presenti *Memorie;* come eziandio si potrà indagare se nel secondo si riscontrino acidi grassi fosforati

capaci di fosforare l' idrogeno dallo zinco coll' acido solforico: su questa parte dell' argomento occorrono però studî sperimentali, istituiti a bella posta.

A quei lettori, i quali giudicassero che il procedimento operativo poteva essere immaginato e condotto con altre maniere, mi credo in debito di rammentare semplicemente, quale lo scopo che mi era prefisso; fu soltanto quello di procurare di trarre qualche partito con esse in beneficio della scienza da me professata.

I diversi risultati che si vennero svelando di mano in mano, durante le mie ricerche, sebbene dirette ad uno scopo tutto speciale, hanno tuttavolta un' importanza di qualche valore al di là della cerchia entro cui le dovetti restringere, dacchè sono i primi indizî che si posseggono circa all' azione alteratrice onde le sostanze venefiche si comportano nell' organismo a modificare ed alterare i principî immediati concorrenti alla formazione dei conserti istologici. Non è che un primo accenno; ma, data la sveglia, ed altri dedicandosi ad uno studio più profondo, e spinto innanzi con un intento diverso dal mio, potranno fare manifesto ciò che avvenga nei componenti delle varie compagini organizzate, allorchè vi si introduce e vi si annida una sostanza nemica della vita, e passando dalla osservazione macroscopica, alla microscopica ed alla chimica, rendere ragione dei fenomeni fisiologici, dei guasti patologici, dei sintomi diagnostici e delle lesioni degli organi che o furono notati e si vanno notando nelle fasi successive dei varî avvelenamenti. La formazione di prodotti tossici, forse più nocivi dello stesso veleno primitivo, e con azioni peculiari loro proprie, devono accrescere la potenza malefica delle sostanze ingerite, ed il loro insediarsi in questo od in quell' organo, e protrarne più a lungo gli effetti perniciosi. Quando si è visto taluna delle fosfine ricavate dall' urina, dal cervello e dal fegato uccidere nello spazio breve di 3[4 d' ora a due ore le rane, sebbene iniettate nelle dosi di 11 a 15 millig. dei rispettivi cloridrati, si è in diritto di concludere, che nell' uomo stesso in cui si vennero ingenerando abbiano da operare con maggiore efficacia ed unire la loro attività specifica a quella del fosforo, operante per sè. Qualora il fosforo si conterminasse nell' organismo a sottrarre ossigeno ed a convertirsi in acido fosforico, come erasi creduto fino ad ora, dovrebb' essere eliminato in tempo assai più breve di quanto io venni osservando e nello stato solamente di fosfato; mentre per l' opposto la sua eliminazione nella forma dei prodotti a cui dà origine, continuò almeno dal 16 Aprile (giorno dell' inghiottimento) sino al 26, cioè per undici giorni, e forse l' avrei trovato più innanzi ancora, se avessi continuato a ricevere l' urina della stessa avvelenata da esaminare. Per uguali ragioni deve succedere che l' arsenico seguitò quaranta giorni per lo meno ad essere riscontrato nelle urine, dacchè esso pure dà nascimento a basi arsenicali, somiglianti alle fosfine, come dimostrerò in una *Memoria* non per anche pubblicata.

Ma un' altra considerazione non dev' essere taciuta, ed è quella, che dalle mie ricerche emerge manifestamente, operare il fosforo sull' economia animale nelle due maniere di disossidare e di aggredire i principii immediati, senza che una delle

azioni mostri di procedere all'altra, onde sembra che incomincino contemporaneamente. Difatto nelle prime urine raccolte, in antecedenza dell' antidoto, e subito che gli ammalati furono ricoverati negli ospedali, verificai che coesistevano gli acidi minori, il principio volatile fosforato e neutro e le fosfine. Quando per la quantità inghiottita, gli stadi del veneficio si succedettero rapidi e precipitarono a morte l' avvelenato, è da notare che gli acidi minori abbondarono e le fosfine scarseggiarono; onde in tal caso la potenza venefica derivò piuttosto dagli effetti di disossidazione e di alterazione dei globuli sanguigni; mentre negli avvelenamenti più miti e guaribili, gli acidi minori furono in proporzione più debole e le fosfine in più forte in confronto dell' avvelenamento acuto.

Sebbene le ricerche descritte nelle quattro *Memorie* incomincino dalle urine, e continuino pel cervello e pel fegato, tuttavolta l' esame dei prodotti ottenuti, quando si esce dai limiti della tossicologìa, torna meglio che si faccia in ordine più razionale, dal cervello cioè, poi dal fegato ed in ultimo dall' umore urinoso. L' abbondare dei prodotti fosforati nel primo ed il loro esservi più ricchi di fosforo fa supporre che il metalloido libero affluendovi, abbia ivi modo più agevole di reagire e perciò di fissarvisi, a somiglianza di quello che fa dell' arsenico, il quale si accumula più in detto viscere che altrove. Singolare è la deficienza degli acidi minori nel fegato, quasi che nel trapassarvi soggiacessero ad ossidazione maggiore più che nel cervello stesso, più che nell' intero torrente sanguigno; singolare nel fegato la scarsezza del principio volatile fosforato, quasi fosse scomparso similmente per ossidazione. Più singolare parmi ancora che nel cervello prevalessero le fosfine fisse, avendovene riscontrate due ed una sola di volatili, e questa meno venefica di quelle; singolare quella con odore di conina estratta dal fegato e la resistenza agli ossidanti di essa e dell' altra pure volatile, che l' accompagnava; singolare infine il non essermi abbattuto tra le varie fosfine in due soltanto, le quali si possono chiamare identiche, non solo stabilendo i confronti tra quella di una derivazione con quella dell' altra, ma non meno tra quelle delle urine, secondo che l' umore urinoso proveniva da persone diverse od eziandio da una sola se emunte in istadi susseguenti.

Ma su tale proposito non mi nascondo un dubbio, ed è che le differenze osservate tra fosfine e fosfine non siano da attribuirsi a qualche impurezza che loro fosse aderente. È ben vero che convertitele in cloridrato, fu raro che non li ottenessi cristallizzati, puri discretamente, con caratteri distintivi a sufficienza per la forma cristallina, la igroscopicità e le reazioni chimiche; nondimeno, prima di decidere assolutamente sulla loro assoluta diversità, almeno per alcune, occorrono nuove ricerche ed osservazioni.

Insorge naturalmente una domanda: quali i principii immediati che sono aggrediti dal fosforo diffusosi nell' interno del corpo animale? Ed in quali materiali solidi, in quali umori spiega di più la sua azione? Nulla sarebbe lecito di rispondere. Nel cervello non può dirsi per ora se intacchi piuttosto o gli albuminoidi

o le altre sostanze, forse ambedue; nel fegato ignoro su quali componenti operi principalmente. Per chiarire tali punti occorrono pure esperienze più in grande, moltiplicate, e la cognizione della composizione chimica dei prodotti fosforati. L'apparire dell' albumina nelle urine sembrerebbe indizio che certi albuminoidi non rimangono immuni da alterazioni. Anche rispetto a quell' albumina non si sa se sia nello stato di sua integrità, od un' albumina modificata.

Neppure potrebbesi dare risposta ad altra domanda: se le fosfine che si riscontrano nell' umore urinoso si accumulassero nel fegato ivi soggiacendo a modificazioni, per essere poi reiette.

Comunque sia la formazione delle fosfine, come quella delle arsine nell'avvelenamento dell' arsenico, è per mio avviso un argomento che mi darebbe ragione, quando arrischiai la congettura che le sostanze venefiche di una certa natura, compresi i fermenti e gli organismi infettivi, nel loro operare sui principî immediati si comportino provocandone scomposizioni più o meno profonde, d' onde basi organiche ed altri prodotti più o meno venefici, non dissimili in genere da quelli che si vanno ingenerando durante le putrefazioni.

(Documento A)

Esperienza fisiologica eseguita dal prof. G. V. Ciaccio con un alcaloide ottenuto dall' urina fosforata, (III Periodo). — Pag. 27 della Memoria.

Il cloridrato di questa fosfina volatile adoperato nell' esperienza era in quantità di 11 milligr. La temperatura dell'ambiente 24 C.° — La rana è piccola, ma vivace molto. Si mette a nudo il cuore e se ne contano i battiti cardiaci che sono 76 per minuto; i moti respiratori 65, e piuttosto regolari ed ampi. Il cuore poi si contrae rapidamente, ed è pieno di sangue oscuro. Alle 12, 27′ si è iniettato l'alcaloido colla siringa del Pravaz sotto la pelle di ambedue le cosce.

Alle 12, 40′ — cioè dopo 13 minuti:

Moti respiratorî 20

sebbene i movimenti di deglutizione fossero frequenti, irregolari e poco estesi (1).

(1) Generalmente coloro i quali sperimentano sostanze venefiche o nò nelle rane tengono come una cosa stessa i movimenti di deglutizione e quelli di respirazione; ma questo è un errore. Poichè non ci è proporzione tra il numero delle deglutizioni dell' aria, e quello delle espansioni de'polmoni che si osservano ai latid el petto — Imperocchè sovente accade di vedere, che a due o tre atti di deglutizione, segue una sola dilatazione dei polmoni. Ond' è che a dilatare i polmoni spesso è insufficiente quella quantità di aria che si inghiottisce in una sola volta.

Battiti cardiaci 60.

Il cuore si contrae regolarmente. La sensibilità generale aumentata di molto, così che pizzicandola leggermente la pelle con le mollette, ovvero passandovi sopra il pennello si eccitano de' moti convulsivi generali. I moti di deglutizione sono ora piccoli, ora estesi e subitanei, come se fossero moti convulsi. Pupilla dilatata molto, ancora sensibile. Regione milojoidea contratta. Convulsioni spontanee, ma ad accessi e generali.

Dopo 33 minuti:

Moti respiratorî 75.
Battiti cardiaci 36.

La sistole si compie con lentezza; pizzicando la rana agli arti si destano moti convulsivi generali. La pupilla è dilatata e la cornea alquanto sensibile. La regione milojoidea ora appare gonfia per l'aria rimasta nella faringe, ora si contrae di subito; ci è trisma.

Dopo 48 minuti dall' iniezione:

Moti respiratorî 25

ma appena visibili. La regione milojoidea, ora resta gonfia ed immobile per qualche minuto, ed ora si contrae subitamente; nel gonfiarsi di nuovo talvolta si notano leggerissime contrazioni.

Battiti cardiaci 22.

Durante la sistole, che è completa, il cuore impallidisce; la diastole si compie più sollecitamente. Il cuore si è impicciolito. La sensibilità generale notevolmente diminuita, cosicchè pizzicata la pelle fortemente e in varî punti, l' animale non dà segno alcuno di dolore. Bagnando con acido acetico glaciale la membrana interdigitale, si destano convulsioni generali di brevissima durata. Le membra sono tutte rilassate; rilassato pur anche il muscolo milojoideo, cosicchè l' aria ne gonfia la regione, che dimora per molto tempo senza moto.

Dopo un' ora:

Moti respiratorî 0.
Moti di deglutizione 4

tre leggerissimi ed uno alquanto forte. Regione milojoidea gonfia ed immobile; il trisma è cessato. La pupilla dilatata e la cornea quasi insensibile.

Battiti cardiaci 24.

Sistole compiuta, ma lenta in paragone della diastole che è pur completa. Durante quest' ultima, il cuore si fa bruno; durante la sistole, pallido. Scoperti i muscoli della gamba e pizzicati forte, l' animale non dà segno di dolore, così pure pizzicandone la pelle. L' acido acetico glaciale applicato con pennello alla membrana interdigitale e sopra i muscoli nudi, non si destano convulsioni. Di quando in quando avvengono delle contrazioni subitanee alle membra anteriori e al muscolo milojoideo ma non gagliarde e poco dopo si rilasciano, mantenendo le membra la positura che lor si dà. La rana si può maneggiare come si vuole, e se non fossero alcuni leggieri moti convulsi nel milojoideo e i lenti moti del cuore, si potrebbe dire essere cessato di vivere. L' acido acetico applicato alla cornea, non desta alcun fenomeno.

Dopo un' ora e 30 minuti, cessato ogni moto volontario, ma il cuore, quantunque non molto impicciolito, seguita a contrarsi e dà 24 battiti per minuto; la sistole però è incompiuta.

L' azione principale di questa sostanza, con cui si è sperimentato, pare che si eserciti sulla midolla spinale, accrescendone dapprima l' attività, e appresso quasi interamente spegnendola; e quindi ne devono, come effetti ultimi, conseguitare lo spegnersi della sensibilità generale e dei movimenti respiratori, il rilassarsi dei muscoli volontari e in fine la cessazione dei moti del cuore.

(Documento B)

Esperienza fisiologica con un alcaloide estratto con cloroformio dall' urina dell' avvelenata con fosforo, (III Periodo) eseguita da C. Stroppa.

Cloridrato dal cloroformio.

Si opera sopra un grossa rana e vivace. La temperatura ambiente segna 19 C.°. Aperta la cavità toracica e messo a nudo il cuore, si contano 47 battiti cardiaci per minuto; 119 movimenti di deglutizione; quelli di respirazione non sono ben percettibili. Alle 10 20′ antim. si fa l' iniezione dello sciolto sotto la pelle di ambedue le cosce con schizzetto del Pravaz.

Dopo 10 minuti:

Battiti cardiaci 44.
Moti respiratorî 48.
Moti di deglutizione 105.

La pupilla si è alquanto dilatata, la cornea sensibilissima: è pur normale la sensibilità generale.

Dopo 25 minuti:

Battiti cardiaci 41.
Moti respiratorî 46.
Moti di deglutizione80.

Il cuore si è impicciolito della metà e la diastole, incompleta.

Dopo 40 minuti:

Battiti cardiaci 40.
Moti di deglutizione 37.

I movimenti respiratorî si arrestano per lunghi intervalli. La regione milojoidea si contrae anormalmente, e talvolta la contrazione vi perdura per un certo tempo. Il cuore continua ad impicciolirsi. La sensibilità generale non risponde alle eccitazioni meccaniche, bensì alle chimiche (acido acetico).

Dopo 55 minuti:

Battiti cardiaci 36

e poco estesi. I movimenti di respirazione e deglutizione sono cessati. Il cuore è pallido, la pupilla dilatata e la cornea poco sensibile.

Dopo un' ora e 10 minuti:

Battiti cardiaci 31.
Moti respiratorî 7.

I movimenti di deglutizione non sono riapparsi, se non che per breve durata si destano contrazioni spasmodiche alla regione milojoidea. Il collasso è completo in tutti gli arti che non rispondono più agli stimoli chimici. La cornea sola è alquanto sensibile.

Dopo 1, 25′ il cuore pulsa lentissimamente e i suoi battiti cessano alle ore 12, 15′, fermandosi il cuore in diastole.

L'azione principale dell'alcaloido sperimentato, pare si eserciti sul midollo spinale ed allungato, spegnendone l'attività, e di conseguenza arrestando la funzione del cuore e dei muscoli respiratori.

(Documento C)

Esperienza fisiologica su di una rana colla fosfina volatile estratta dal residuo della ridistillazione, (IV Periodo) eseguita da C. Stroppa

La base volatile, in forma di cloridrato, si adopera nella proporzione di 30 milligr. La rana è di mezzana grossezza ed assai vivace. La temperatura ambiente segna 20 C.°

Messo allo scoperto il cuore della rana, ne sono contati i battiti e parimenti i moti respiratori e di deglutizione. Quelli si presentano più accelerati dei cardiaci, che sono estesi e regolari. *I battiti cardiaci* in N. di 63 per minuto; *i moti respiratori* 81; e quelli di deglutizione 100.

Alle 9 antim. s' inietta sotto la pelle di ambedue le cosce della rana tutto lo sciolto del cloridrato.

Dopo 15 minuti:

Battiti cardiaci 45
Moti respiratori 41
" di deglutizione 74.

Il cuore si è alquanto impicciolito, benchè si mantenga regolare nei suoi movimenti e di un bel colore rosso vermiglio. La cornea sensibilissima e la pupilla fuor di misura dilatata. I moti respiratorii e di deglutizione non si succedono regolarmente. La sensibilità generale si è fatta più squisita.

Dopo 20 minuti dall' iniezione, la respirazione si arresta per un tempo relativamente lungo, e i moti di deglutizione sono interrotti.

Dopo 30 minuti, manifestansi dei tremiti nervosi e la rana si stira all' indietro. I tremiti aumentano in forma vermicolare nella regione addominale. Il cuore si è impicciolito e dà 43 battiti per minuto. La respirazione pare totalmente arrestata. La pupilla riman sempre dilatata. Bagnando leggermente con acido acetico glaciale la membrana interdigitale, si destano contrazioni gagliarde, ma non di forma tetanica bene spiegata.

Dopo 45 minuti:

Battiti cardiaci 41
Movimenti di deglutizione 2.

I moti respiratorii non sono percettibili. La sistole è incompleta, e nella diastole il cuore appare di color violaceo scuro. Solleticando la pelle con pennello

non manifesta più le contrazioni sopra notate, però di quando in quando si suscitano dei moti vermicolari e involontari nelle estremità inferiori. La cornea è sensibilissima e la pupilla sempre dilatata. La respirazione è cessata totalmente nè più appaiono moti di deglutizione.

Dopo 1 ora:

Battiti cardiaci 21.

La diastole si effettua in due tempi, la sistole abbastanza completa; il cuore è diminuito di due terzi. Pizzicando con mollette le estremità non dà segni di sofferenza: anche la cornea addiviene poco sensibile.

Dopo 1 ora e 10 minuti. Non si palesano che i moti cardiaci che ora son ridotti a 14. La cornea e le estremità non rispondono più agli stimoli.

Levando la pelle degli arti e bagnandone i muscoli con acido acetico l' animale non se ne risente punto. Similmente si comportano i muscoli addominali e il miloioideo.

Dopo 1 ora e 20′ il cuore soltanto si mantiene in vita e pulsa con 17 battiti per minuto.

Dopo 1 ora e 25′ il cuore, mentre si fa turgido, all' istante ingrossa e si arresta in diastole. Ora si ridesta un leggero movimento vermicolare nell' arto sinistro e posteriore che si propaga per l' addome. Dopo ciò, toccato l' arto medesimo, si riprendono alcuni moti cardiaci, che subito dopo cessano e il cuore resta come prima in diastole e turgido. La rana muore dopo 1 ora, 30′.

Appare da quanto precede, che l' azion venefica della fosfina su citata, colpisca essenzialmente il sistema nervoso della vita animale, accrescendone un po' dapprima l' attività; ma tosto sopprimendola progressivamente, fino a spegnerne, colla sensibilità generale, i moti respiratori ed i battiti cardiaci.

(Documento D.)

Esperienza fisiologica del Prof. V. G. Ciaccio con una fosfina ottenuta dal cervello di un avvelenato con fosforo.

La rana è di media grandezza e vivacissima, la temperatura dell' ambiente di 27 C.° L' alcaloido in forma di cloridrato è nella proporzione di 14 milligrammi. Si mette a nudo il cuore e contansi 75 battiti cardiaci per minuto e 55 moti respiratori, i quali sono ampi e regolari. Il cuore, di color rosso scuro, si contrae rapidamente e dà la sistole e la diastole compiute.

Alle 10,53′ s' inietta tutto lo sciolto alcaloideo sotto la pelle d' ambedue le cosce,

e tosto si osserva la pupilla allargarsi di molto, e la congiuntiva divenire assai sensibile.

Dopo 7 minuti:

Moti di deglutizione 50.

I Moti respiratori non si possono contare per essere molto piccoli e appena sensibili.

Battiti cardiaci 60.

La sistole e la diastole succedonsi regolarmente, ma meno rapide di prima, e il cuore si è alquanto impicciolito. Pupilla assai larga, e cornea meno sensibile.

Toccando la membrana interdigitale con un poco di acido acetico glaciale si destano dei moti riflessi nelle quattro membra, che poi subito cessano.

Alle 11,20′ cioè dopo 27 minuti:

Battiti cardiaci 64
Moti respiratori 46

irregolari e poco estesi. La sistole e la diastole si succedono con ordine. Ciò che v' è da notare si è, che il cuore è impicciolito della metà, restando il colore rosso scuro, la pupilla dilatata e la cornea sensibile come prima L' acido acetico sulla membrana interdigitale non aumenta la sensibilità, solo vi si desta qualche moto riflesso e passeggero.

Alle 12 meridiane:

Battiti cardiaci 64
Moti respiratori 70

più ampi, di prima, ma alquanto irregolari. La sistole e la diastole, son meno gagliarde e rapide, ma regolari e il cuore è cresciuto alquanto di mole. Si tralascia dall' osservare la rana, perchè pare siasi alquanto ristabilita dall' azione venefica della fosfina, la quale opera principalmente sul cuore impicciolendolo e ritardandone in battiti.

(Documento E.)

Esperienza fisiologica; con alcaloido estratto dal cervello di un avvelenato con fosforo, eseguita da C. Stroppa.

Cloridrato ottenuto dall' etere
con cui fu trattato il residuo della prima distillazione

La quantità del cloridrato in esperimento è di gr. 0,050; la temperatura ambiente di 27 C.°. Si opera sopra una rana di grandezza media e vivace: messone a nudo il cuore, si contano battiti cardiaci 58 al minuto, moti respiratorj 45, di deglutizione 85. Il cuore è di un bel rosso vivo e i suoi battiti sono estesi e regolari; così pure succedonsi regolarmente i moti respiratori. Alle 2,30′ pom. s' inietta tutto lo sciolto sotto la pelle di ambedue le cosce della rana.

Dopo 10 minuti:

Battiti cardiaci 52
Movim. resp. non sono percettibili
Movim. di deglutizione 42.

Il cuore si è impicciolito della metà ed ha perduto il suo vivo colore. La regione milojoidea si contrae infossandosi con tremiti convulsi. La pupilla s' è impicciolita e la cornea fattasi poco sensibile.

Dopo 20 minuti:

la respirazione è cessata.

Il cuore si è fatto pallido cinereo e, mentre i suoi battiti succedonsi lentamente, la diastole in ispecie a mala pena si compie. Gli arti anteriori si agitano con moti a forma clonica, che ripetonsi ogni volta che si bagna la membrana interdigitale dell' arto inferiore con acido acetico. La cornea, poco sensibile.

Il collasso, ch' erasi manifestato dopo i 20 minuti già indicati continua, diminuendo il cuore i suoi battiti progressivamente e insieme impicciolendosi.

Dopo 30 minuti, la sensibilità riflessa pare totalmente scomparsa.

Dopo 40 minuti:

Battiti cardiaci 36

ma così poco estesi che si contano a stento.

Se non che di quando in quando si appalesa qualche movimento coreico agli

arti anteriori e, mentre agli arti posteriori la sensibilità riflessa è scomparsa, la cornea si mantiene sensibile.

Dopo 50 minuti, la sensibililità diminuisce progressivamente, e i battiti del cuore rallentandosi di pari passo, in breve si spengono colla vita della rana.

Appare manifesto dal suesposto che l' alcaloido con cui si è sperimentato, spiega precipuamente la sua azione sulla midolla spinale: dal che ne procedono l' arresto dei moti respiratori e della funzione cardiaca, colla sensibilità.

(Documento F.)

Esperienza fisiologica con un alcaloido ottenuto dal cervello e separato coll' etere dopo il trattamento con acido cloridrico, eseguita da C. Stroppa.

Cloridrato della fosfina.

Si esperimenta sopra una rana piccola e molto vivace, segnando la temperie ambiente 22 C.°. Aperta la cavità toracica e messo a nudo il cuore si contano *58 battiti cardiaci* per minuto; 49 movimenti respiratori e 98 di deglutizione. Alle 2,15′ pom, s' inietta lo sciolto del cloridrato sotto la pelle di ambedue le cosce mediante la siringa del Pravaz.

Dopo 15 minuti:

Battiti cardiaci 16.
M. respirat. 9.
M. di deglutiz. 28.

La sensibilità cutanea che prima era squisitissima, ora è abolita ed è cessata pure agli arti posteriori, nè le eccitazioni su di essi producono moti riflessi negli altri gruppi muscolari. Tuttavia, conservandosi la sensibilità agli arti superiori, se questi vengono eccitati si destano pure de' moti riflessi negli arti inferiori.

Dopo 30 minuti i battiti cardiaci sono così piccoli, lenti e irregolari che non riesce possibile valutarne il numero nel periodo d' un minuto. La regione milojoidea resta immobile per lunghissime pause. La respirazione pare cessata.

La sensibilità generale diminuisce progressivamente e per ultimo cessa alla cornea.

Dopo 50 minuti dall' injezione: il cuore continua tuttavia a pulsare, ma lentamente, la diastole in ispecie impiega molto tempo per compiersi, se non che il

miocardio appalesa delle piccole e parziali contrazioni fibrillari. Non si avvertono nè movimenti di deglutizione nè di respirazione ed in nessuna parte si mostra sensibile agli stimoli meccanici o chimici. In tale stato si mantiene fino alle 3,40′ cioè fin dopo 1,25′ dall' injezione, quando il cuore cessa di battere in sistole.

Anche l' azione di questa fosfina colpisce prontamente il midollo spinale ed allungato rallentando in breve tempo i moti respiratori e cardiaci.

(Documento G)

Cloridrato della fosfina volatile prima

Com' è detto nella Memoria questo cloridrato era in quantità di 25 milligr. — La rana di mediocre grandezza e vivacissima. — La temperatura ambiente di 25 C°.

Aperta la cavità toracica, il cuore si presenta di color vermiglio e pulsa regolarmente, i battiti cardiaci 77 per minuto; i moti respiratorii 56, e quelli di deglutizione 147. Alle 11,35, fatta l' iniezione sotto la pelle di ambedue le cosce della rana, collo schizzetto del Pravaz, si osserva quanto segue: la pupilla all' istante si dilata e dopo breve tempo torna a restringersi con qualche tremito convulso del globo visivo.

Dopo 10 minuti, si contano:

Battiti cardiaci — 46
Moti respiratori — 0

I moti di deglutizione, che si erano pure arrestati, si suscitano irregolamente, e il muscolo milojoideo infossa la regione che gli corrisponde, tenendola immota, per lunghe pause. Poi tal parte si rigonfia, la rana apre la bocca con contrazioni spasmodiche del mascellare inferiore; in seguito manifesta il trisma. Il cuore si è impicciolito più della metà e la diastole è molto incompleta.

Di tratto in tratto si appalesano contrazioni violenti e generali, non però di forma tetanica ben caratteristica. La pupilla vieppiù si restringe, restando però la cornea sensibilissima.

Dopo 25 minuti:

Battiti cardiaci — 44
Moti respiratori — 0

Il trisma perdura, e il milojoideo immobile tiene tesa la regione corrispondente: la pupilla si è fatta piccolissima, mantenendosi sensibile la cornea.

Il cuore pulsa irregolarmente, la sistole è incompleta e la diastole pochissimo estesa. La sensibilità generale è molto dimmuita. Bagnando con acido acetico la membrana interdigitale degli arti posteriori, si manifestano movimenti coreici negli arti anteriori.

Dopo 35 minuti:

Il cuore si arresta in diastole amplissima; eccitata la rana sull' addome, il cuore riprende qualche moto, ma molto incompleto e di nuovo si arresta in diastole. La pupilla è ristretta tanto da dare quasi miosi completa. Il trisma è cessato e la regione milojoidea paralizzata completamente. Agli stimoli meccanici non risponde, nè più l'acido acetico vi suscita alcun moto riflesso.

Dopo 38 minuti — la rana cessa di vivere col cuore in diastole ampia, turgido e nerastro.

Questa esperienza dimostra che la fosfina (cloridrato α) è venefica in alto grado, spiegando energicamente la sua azione sul sistema nervoso della vita animale, in ispecie sul centro respiratorio e cardiaco; ma più su quello che su questo.

(Documento H)

Cloridrato della fosfina volatile seconda

Lo sciolto impiegato nell' iniezione conteneva 50 milligr. di cloridrato. Si operò sopra una rana piuttosto grossa e vivace, mentre la temperatura ambiente saliva a 25 C°.

Messo a nudo il cuore, si presenta di un bel color vermiglio, esteso e regolare nei suoi movimenti. Contati i battiti cardiaci, si trovano in numero di 81 ogni minuto; 85 i movimenti respiratorii; 112 quelli di deglutizione. Alle 2,15 pom. s' iniettò tutto quanto lo sciolto sotto la pelle d' ambedue le cosce.

Dopo 5 minuti, si osservano: contrazioni epiletiformi e paralisi del milojoideo, senza trisma.

Dopo 10 minuti:

Battiti cardiaci — 28

Essi battiti però sono irregolari, e il cuore, tendendo ad arrestarsi in diastole, è pallidissimo nella sistole bruno cupo nella diastole.

Movimenti resp. — 0
Movimenti di deglutizione — 0.

Paralisi generale, pupilla estremamente impicciolita, quasi miosi; pure la cornea si mantiene alquanto sensibile. Dopo lunghi intervalli si suscita qualche moto coreico.

Dopo 15 minuti — Diastoli lunghissime qualche accenno di sistole; però dopo 10 ad 11 contrazioni del miocardio, senza che il cuore si vuoti, finalmente riesce a fare una sistole completa. — Bagnata sulla membrana interdigitale con acido acetico, risponde debolmente — nulla manifesta cogli stimoli meccanici.

Dopo 20 minuti — 40 contrazioni del miocardio sono susseguite da una sola sistole completa.

Movimenti respiratorii e di deglutizione — 0

Toccando la cornea, essa risponde lievemente e manifestasi per l' ultima volta un debole moto nelle estremità.

Dopo 30 minuti — Il cuore rimane lungamente in diastole e di color rosso bruno: soltanto dopo l' intervallo d' un minuto si manifesta *una* sistole lentissima. La cornea non risponde più agli stimoli.

Dopo 38 minuti — cessano totalmente i battiti cardiaci e la rana muore.

Dal suesposto appare manifesto che l' azione tossica di questa fosfina non differendo dalla precedente, si esercita sul midollo spinale ed allungato colla paralisi del quale si potrebbe spiegare l' arresto di funzione del cuore e dei muscoli respiratori.

ERRATA	CORRIGE
pag. 634 lin. 14 Oscilante	Oscitante

INDICE

Francesco Rizzoli — *Studi Isto-Fisio-Anatomo-Patologici e Clinici sull' Ano preternaturale accidentale* . . . . Pag. 3

E. Villari — *Osservazioni sulla Variazione di Temperatura del Corpo Umano prodotta dal movimento* . . . . „ 39

Idem. — *Sulle leggi Termiche e Galvanometriche della Scintilla delle Scariche di Induzioni; con 2 Tavole* (III Memoria) . . . . „ 49

A. Fais — *Sulle principali proprietà delle Traiettorie Ortogonali delle Generatrici delle Superficie rigate* . . . . „ 67

A. Righi — *Sulle Variazioni di Lunghezza che accompagnano la Magnetizzazione* . . . . „ 99

Idem. — *Sulla Dilatazione Galvanica* . . . . „ 113

Idem. — *Sulla Formazione dell' Albero di Marte* . . . . „ 115

L. Calori — *Dell' abnorme separazione della porzione squamosa dalle altre dell' Osso Temporale dell' uomo adulto — Di alcuni particolari intorno alla Varietà delle Cellule Mastoidee, e del Forame di Rivino; con 3 Tavole* „ 121

F. Aschieri — *Sulle Forme Collineari e Reciproche nella Ordinaria Geometria* . . . . „ 145

F. Verardini — *Di un Nuovo Uncino Ostetrico e Decollatore, premessa la Storia generale di alquanti mezzi meccanici principali adoprati fin qui per recidere la testa al Feto morto nell' Utero Materno; con 2 Tavole* „ 151

C. Taruffi — *Due rare alterazioni del Fegato; con 2 Tavole* . . . . „ 167

Idem. — *Anomalie dell' Osso Malare, con una Tavola* . . . . „ 183

G. Gautero — *Di una Classe di Meccanismi a tre Membri* . . . . „ 203

G. Cocconi — *Quarto Contributo alla Flora della Provincia di Bologna* . . . . Pag. 209

A. Saporetti — *Metodo Teorico-Pratico per iscoprire gli Istanti del nascere e tramontare della Luna; con tavole* . . . . „ 235

F. Selmi — *Ricerche del Fosforo nelle Urine in caso di avvelenamento, e prodotti che vi si riscontrano; con tavola* . . . . „ 275

Idem — *Esame dell' Urina di un Itterico grave in correlazione coll'esame di un' urina fosforata* . . . . „ 291

Idem — *Sulla fallacia del Reattivo di Van-Deen per determinare le macchie del sangue* . . . . „ 295

Idem — *Nota sopra due Arsine formatesi in uno stomaco di majale salato con Anidride arseniosa* . . . . „ 299

A. Gotti — *Ricerche sopra un lento processo Artritico al Tarso del cavallo; con cinque tavole* . . . . „ 307

A. Cavazzi — *Determinazione del Potere Calorifero dei Combustibili solidi idrogenati col processo Berthier* . . . . „ 339

F. Masi — *Dei Giunti derivati dal Quadrilatero Sferico; con due tavole* . . . . „ 349

G. Brugnoli — *Vasta Idatide del Fegato, trattata colla Puntura capillare aspirante praticata nel sesto spazio intercostale destro* . . . . . „ 359

F. P. Ruffini — *Di alcune singolarità nei Fasci e nelle Reti di linee piane algebriche* . . . . „ 367

Gian P. Piana — *Osservazioni comparative intorno alla Struttura delle ultime diramazioni delle Arterie pulmonari; con tavola* . . . . . „ 417

Idem — *Contribuzione alla conoscenza della Struttura e della funzione dell'organo di Jacobson; con tavola* . . . . „ 421

G. Bellonci — *Sui lobi Olfatorii del Nephrops Norwegicus; con tavola.* „ 429

A. Righi — *Contribuzioni alla Teoria della magnetizzazione dell' acciaio; con tavola* . . . . „ 433

L. Foresti — *Dell' Ostrea Cochlear (Poli) e di alcune sue varietà; con 2 tavole* . . . . „ 545

P. Boschi — *Ricerche sopra una questione di Partizione di Numeri.* „ 555

E. Beltrami — *Sulla Teoria dell' attrazione degli Ellissoidi* . . . . „ 573

L. Calori — *Di una Bambina Microcefalica e specialmente del suo cervello; con quattro tavole* . . . . Pag. 617

S. Canevazzi — *Sopra alcune formole della resistenza dei Materiali; con tavola* . . . . Pag. 643

A. Rossi — *L'azione dell'acido osmico sulle Cellule Vegetali* . . . . „ 657

Idem — *Sul modo di terminare dei Nervi nei muscoli dell' Organo Sonoro della Cicala comune, con una tavola* . . . . „ 661

A. Cavazzi — *Determinazione dell' Ossigene attivo, nel Biossido di Bario Commerciale* . . . . „ 676

C. Razzaboni — *Sul moto dell'acqua per Alvei a fondo orizzontale* . „ 677

C. Giannetti e **A. Corona** — *Sugli alcaloidi cadaverici o Ptomaine del Selmi* . . . . „ 689

L. Monti — *Descrizione anatomica di un mostro umano doppio del genere Derodimo, con sei tavole* . . . . „ 713

L. Bombicci — *Nuovi studi sulla Poligenesi nei Minerali, con due tavole.* „ 727

S. Trinchese — *Ricerche anatomiche sulla Rizzolia Peregrina, con 3 tavole.* „ 767

F. Selmi — *Nuovo esame di urine fosforate; fosfine venefiche che se ne ritraggono* . . . . „ 777

Idem. — *Ricerche chimico-tossicologiche sopra il cervello di uno che si avvelenò* „ 793

F. Selmi e **C. Stroppa** — *Ricerche chimico-tossicologiche di uno che si avvelenò con fosforo* . . . . „ 803

F. Selmi — *Riepilogo e considerazioni sulle quattro memorie precedenti* „ 811